

ESTUDIO NUMÉRICO DE LA ESTRICCIÓN EN PROBETAS CILÍNDRICAS Y RECTANGULARES

Claudio A. Careglio^{a,b,c}, Anibal E. Mirasso^{a,b}, Carlos G. García Garino^{a,b}

^aLAPIC, ITIC, Instituto Tecnológico Universitario & Universidad Nacional de Cuyo, Casilla de Correo 947, 5500 Mendoza, Argentina, ccareglio@uncu.edu.ar, aemirasso@uncu.edu.ar, cgarcia@itu.uncu.edu.ar

^bFacultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Campus Universitario, Parque General San Martín, 5500 Mendoza, Argentina

^cCONICET, Becario Doctoral

Palabras Clave: Necking, Ensayo de Tracción Simple, Plasticidad, Grandes Deformaciones.

Resumen. El ensayo de tracción simple es uno de los medios más empleados en la práctica para caracterizar la respuesta mecánica de los metales. En una primera fase de este ensayo las deformaciones son pequeñas o moderadas, la carga es creciente y el comportamiento del material es estable. Luego del máximo de carga las deformaciones se concentran en una zona dada en donde se observan cambios geométricos muy grandes que dan lugar a la formación de la estricción en la probeta. En dicha región se verifica un estado triaxial de tensiones bastante complejo. En el resto de la probeta se producen paulatinas descargas elásticas. Durante esta etapa la información anterior ya no es suficiente para modelar la plasticidad del material y deben emplearse tensiones verdaderas de Cauchy y deformaciones logarítmicas para calibrar las ecuaciones constitutivas.

En este trabajo en particular se simula numéricamente este tipo de ensayo para probetas cilíndricas y rectangulares empleando el método de elementos finitos. Se emplea el código SOGDE3D, herramienta presentada por los autores en trabajos anteriores, lo que permite obtener para el ensayo de tracción simple resultados relevantes como lo son la evolución de la carga; distribución de los campos de tensiones, deformaciones y desplazamientos en la zona del cuello; alargamiento de la probeta, como así también la evolución de la estricción en la sección del cuello.

Los resultados numéricos se comparan con los obtenidos numéricamente y experimentalmente disponibles en la literatura.

1 INTRODUCCIÓN

El ensayo de tracción simple es uno de los medios más empleados en la práctica para caracterizar la respuesta mecánica de los metales. En una primera fase de este ensayo las deformaciones son pequeñas o moderadas, la carga es creciente y el comportamiento del material es estable. Luego del máximo de carga las deformaciones se concentran en una zona dada en donde se observan cambios geométricos muy grandes que dan lugar a la formación de la estricción en la probeta. En dicha región se verifica un estado triaxial de tensiones bastante complejo. En el resto de la probeta se producen paulatinas descargas elásticas. Durante esta etapa la información anterior ya no es suficiente para modelar la plasticidad del material y deben emplearse tensiones verdaderas de Cauchy y deformaciones logarítmicas para calibrar las ecuaciones constitutivas.

La descripción del ensayo de tracción más allá de régimen lineal ha sido de interés de diversos autores y con distintos enfoques, tanto experimentalmente como analítica o numéricamente.

Desde el punto de vista experimental pueden citarse dos contribuciones muy importantes: la de Norris et al. (1978) quien ensayó y simuló numéricamente probetas de acero y la de Goicolea (1985) que ensayó y estudió computacionalmente probetas de aluminio.

Distintas fórmulas analíticas han sido propuestas, entre otros por Bridgman (1944) y Davidenkov y Spiridonova (1946) para describir las relaciones entre las tensiones en el cuello de la estricción y la tensión de fluencia.

En el contexto de la Mecánica Computacional pueden citarse diferentes contribuciones. Los primeros resultados, obtenidos cuando el cálculo de diferencias/elementos finitos no lineales estaba en sus inicios, se deben a Wilkins (1968), Chen (1971), Needleman (1972), Norris et al. (1978) y Goicolea (1985). Posteriormente la simulación computacional de este ensayo ha recibido la atención de numerosos autores (Hallquist, 1982; Simó, 1988b; García Garino, 1993; Simó y Armero, 1993; Ponthot, 1994; Goicolea et al., 1996; García Garino et al., 1996), situándolo en el contexto de formulaciones modernas de la plasticidad basadas tanto en modelos hipoelásticos como modelos hiperelásticos con descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones.

Recientemente Cabezas y Celentano (2004) han presentado los resultados experimentales y numéricos del ensayo de tracción de probetas rectangulares de acero. Para ello han utilizado una formulación lagrangiana total con un modelo elastoplástico asociado de Von Mises y ley de endurecimiento no lineal.

En este trabajo en particular se simula numéricamente este tipo de ensayo para probetas cilíndricas de aluminio y rectangulares de acero empleando el método de elementos finitos y una formulación lagrangiana actualizada. Se emplea el código SOGDE3D, que a diferencia de trabajos anteriores de los autores (Careglio et. al, 2005) incorpora una ley de endurecimiento de tipo potencial.

Se obtienen resultados relevantes como lo son evolución de la carga, deformaciones y desplazamientos en la zona del cuello, alargamiento de la probeta, evolución de la estricción en la zona del cuello entre otros. Los resultados numéricos obtenidos se comparan con los obtenidos en forma numérica y experimental por Goicolea (1985) para el caso de aluminio HE30 (BS1474) y por Cabezas y Celentano (2004) para el caso de acero SAE 1045.

2 FORMULACIÓN UTILIZADA

Para realizar las simulaciones numéricas del ensayo de tracción simple y efectuar los análisis de la sección 3, los autores han empleado un código de elementos finitos previamente

desarrollado, denominado SOGDE3D (Careglio et al., 2005). Dicho código se basa en una formulación lagrangiana actualizada. La cinemática del modelo empleado está basada en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones (Simó, 1988a):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (1)$$

La ley constitutiva se formula en el contexto de la termodinámica irreversible de sólidos mediante una función de energía libre:

$$\psi = \psi^e(\mathbf{e}^e) + \psi^p(\zeta) \quad (2)$$

siendo \mathbf{e}^e la parte elástica del tensor de deformaciones de Almansi e y ζ las variables internas. El modelo constitutivo se basa en la descomposición aditiva de \mathbf{e} obtenida a partir de la ecuación (1):

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \quad (3)$$

La relación tensión-deformación es de tipo hiperelástico y el tensor de tensiones de Cauchy puede ser obtenido a partir de la parte elástica de la energía libre como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e(\mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (4)$$

La integración del modelo constitutivo se basa en un algoritmo predictor-corrector, descrito con mayor detalle en (García Garino, 1993). El predictor elástico se resuelve mediante el tensor elástico de Finger:

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{b}^e)_{(pred.)} = \mathbf{f}^{-T} {}^t(\mathbf{b}^e)^{-1} \mathbf{f}^{-1} \quad (5)$$

donde $\mathbf{f} = \partial^{t+\Delta t} x / \partial^t x$ es el tensor gradiente de deformaciones incremental. El tensor elástico de Finger juega el papel de una variable interna en este modelo. El corrector plástico se calcula con un esquema de integración de Euler hacia atrás, resultando:

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{b}^e)^{-1} = {}^{t+\Delta t}(\mathbf{b}^e)^{-1}_{(pred.)} + 2\gamma^{t+\Delta t} \mathbf{n} \quad (6)$$

donde la corrección $\gamma^{t+\Delta t} \mathbf{n}$ se obtiene mediante el algoritmo de retorno radial (Simó, 1988a, b). A continuación se obtiene el tensor de deformaciones elásticas de Almansi:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^e = \frac{1}{2} \left[{}^{t+\Delta t} \mathbf{g} - {}^{t+\Delta t}(\mathbf{b}^e)^{-1} \right] \quad (7)$$

siendo \mathbf{g} el tensor de la métrica. Finalmente, las tensiones se obtienen aplicando (4), que en este caso vale

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e}^e) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e}^e \quad (8)$$

donde λ y μ son constantes del material.

La plasticidad se tiene en cuenta mediante una regla de flujo asociada con función de fluencia de tipo Von Mises o J2. Una descripción más detallada del modelo empleado puede encontrarse en García Garino (1993).

Para los estudios numéricos aquí presentados se ha implementando en SOGDE3D, además

de la ya existente ley de endurecimiento isótopo lineal, una ley de endurecimiento de tipo potencial:

$$Y(\varepsilon^p) = A(b + \varepsilon^p)^n \quad (9)$$

para la cual ε^p es la deformación plástica efectiva, A y n son constantes del material, Y(ε^p) la tensión efectiva, mientras que b es un parámetro que se obtiene imponiendo en la ecuación (9) que el límite elástico inicial sea Y_0 .

En las simulaciones numéricas de este trabajo se ha empleado el hexaedro lineal mixto con presión constante (H1/P0) (Zienkiewicz y Taylor, 1991) el cual es la extensión al caso 3D del elemento mixto Q1/P0. Con respecto a las ecuaciones no lineales de equilibrio obtenidas se resuelven mediante un esquema incremental iterativo de tipo Newton Raphson.

3 SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA ESTRICCIÓN

3.1 Estricción en probetas cilíndricas

El primer caso analizado es el de una probeta cilindro circular en 3D sometida a tracción. El material empleado es aluminio HE30 (BS1474) del cual Goicolea (1985) ha obtenido resultados experimentales. A su vez los mismos han sido comparados con resultados numéricos para el caso 2D (Goicolea, 1985; García Garino et al., 2004; García Garino et al., 2006).

En la Tabla 1 se presentan las propiedades del aluminio utilizado, siendo E el módulo elástico y ν el módulo de Poisson.

Propiedad	Valor
E	67000MPa
ν	0,3
Y_0	50MPa
A	181,7MPa
n	0,159
b	$2,989 \cdot 10^{-4}$

Tabla 1: Propiedades de aluminio HE30 (BS1474)

Con respecto a las dimensiones la probeta tiene una longitud de 75 mm y un diámetro de 16,2 mm y se le impone una imperfección geométrica en forma de una variación lineal en el radio con una reducción máxima en el mismo de 1,8518% en la zona central de la probeta. Esta imperfección permite obtener la localización de la estricción durante el ensayo de tracción.

Dada la simetría existente en la probeta para el modelo numérico 3D sólo se ha modelado una octava parte de la misma. Con el objeto de evaluar la exactitud del modelo de elementos finitos utilizado se investigan dos mallas uniformes con diferente número de elementos. La primer malla está constituida por 1500 elementos hexaédricos mientras que la segunda está formada por 3000 elementos del mismo tipo, refinándose ambas mallas en la zona donde ocurre la estricción. En la Figura 1 se muestra la malla menos y más densa respectivamente.

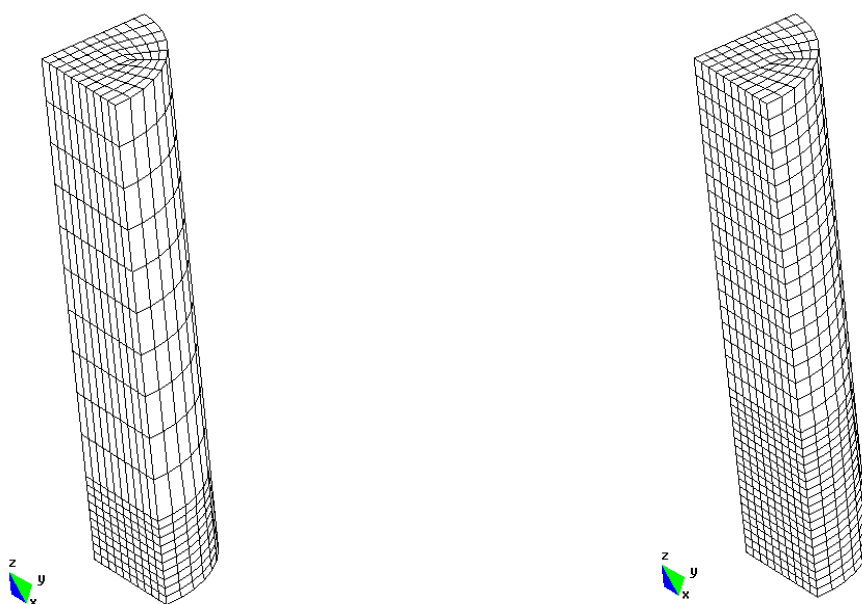
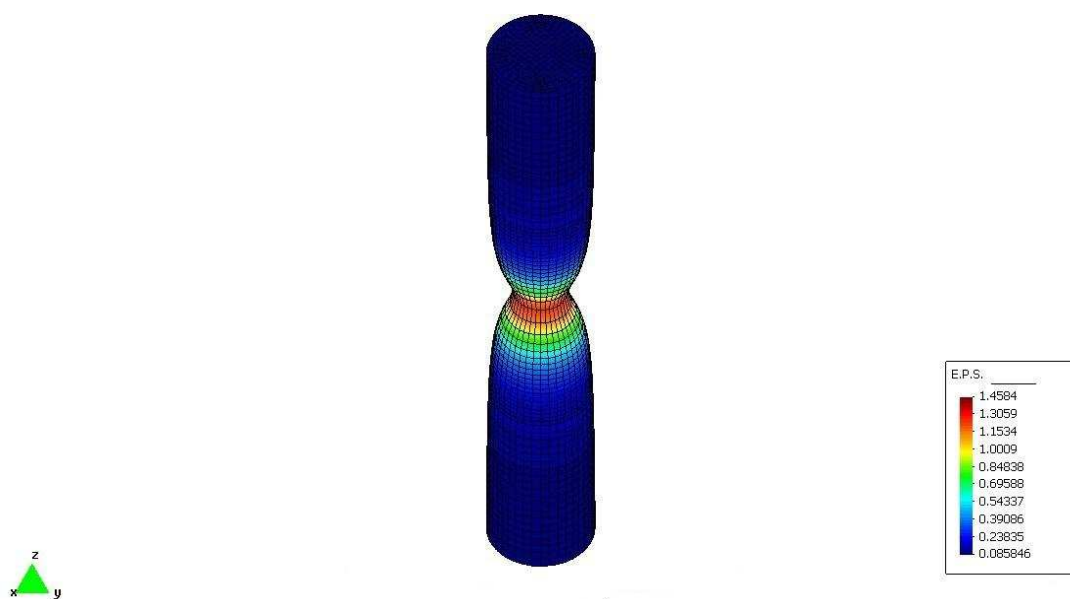


Figura 1: Mallas de 1500 y 3000 elementos

Si en la figura anterior se considera sólo un plano longitudinal por ejemplo en el plano xz para la coordenada $y=0$ se obtienen mallas de 200 y 400 elementos.

Para satisfacer condiciones de simetría se impiden los desplazamientos u_y en el plano xz (en la coordenada $y=0$) y u_x en el plano yz (en la coordenada $x=0$). Además para simular el ensayo de tracción simple se aplican desplazamientos verticales u_z en la cara superior hasta alcanzar un valor de 10 mm.

La Figura 2 presenta los contornos de deformación plástica efectiva superpuestos a la geometría deformada para la malla con más elementos.

Figura 2: Configuración deformada y contornos de ϵ^p para la malla más densa y $u_z=10$ mm

En la Figura 3 se muestra la evolución de la estricción en la zona del cuello, donde la relación de diámetro para un determinado valor de carga respecto al diámetro inicial D/D_0 se

grafica en función de la deformación ingenieril $\Delta l/l_0$ para la malla de 1500 y 3000 elementos. Estas curvas son comparadas con los resultados obtenidos para el caso 2D para mallas estructuradas de 206 elementos triangulares cuadráticos (Stainier et al., 2006) y de 360 elementos cuadriláteros Q1/P0 obtenidas con SOGDE bidimensional (García Garino et al., 2004; García Garino et al., 2006).

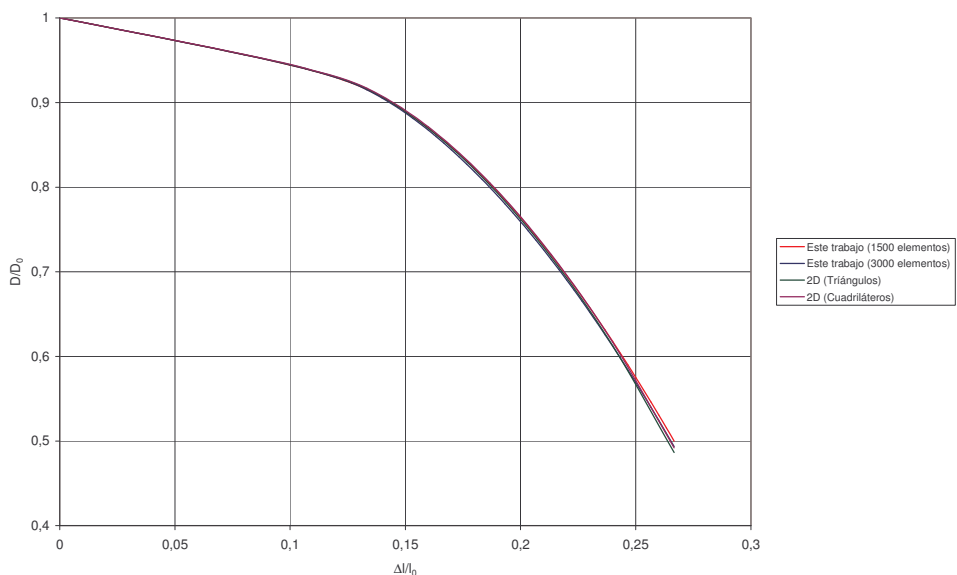


Figura 3: Evolución de la estricción en la probeta cilíndrica

En la Figura 4 puede observarse tanto para las dos mallas 3D como para los valores de referencia 2D como evoluciona la carga axial P graficada en función de la deformación logarítmica en el cuello ϵ_z siendo esta última $\epsilon_z = -2 \ln(D/D_0)$ para probetas cilíndricas.

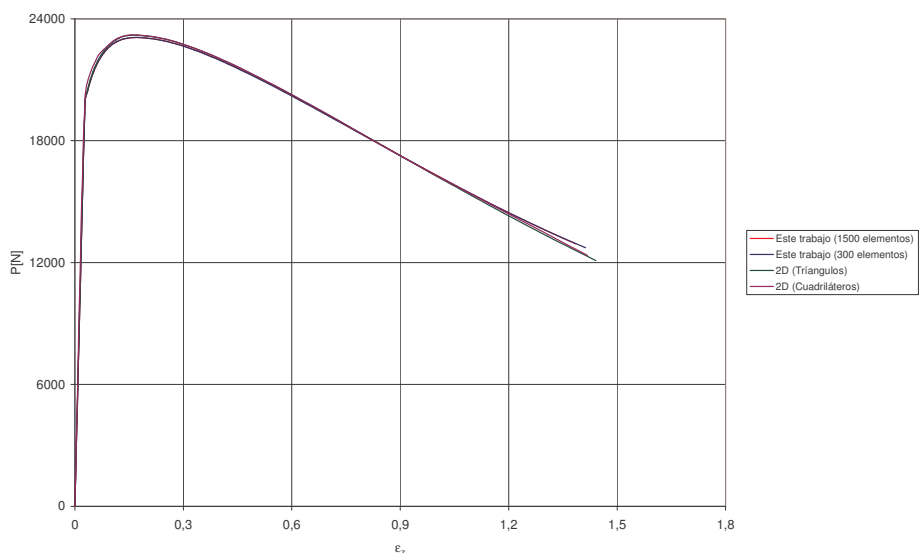


Figura 4: Carga axial P en función de la deformación logarítmica en el cuello ϵ_z

Luego dividiendo la carga axial P por el área A en la zona del cuello para ese valor de carga es posible obtener la tensión axial promedio σ_z . En la Figura 5 se muestra esta tensión en función de la deformación logarítmica en el cuello ϵ_z tanto para los casos 3D como 2D.

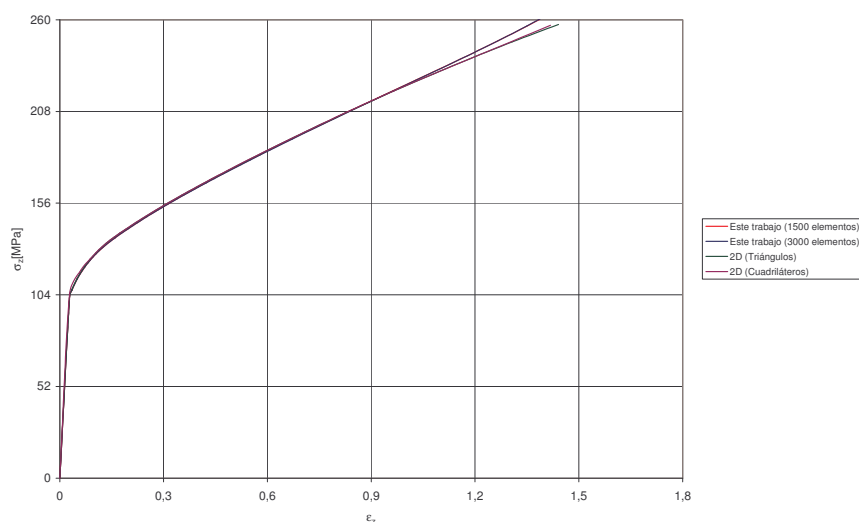


Figura 5: Tensión axial promedio σ_z en función de la deformación logarítmica en el cuello ϵ_z

En las tres curvas anteriores puede observarse que existe una buena correlación entre los resultados obtenidos en este trabajo y los valores de referencia. También puede verse al comparar las dos mallas 3D entre sí que existe una buena convergencia entre las mismas.

En la Tabla 2 se realiza una comparación cuantitativa de los resultados numéricos con los resultados experimentales (Goicolea, 1985) en la zona del cuello para un valor de $\epsilon_z=0,9$. En la mencionada tabla se puede apreciar la muy buena precisión alcanzada.

	σ_z [MPa]	P [kN]
Este trabajo (1500 elementos)	213,6	17,3
Este trabajo (3000 elementos)	213,5	17,3
Experimentos	213 ± 15	$17,2 \pm 1,2$

Tabla 2: Comparación de resultados numéricos y experimentales en el cuello para $\epsilon_z=0,9$

3.2 Estricción en probetas rectangulares

El segundo caso analizado es el de una probeta rectangular 3D sometida a tracción. El material empleado es acero SAE 1045 del cual Cabezas y Celentano (2004) han obtenido resultados tanto numéricos como experimentales.

En la Tabla 3 se presentan las propiedades del acero empleado.

Propiedad	Valor
E	222000MPa
ν	0,3
Y_0	450MPa
A	1047,7MPa
n	0,1206
b	$9,0506 \cdot 10^{-4}$

Tabla 3: Propiedades de acero SAE 1045

La probeta rectangular tiene una longitud de 50 mm, un ancho de 12,5 mm y un espesor de 6 mm. En este caso también se impone una imperfección geométrica dada por una variación lineal del ancho de la misma con una reducción máxima del 1% en la zona central de la probeta. Al igual que en la probeta cilíndrica esta imperfección permite obtener la localización de la estricción en la zona central durante el ensayo de tracción.

Por razones de simetría en el modelo numérico se ha modelado una octava parte de la probeta. La malla utilizada está formada 1000 elementos hexaédricos refinándose la malla en la zona donde ocurre la estricción. En la Figura 6 se muestra la malla de elementos finitos empleada.

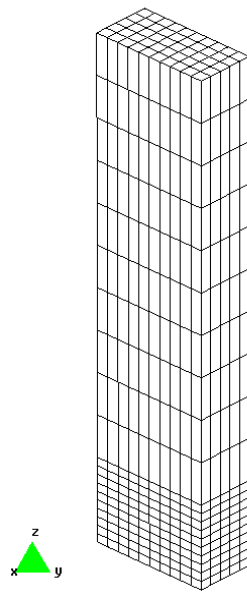


Figura 6: Malla de elementos finitos de la probeta rectangular

Si en la figura anterior se considera sólo un plano longitudinal yz para la coordenada $x=0$ por ejemplo se obtiene una malla de 200 elementos.

Para satisfacer condiciones de simetría se impiden los desplazamientos u_y en el plano xz (en la coordenada $y=0$) y u_x en el plano yz (en la coordenada $x=0$). Además para simular el ensayo de tracción simple se aplican desplazamientos verticales u_z en la cara superior hasta alcanzar un valor de 5 mm.

La Figura 7 presenta los contornos de deformación plástica efectiva superpuestos a la geometría deformada para la malla empleada en este trabajo.

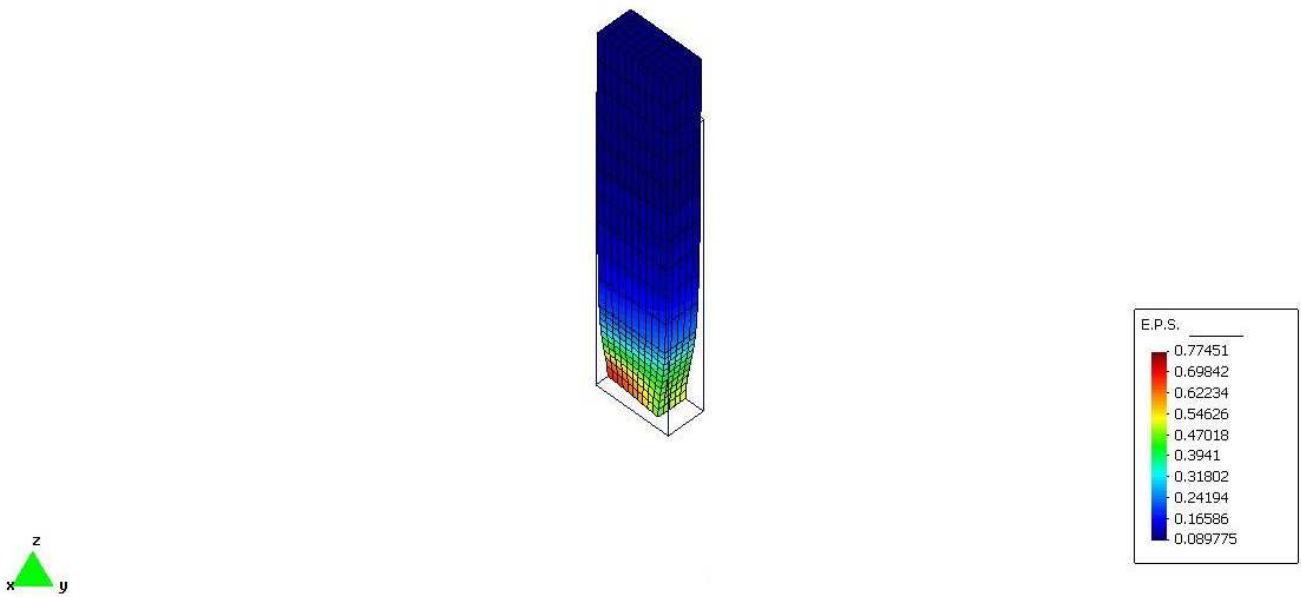


Figura 7: Configuración deformada y contornos de ϵ^p para $u_z = 5$ mm

En la Figura 8 se muestra la evolución de la estricción en la zona del cuello. En la mencionada figura se grafican las relaciones de espesor t y ancho w para un determinado valor de carga respecto a los valores iniciales t_0 y w_0 en función de la deformación ingenieril $\Delta l/l_0$ para la malla empleada en este trabajo. Estos resultados son comparados con resultados numéricos obtenidos por Cabezas y Celentano (2004) para una malla 3D con 3440 elementos isoparamétricos de ocho nodos empleando una formulación lagrangiana total. También se grafican los resultados experimentales obtenidos por los mencionadas autores. En la Figura 9 se observa que los resultados obtenidos en este trabajo tienen una respuesta similar a los resultados obtenidos por Cabezas y Celentano (2004) tanto en forma numérica como experimental.

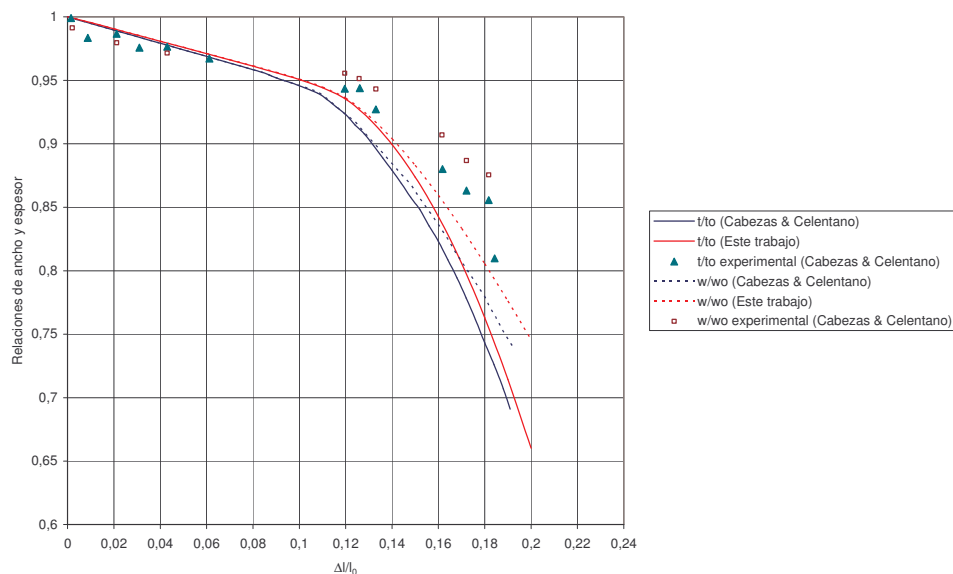


Figura 8: Evolución de la estricción en la probeta rectangular

En la Figura 9 se grafica como evoluciona la carga axial P graficada en función de la

deformación logarítmica en el cuello ϵ_z siendo igual a $\ln(A_0/A)$ para probetas rectangulares.

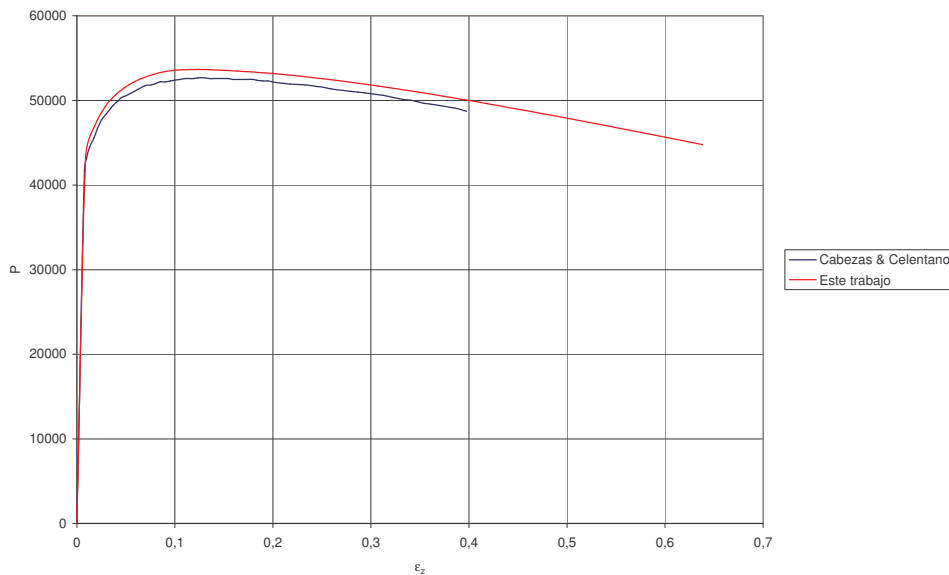


Figura 9: Carga axial P en función de la deformación logarítmica en el cuello ϵ_z

Puede observarse en las dos curvas anteriores que a pesar de que se utilizan relativamente pocos elementos en la malla empleada en este trabajo se ha obtenido una buena correlación con los valores numéricos y experimentales tomados como valores de referencia.

4 CONCLUSIONES

Se ha presentado la simulación numérica del ensayo de tracción simple de probetas cilíndricas de aluminio y rectangulares de acero. Se ha obtenido la evolución de distintos parámetros característicos del ensayo desde el inicio de aplicación de carga, hasta estados de equilibrio en los cuales se pone de manifiesto la estricción de la zona media de la probeta ensayada, con marcadas deformaciones finitas y desarrollo de plasticidad.

Se ha utilizado un código de elementos finitos tridimensionales previamente desarrollado por los autores, denominado SOGDE3D, en el que se ha introducido una ley de endurecimiento de tipo potencial para la tensión de fluencia.

Para las probetas cilíndricas y rectangulares analizadas, se obtuvieron curvas para la relación de estricción frente al alargamiento de la probeta y para la carga aplicada frente a la deformación logarítmica en el cuello. Además para las probetas cilíndricas se obtuvieron curvas de tensión axial promedio frente a la deformación logarítmica en el cuello.

La comparación de los resultados obtenidos para probetas cilíndricas de aluminio, muestra que existe una muy buena correlación entre las dos mallas de elementos tridimensionales utilizadas en este trabajo, con los resultados disponibles en la literatura. Además, los valores de tensiones en el cuello obtenidos en el presente trabajo se ajustan muy bien con los valores experimentales reportados por Goicolea (1985).

En el caso de probetas rectangulares de acero, los resultados obtenidos en el presente trabajo tienen una muy buena correlación con los resultados numéricos y experimentales reportados por Cabezas y Celentano (2004). En la evolución de la estricción, medida con las relaciones de espesor t y ancho w respecto a los valores iniciales t_0 y w_0 , en función de la deformación ingenieril $\Delta l/l_0$, se observa una diferencia con los resultados numéricos obtenidos por Cabezas y Celentano (2004) que se atribuye a la diferencia de las

formulaciones empleadas en ambos trabajos. Aún así el ajuste con los valores experimentales es muy bueno.

Así resulta posible asegurar que el código de elementos finitos implementado será de utilidad para la adecuada caracterización de ecuaciones constitutivas de tipo J2 en régimen de grandes deformaciones.

5 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero recibido de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT), mediante el Proyecto PICTR 184. El primer autor también agradece la beca doctoral de CONICET.

REFERENCIAS

- Bridgman, P., The stress distribution at the neck of a tensile specimen. *Transactions of the American Society of Metals*, 32:553–574, 1944.
- Cabezas, E.E., and Celentano, D.J., Experimental and numerical analysis of the tensile test using sheet specimens. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:555–575, 2004.
- Careglio, C., García Garino, C., y Mirasso, A., SOGDE3D: Código de elastoplasticidad con grandes deformaciones 3D. *Mecánica Computacional*, XXIV:363-373, ISSN 1666-6070, AMCA, 2005.
- Chen, W. H., Necking of a bar. *International Journal of Solids and Structures*, 7:685-717, 1971.
- García Garino, C., Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. *PhD. Thesis*, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Catalunya, 1993.
- García Garino, C., y Oliver, J., Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones: Parte i formulación teórica y aplicación a metales. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 11-No.1: 105-122, 1995.
- García Garino, C., y Oliver, J., Un modelo constitutivo para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones: Parte ii implementación numérica y ejemplos de aplicación. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 12-No.2: 147-169, 1996.
- García Garino, C., Goicolea, J. M., y Gabaldón, F., Simulación numérica del ensayo de tracción simple. *Mecánica Computacional*, XVII:425–436, AMCA, 1996.
- García Garino, C., Gabaldón, F., Goicolea, J. M., Mirasso, A., y Raichman, S., Simulación computacional del ensayo de tracción simple con estricción. Informe Técnico, Proyecto PICT 12-03268, FONCyT, ANPCyT, 2004. Disponible en <http://filemon.mecanica.upm.es/papers/informe-hyper.pdf>
- García Garino, C., Gabaldón, F., and Goicolea, J. M., Finite element simulation of the simple tension test in metals. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42:1187–1197, 2006.
- Davidenkov, N., and Spiridonova, N., Analysis of the state of stress in the neck of a tension test specimen. *Proceedings of American Society of Testing Materials*, 46:1147–1158, 1946.
- Goicolea, J., Numerical modelling in large strain plasticity with application to tube collapse analysis. *PhD. Thesis*, University of London, 1985.
- Goicolea, J.M., Gabaldón, F., y García Garino, C., Interpretación de la estricción en el ensayo de tracción empleando modelos hipoeelásticos e hiperelásticos. *Métodos Numéricos en Ingeniería*, M. Doblare et al. (Editores), SEMNI, 875-885, 1996.
- Hallquist, J., User's Manual for DYNA2D - An explicit two-dimensional hydrodynamic finite

- element code with interactive rezoning. Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, *Technical Report UCID-18756*, Rev.1, 1982.
- Stainier, L., Careglio, C., García Garino, C., and Mirasso, A., Comparative study of constitutive and finite element formulations for large strain elastoplasticity. *Mecánica Computacional*, XXV: 2033-2060, ISSN 1666-6070, AMCA, 2006.
- Needleman, A., A numerical study of necking in circular cylindrical bars. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, 20:111–127, 1972.
- Norris, D., Moran, B., Scudder, J., and Quiñones, D., A computer simulation of the tension test. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, 26:1–19, 1978.
- Ponthot, J., Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par le méthode des éléments finis. *PhD. Thesis*, Universidad de Lieja, Bélgica, 1994.
- Simó, J.C., A framework for finite strains elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part I: Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66:199–219, 1988a.
- Simó, J.C., A framework for finite strains elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part II: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68:1-31, 1988b.
- Simó, J.C., and Armero, F., Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 110:359–386, 1993.
- Wilkins, M., Third progress report of light armor program. Technical Report, Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, *rept. UCRL-50460*, 1968.
- Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L., *The finite element method*, volumes I y II. McGraw Hill, 1991.