

## APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA HOMOGENIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DE MATERIAIS COMPOSTOS

**Gilson Paz Soares<sup>a</sup>, Ignacio Iturrioz<sup>a</sup>, Adrian Cisilino<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite 425, Cidade Baixa, Porto Alegre, Brasil, [gilsonfps@yahoo.com.br](mailto:gilsonfps@yahoo.com.br), [ignacio@mecanica.ufrgs.br](mailto:ignacio@mecanica.ufrgs.br)*

<sup>b</sup>*División Soldadura y Fractomecánica, INTEMA, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, CONICET, Av. Juan B. Justo 4302 (7600) Mar del Plata, Argentina, [cisilino@fi.mdp.edu.ar](mailto:cisilino@fi.mdp.edu.ar)*

**Palavras Chave:** Homogeneização, compostos particulados, elemento de volume representativo, método dos elementos finitos.

**Resumo.** A mecânica computacional é uma importante ferramenta para a pesquisa minuciosa do comportamento de materiais micro-heterogêneos, como mostra a extensiva bibliografia existente sobre o tema. Para efetivar este estudo, o primeiro passo foi realizar a homogeneização de suas propriedades mecânicas. No caso de compostos particulados, onde uma das fases tem uma distribuição aleatória, torna-se indispensável a definição do mínimo domínio de composto sobre o qual é possível calcular propriedades do composto homogeneizadas que representem o comportamento macro do mesmo. Este domínio é chamado de Elemento de Volume Representativo (EVR) e, para sua determinação, calculam-se as propriedades globais do composto considerando volumes de controle sucessivos. É considerado EVR o menor volume a partir do qual as propriedades analisadas apresentam um valor invariante com o volume de controle. Neste trabalho são aplicadas técnicas de homogeneização para determinar o EVR de um material bifásico particulado, onde a matriz é constituída de polimetilmetacrilato (PMMA) e a segunda fase representada por inclusões esféricas de material elástico linear similar à uma borracha, utilizando o Método dos Elementos Finitos (FEM). O critério utilizado para a determinação do EVR é a convergência dos valores do módulo de compressibilidade e do módulo de elasticidade transversal em relação ao tamanho da amostra. As análises de convergência são realizadas no regime linear elástico. Como a distribuição das partículas é aleatória, foi definido um valor médio e o desvio das propriedades a partir dos resultados obtidos para seis simulações. Os valores obtidos são comparados ainda com limites obtidos de desenvolvimentos teóricos clássicos da Micro-mecânica. Finalmente é estudada a variação do EVR em função da fração de volume de partículas do composto.

## 1 INTRODUÇÃO

O grande avanço nos estudos da engenharia e da ciência dos materiais tem proporcionado o projeto de produtos cada vez mais eficazes e seguros. Exemplo disto é a crescente utilização de polímeros e materiais compostos de matriz polimérica em aplicações de alta precisão na engenharia. No âmbito regional destacam-se o polipropileno (PP) e o polimetilmetacrilato (PMMA), conforme se pode observar nos sites da Câmara Argentina de la Industria del Plástica (<http://www.caip.org.ar>) e da Associação Brasileira da Indústria do Plástica (<http://abiplast.org.br>), que possuem propriedades que permitem o seu uso em um grande número de aplicações. Quando se mistura o material empregado como matriz com uma segunda fase é possível modificar as propriedades mecânicas do conjunto. O comportamento elástico linear será caracterizado pelo valor das constantes elásticas do material composto homogeneizado, que são duas se o material composto resultante é isótropo. O comportamento mecânico não linear também pode ser modificado sensivelmente com a incorporação de uma segunda fase. Neste caso as interações são mais complexas e permitem modificar a tenacidade do material criando novos micromecanismos de ruptura que podem modificar de forma acentuada o comportamento global do composto estudado. Como um exemplo disto pode-se citar a interação entre polímeros e partículas nanométricas de borracha apresentados em [Argon y Cohen \(2003\)](#). Neste contexto, o modelamento numérico computacional é uma importante ferramenta para a pesquisa minuciosa do comportamento de materiais micro-heterogêneos. Para que a mecânica computacional possa então determinar a relação entre a micro-estrutura e a propriedade estrutural do material (macro-estrutura) faz-se necessário realizar a homogeneização computacional. Tal homogeneização é uma técnica de multi-escala que consiste em achar a resposta constitutiva macroscópica a partir do comportamento da micro-estrutura subjacente através da construção e solução de um problema de valores de contorno para a micro-estrutura.

Diante do que foi exposto, o presente trabalho tem por objetivo aplicar as técnicas de homogeneização apresentadas em [Suquet \(1985\)](#) e [Zohdi \(2002\)](#) para determinar o elemento de volume representativo (EVR) de um material bifásico particulado onde a matriz é constituída de PMMA e a segunda fase representada por inclusões esféricas de borracha com uma distribuição aleatória. O parâmetro de análise é a convergência dos valores das constantes elásticas  $K$  (módulo de compressibilidade) e  $\mu$  (módulo de elasticidade transversal). O estudo foi realizado utilizando-se o Método dos Elementos Finitos (FEM). O material composto resultante foi considerado elástico linear e isótropo. Foram utilizadas 6 configurações aleatórias para caracterizar o composto com o valor médio e desvio da propriedade elástica estudada. Como os estudos de convergência foram realizados no sistema elástico linear, os resultados foram comparados com limites obtidos de desenvolvimentos teóricos clássicos da Micro-mecânica que podem ser encontrados em [Zohdi \(2002\)](#), [Gross and Seelig \(2006\)](#) e [Böhm \(1998\)](#) entre outros. Após esta breve introdução, se apresenta a seguir a caracterização do modelo, os procedimentos para determinação do EVR, os modelos analíticos utilizados para comparações, os resultados obtidos e as conclusões tomadas.

## 2 CARACTERIZAÇÃO DO MODELO

A micro-estrutura estudada é um material composto formado por uma matriz cúbica elástica de PMMA com inclusões esféricas de borracha. O cubo possui módulos de elasticidade de Young  $E = 3240\text{MPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$  enquanto as esferas  $\nu = 0,40$  e  $E = 40\text{MPa}$ . Como uma primeira aproximação se considerou as esferas de

borracha de material elástico linear. O raio das inclusões foi mantido constante em  $r = 22,8 \times 10^{-6} \text{ m}$  e o tamanho da matriz cúbica variável à medida que nela eram adicionados nódulos de forma a manter constante a fração volumétrica de inclusões em relação ao volume da matriz. A distribuição das posições das esferas na matriz foi dada de forma aleatória fixando a distância mínima entre as partículas e a distância delas às bordas externas da matriz. Mais detalhes sobre a geração aleatória da distribuição das partículas podem ser encontrados em [Ortiz et al \(2001\)](#). A implementação da distribuição espacial aleatória das partículas foi feita em Matlab. O sistema foi modelado com uso do software comercial de elementos finitos ABAQUS considerando o material elástico linear. A malha utilizada foi a tetraédrica e foi considerada uma união perfeita na interface partícula/matriz sem permitir o despegue entre elas. Anterior ao procedimento de determinação do EVR, foi realizado um estudo de convergência para determinar a discretização a ser empregada nos estudos a serem realizados. Para realizar este estudo foi considerada a configuração apresentada na [Figura 1](#), onde se observa um corpo de prova cúbico com um arranjo de 3 inclusões esféricas localizadas na parte central do cubo afastadas entre si a distancia mínima de separação permitida nas gerações aleatórias de partículas que são utilizadas nas simulações posteriores. As malhas foram confeccionadas de forma que as regiões da matriz próximas aos nódulos possuam o mesmo refinamento destes, caracterizando uma interface com discretização mais densa em relação à periferia da matriz na relação 2/1, como se pode observar na [Figura 2](#) em que são apresentadas algumas discretizações estudadas. As discretizações analisadas podem ser observadas na [Tabela 1](#). Foi aplicado um deslocamento prescrito uniforme nas seis faces do cubo e as variáveis analisadas para comparação dos resultados das diferentes malhas foram: a energia elástica total ( $U_T$ ) e a tensão de Von Mises ( $\sigma_{VM}$ ). O resultado pode ser observado na [Figura 3](#) adiante, onde  $\sigma_{VM}'$  é a tensão de Von Mises na malha 6 e  $U_T'$  é a energia elástica total na malha 6. Optou-se pelo emprego da malha identificada com o número 4 (27276 elementos para três nódulos) para o estudo do EVR.

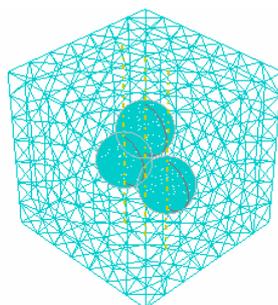


Figura 1: Configuração geométrica utilizada para determinar a malha a ser empregada nos estudos.

Malha	Nº. elem. na matriz	Nº. elem. por nódulo	Número total de elem.
1	498	59	675
2	3147	557	4818
3	12096	2231	18789
4	17070	3402	27276
5	38060	6394	57242
6	81282	13195	120867

Tabela 1: Características das malhas modeladas identificando o número de elementos.

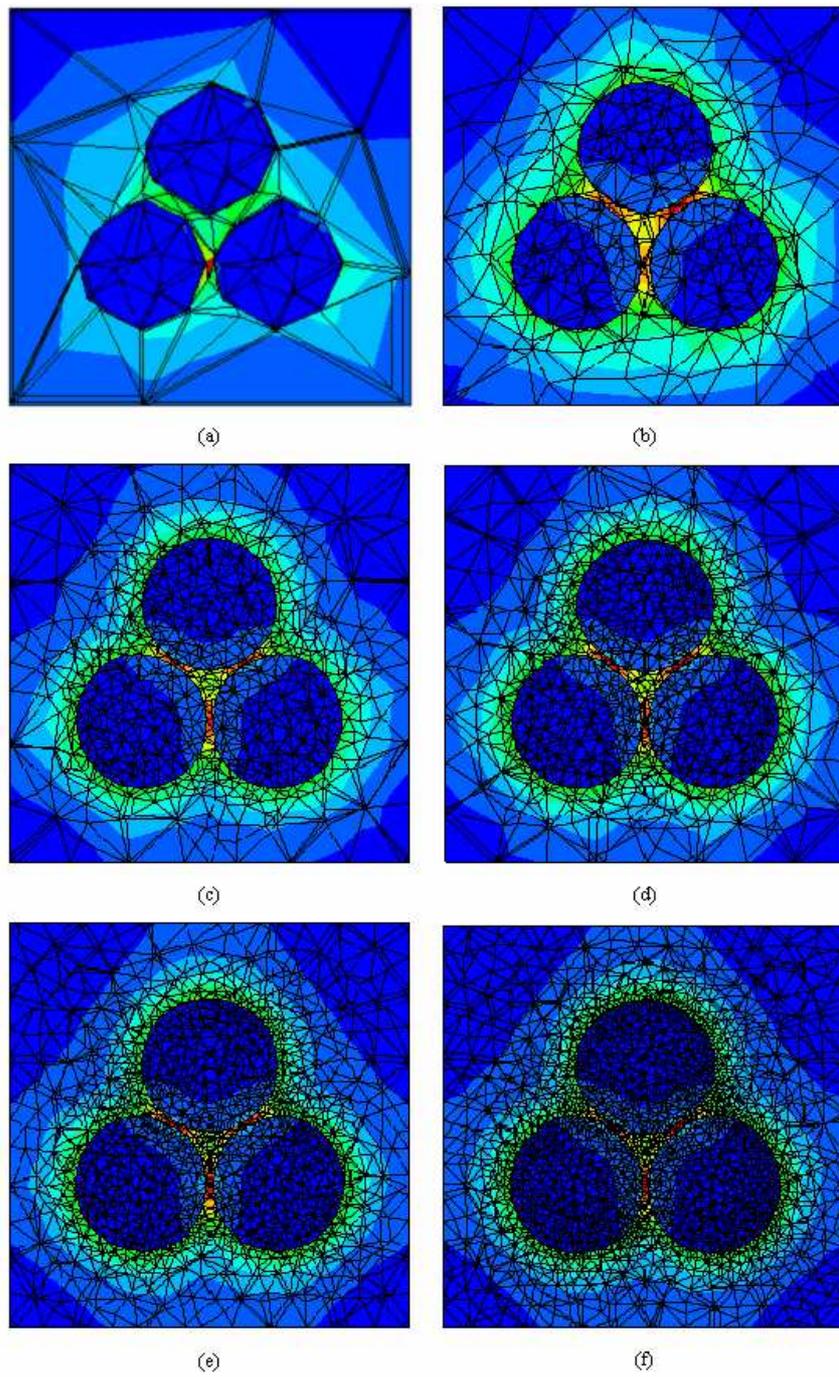


Figura 2: Cortes centrais em  $z$  mostrando a distribuição de tensões nas malhas estudadas: (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3; (d) Malha 4; (e) Malha 5 e (f) Malha 6.

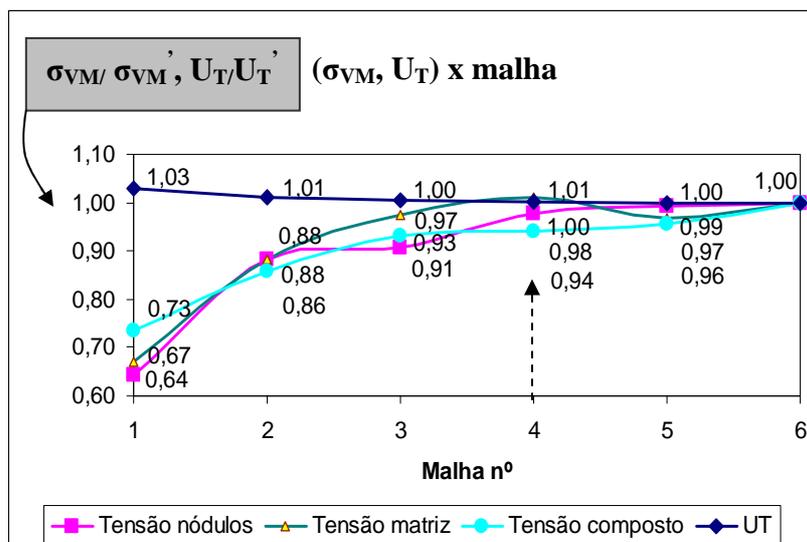


Figura 3: Gráfico mostrando a convergência em termos dos valores da tensão de Von Mises média dos 3 nódulos, da tensão de Von Mises na matriz, da tensão de Von Mises no composto e da energia elástica total (U<sub>T</sub>).

### 3 DETERMINAÇÃO DO ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO

Um elemento de volume representativo (EVR) é uma amostra suficientemente pequena para ser considerada como um ponto material do domínio analisado, mas suficientemente grande para conter uma mostra estatisticamente representativa da microestrutura (ver Figura 4).

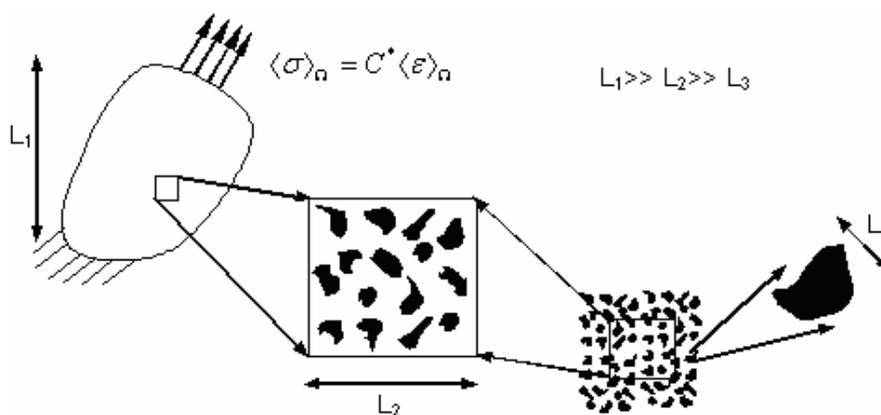


Figura 4: Esquema exemplificando um EVR de volume  $V = L_2^3$

Não há um procedimento padronizado para determinar em forma direta as dimensões e número de heterogeneidades de um EVR. Por isso suas dimensões são calculadas em cada caso de forma numérica através do sucessivo incremento do volume da amostra. O tamanho de amostra representativo será aquele que proporcione uma resposta macroscópica invariante (calculada como relação entre médias) para distintas distribuições das partículas. Um critério comumente aceito para realizar o cálculo de propriedades efetivas e definir o EVR é a condição de Hill, que pode ser encontrada em Zohdi (2002):

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle_{\Omega} = \langle \sigma \rangle_{\Omega} : \langle \varepsilon \rangle_{\Omega} \quad (1)$$

com a relação entre médias da forma

$$\langle \sigma \rangle_{\Omega} = C^* \langle \varepsilon \rangle_{\Omega} \quad (2)$$

onde  $\sigma$  e  $\varepsilon$  são os tensores de tensão e deformação respectivamente,  $C^*$  é a matriz com as constantes elásticas do material e  $\Omega$  o volume de controle (EVR). Nas expressões (1) e (2), e nas seguintes, onde houver, o símbolo  $\langle . \rangle$  indica o cálculo do valor médio da magnitude indicada calculada componente a componente. Há dois importantes estados de carga que satisfazem a condição de Hill, a saber: os teoremas da deformação média e da tensão média. No primeiro caso a amostra é submetida a uma aplicação linear de deslocamentos da forma

$$u|_{\partial\Omega} = \varepsilon \cdot x \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle_{\Omega} = \varepsilon. \quad (3)$$

enquanto que no segundo são aplicadas trações constantes no contorno, na forma

$$t|_{\partial\Omega} = \zeta \cdot n \Rightarrow \langle \sigma \rangle_{\Omega} = \zeta. \quad (4)$$

onde  $\varepsilon$  e  $\zeta$  são tensores constantes de deformação e tensão respectivamente. Cabe salientar que, no caso de ser possível acontecer descolamento na interface matriz/nódulos, não é possível aplicar o teorema da deformação média, ou seja, que neste caso não podemos aplicar deslocamentos prescritos. Como a distribuição das partículas é aleatória, aplicar tensões prescritas pode ser não trivial. Visto que nos estudos em questão não é previsto despegue entre matriz e partículas, aplicou-se deslocamentos prescritos como condições de contorno externas. A Figura 5 mostra um modelo utilizado neste estudo, em que são aplicados deslocamentos prescritos iguais nas direções 1 e 2. Na direção 3 não há restrição ao deslocamento.

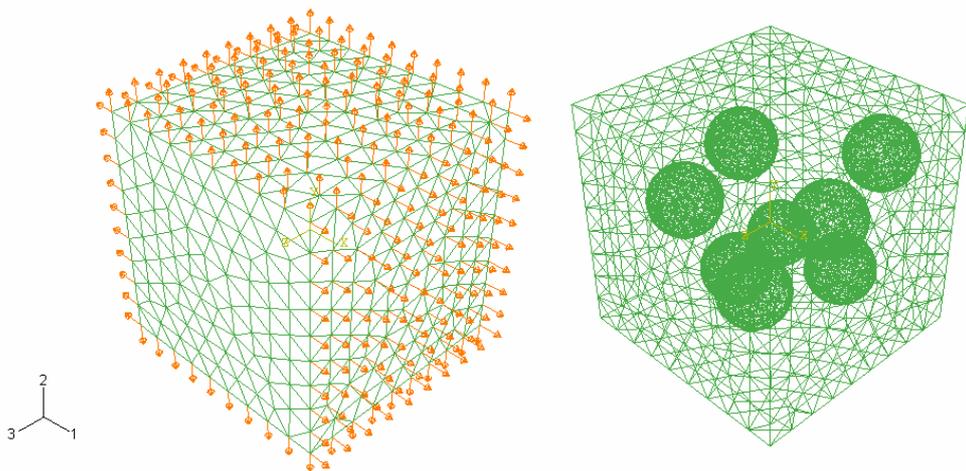


Figura 5: Esquema mostrando malha, condições de contorno e distribuição aleatória de 8 nódulos esféricos de uma amostra.

Como indica Zohdi 2002 para determinação da matriz constitutiva homogeneizada  $C^*$  há, em princípio, seis tipos de deformação:

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Isso tornaria necessária a resolução das equações (3) para os seis casos. No entanto, como está se assumindo um material isótropo, Malvern (1968) mostra que se pode aplicar apenas um tipo de carregamento para caracterizar a resposta do material, desde que esse carregamento contenha componentes dilatacionais  $(\frac{tr \sigma}{3} \text{ e } \frac{tr \varepsilon}{3})$  e desviadoras  $(\sigma' = \sigma - \frac{tr \sigma}{3} I \text{ e } \varepsilon' = \varepsilon - \frac{tr \varepsilon}{3} I)$  não nulas, sendo I a matriz identidade. Desta forma as constantes elásticas podem ser obtidas através das equações

$$3K^* = \frac{\langle \frac{tr \sigma}{3} \rangle_{\Omega}}{\langle \frac{tr \varepsilon}{3} \rangle_{\Omega}} \quad e \quad 2\mu^* = \sqrt{\frac{\langle \sigma' \rangle_{\Omega} : \langle \sigma' \rangle_{\Omega}}{\langle \varepsilon' \rangle_{\Omega} : \langle \varepsilon' \rangle_{\Omega}}}. \quad (6)$$

Os valores da expressão (6) são calculados pós-processando os resultados obtidos pela análise de elementos finitos. O processo para determinação do elemento de volume representativo (EVR), consiste em analisar amostras da micro-estrutura do material com diferentes quantidades de micro-heterogeneidades (no presente caso, nódulos esféricos), observando seu comportamento. O tamanho do EVR será o da amostra que contém o número mínimo de partículas em que a resposta do material se mantém constante. Neste estudo foram analisados cinco tamanhos de amostras contendo 2, 4, 8, 16 e 20 nódulos. Para cada um desses casos foram estudadas seis configurações com posições aleatórias das esferas e considerada a média e dispersão dos resultados  $(K^*, \mu^*)$  em cada caso. Para se chegar ao EVR foi analisado o comportamento destas constantes elásticas diante do incremento do número de nódulos inseridos na matriz. De posse da amostra considerada como elemento de volume representativo, seus resultados foram comparados com modelos analíticos da bibliografia para diferentes frações de volume de nódulos em relação ao volume da amostra.

## 4 APROXIMAÇÕES ANALÍTICAS

São apresentadas na continuação algumas soluções analíticas para as propriedades equivalentes de um material composto particulado, as quais serviram de objeto de comparação nesse trabalho:

### 4.1 Solução de Eshelby

Uma das mais importantes soluções analíticas da micro-mecânica foi apresentada por Eshelby (1957). Ele considerou um domínio com uma inclusão elipsoidal  $\Omega_2$  submetida a uma autodeformação constante e apresentou uma solução para o campo de deformações, da forma:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^i = \text{constante} \quad \text{em } \Omega_2. \quad (7)$$

onde:

$\varepsilon_{ij}$  é o campo de deformação dentro da inclusão;

$\varepsilon_{kl}^t$  é a autodeformação sofrida pela inclusão;

$S_{ijkl}$  é o tensor de Eshelby de 4ª ordem, que depende da geometria da inclusão e do material da matriz.

Eshelby faz uma equivalência entre um material homogêneo com uma inclusão e um material com uma heterogeneidade permitindo definir as propriedades equivalentes de materiais compostos por uma matriz e um elipsóide de outro material.

Assim, é possível nas expressões (8) e (9), obter o tensor constitutivo equivalente de um material heterogêneo com duas fases, para deformação constante e tensão constante aplicada, respectivamente:

$$C^{*(a)} = C_M + c_I (C_I - C_M) : A_I . \quad (8)$$

$$C^{*(b)} = [C_M^{-1} + c_I (C_I^{-1} - C_M^{-1}) : B_I]^{-1} . \quad (9)$$

sendo:

$C_M$  o tensor constitutivo da matriz;

$C_I$  o tensor constitutivo da inclusão;

$c_I$  a fração de volume de inclusões em relação ao volume da amostra.

$A_I$  e  $B_I$  são os tensores de concentração da inclusão para os casos de aplicação de deformação constante e tensão constante, respectivamente. O tensor de concentração de tensão permite achar o valor das respostas médias dentro da partícula ( $\varepsilon_I$  ou  $\sigma_I$ ) em função do estado de carga remoto aplicado ( $\varepsilon_o, \sigma_o$ ), ou seja:

$$\langle \varepsilon_I \rangle = A_I : \langle \varepsilon_o \rangle \quad (10)$$

$$\langle \sigma_I \rangle = B_I : \langle \sigma_o \rangle \quad (11)$$

O problema reside então em determinar esse tensor a ser aplicado nas equações (8) e (9) possibilitando a obtenção do tensor constitutivo equivalente  $C^*$  do material. Para isso, consideram-se os seguintes modelos teóricos disponíveis na bibliografia:

## 4.2 Aproximações de Voigt e Reuss

Voigt (1889) e Reuss (1929), aplicando as condições de contorno das equações (3) e (4), respectivamente, mostraram que os tensores de concentração valem

$$A_I = B_I = I . \quad (12)$$

## 4.3 Modelos DILUTE

Nestes modelos as soluções analíticas são válidas para  $c_I \ll 1$ , ou seja, a interação entre as partículas não é considerada. No caso de inclusões elipsoidais, tem-se:

$$A_I^\infty = [I + S_M : C_M^{-1} : (C_I - C_M)]^{-1} . \quad (13)$$

onde  $S_M$  é o tensor de Eshelby.

Há vários casos resolvidos analiticamente disponíveis na bibliografia, como se encontra em [Nemat-Nasser & Hori \(1999\)](#) entre outros. O índice  $\infty$  na expressão (13) indica que a matriz de concentração para a inclusão é válida considerando uma única inclusão embebida numa matriz infinita.

Existem formas de considerar a influência da interação entre as partículas. Esta situação torna-se relevante quando a concentração de inclusões é importante. Um método clássico para considerar esta interação e o apresentado a seguir:

#### 4.4 Método de Mori-Tanaka

Neste modelo, [Mori-Tanaka \(1973\)](#) determinam que

$$A_I^{MT} = [c_I + c_2(A_I^\infty)^{-1}]^{-1}. \quad (14)$$

onde  $c_2$  é a fração de volume da matriz em relação ao volume da amostra. Conceitualmente, este modelo considera que o que rodeia a inclusão é a matriz e não o meio homogeneizado. Detalhes sobre as deduções apresentadas nesta seção podem ser encontradas em [Gross & Seelig \(2006\)](#).

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As Figuras 6 e 7 mostram a convergência da resposta do material (parâmetros  $K$  e  $\mu$ ) com o incremento do número de nódulos para amostras com volume de nódulos de 10% em relação ao tamanho do modelo.  $K'$  é o valor de  $K$  para 20 nódulos e  $\mu'$  é o valor de  $\mu$  para 20 nódulos. Pode-se notar também a diminuição da dispersão dos resultados, indicada pelas barras de erros nos gráficos. Estes resultados permitem afirmar que no regime linear elástico uma amostra com oito nódulos para uma  $c_I=10\%$  constitui uma amostra representativa da micro-estrutura (EVR) e, portanto, seu comportamento macroscópico é representativo. Observando essas figuras fica claro que após 8 nódulos os gradientes de mudança nos resultados são sensivelmente menores, sobretudo na [Figura 7](#).

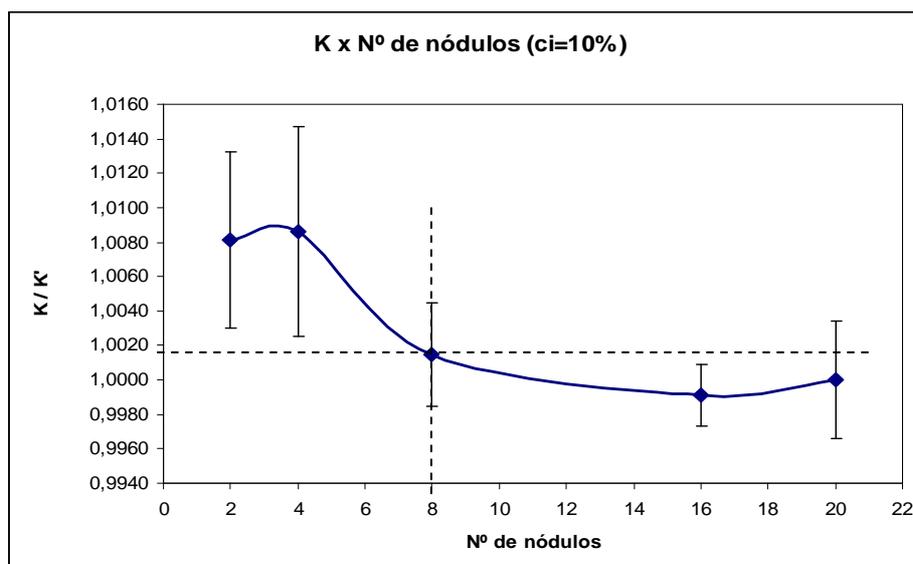


Figura 6: Comportamento do módulo de compressibilidade  $K$  com o incremento do número de nódulos para um volume de nódulos de 10% em relação ao volume da amostra.

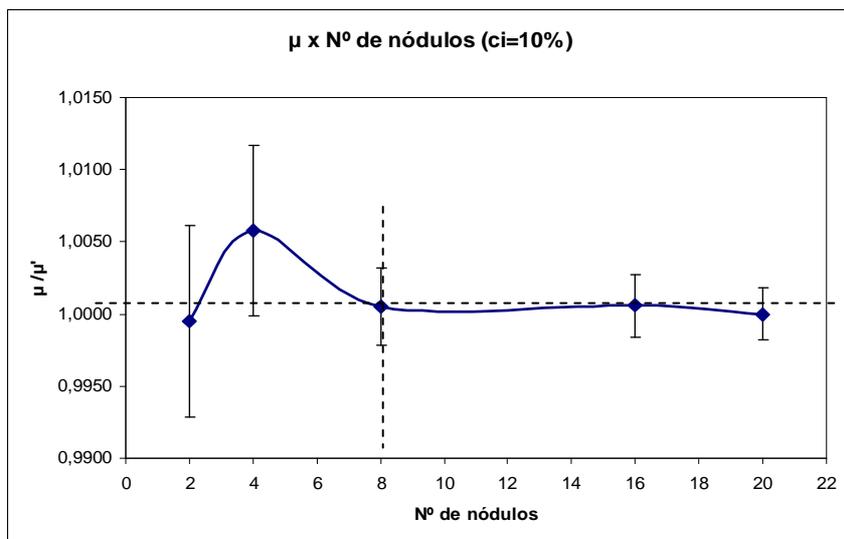


Figura 7: Comportamento do módulo de elasticidade transversal  $\mu$  com o incremento do número de nódulos para um volume de nódulos de 10% em relação ao volume da amostra.

As Figuras 8 e 9 ilustram o comportamento dos módulos  $K$  e  $\mu$  para diferentes frações de volume de nódulos em relação ao tamanho da amostra. Aqui também  $K'$  é o valor de  $K$  para 20 nódulos e  $\mu'$  é o valor de  $\mu$  para 20 nódulos. Pode-se observar que, embora as diferenças entre os valores sejam pequenas, elas diminuem à medida que se acrescentam nódulos na matriz. Mas a velocidade com que se tende ao EVR é menor quando temos menor volume de inclusões (menor  $c_i$ ). Cabe salientar que os valores apresentados são valores médios de 6 configurações aleatórias obtidas para cada um dos casos analisados.

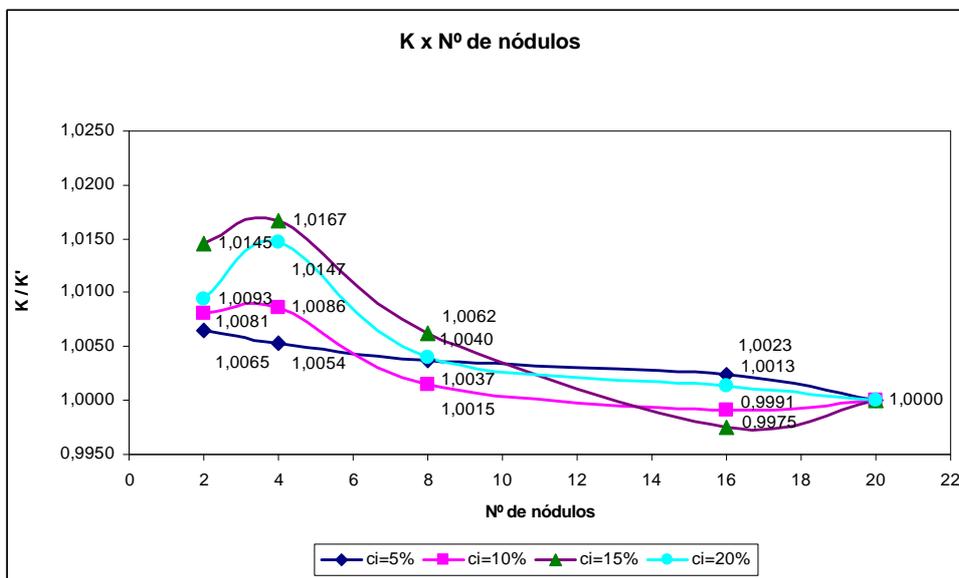


Figura 8: Comportamento do módulo de compressibilidade  $K$  com o incremento do número de nódulos para diferentes frações de volume de nódulos em relação ao volume da amostra.

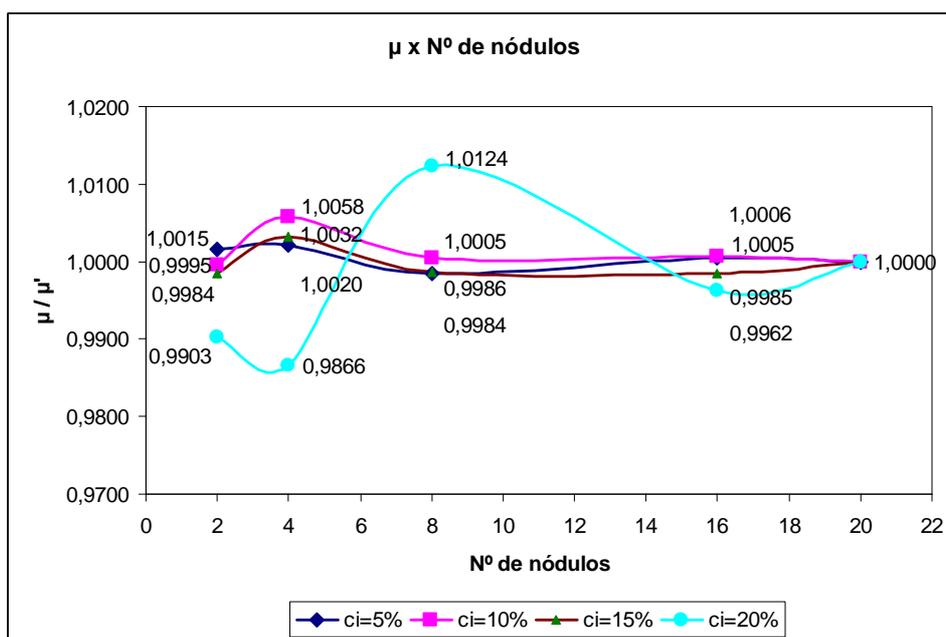


Figura 9: Comportamento do módulo de elasticidade transversal  $\mu$  com o incremento do número de nódulos para diferentes frações de volume de nódulos em relação ao volume da amostra.

As Figuras 10, 11, 12 e 13 apresentam a comparação dos resultados obtidos com elementos finitos (FEM) e com os modelos teóricos Voigt, Reuss, Dilute e Mori-Tanaka para a amostra considerada representativa (8 nódulos) analisando diferentes frações de volume de nódulos em relação ao volume da amostra. Observa-se que em todos os casos os limites de Voigt (superior) e Reuss (inferior) foram respeitados. Na comparação dos modelos em FEM com os modelos Mori-Tanaka e DILUTE pode-se observar uma boa aproximação dos valores, especialmente para as frações de volume de nódulos menores. À medida que se aumentou esta fração de volume os valores do modelo DILUTE tenderam a se afastar dos demais como era de se esperar, já que este método não leva em conta a interação entre inclusões.

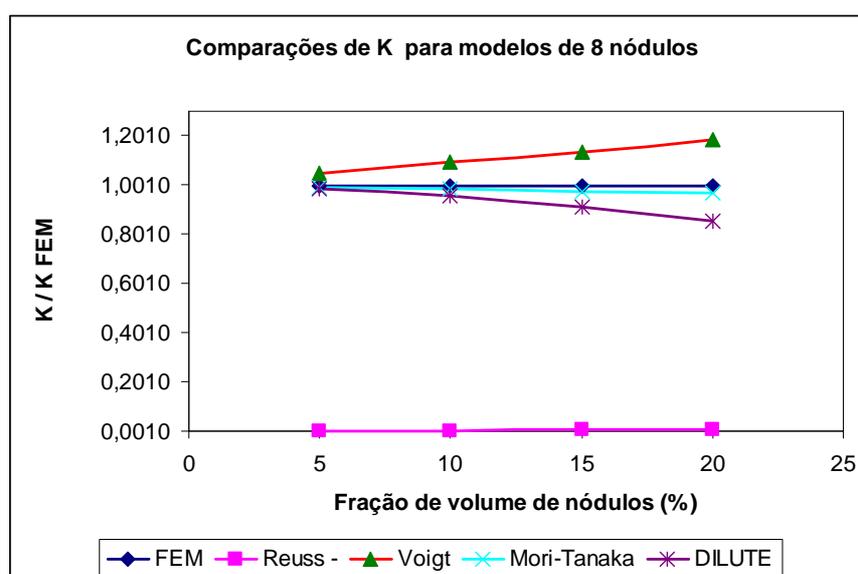


Figura 10: Comparação do módulo de compressibilidade  $K$  obtido por este estudo (FEM) para 8 nódulos com valores teóricos.

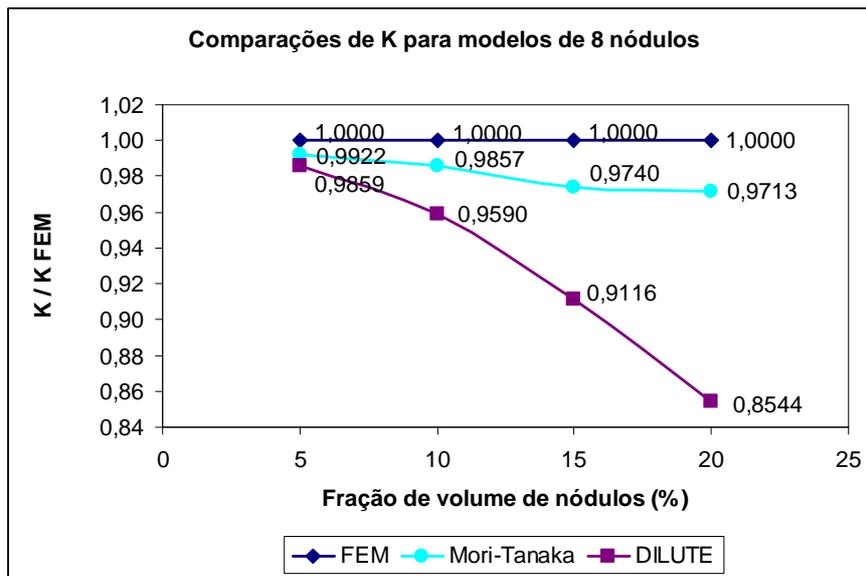


Figura 11: Detalhe sem os limites de Voigt e Reuss da comparação do módulo de compressibilidade  $\mathbf{K}$  obtido por este estudo (FEM) para 8 nódulos com valores teóricos.

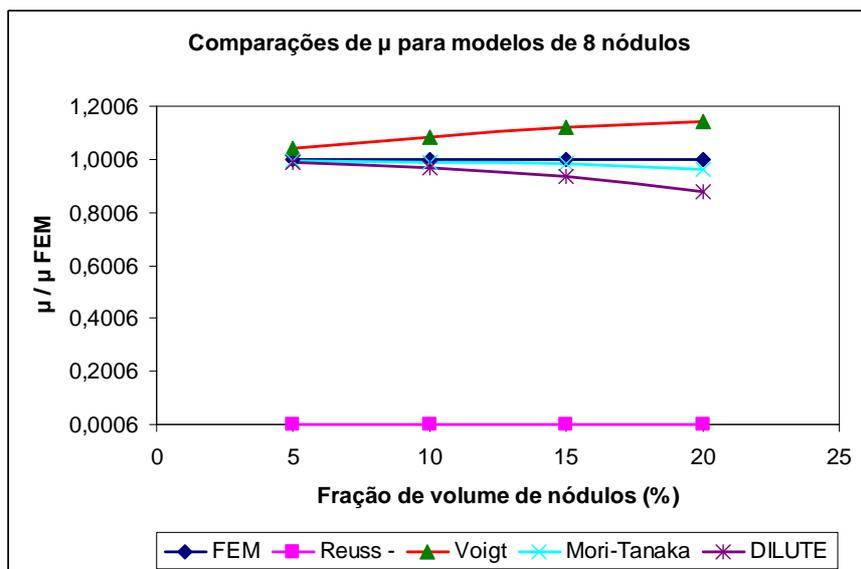


Figura 12: Comparação do módulo de elasticidade transversal  $\mu$  obtido por este estudo (FEM) para 8 nódulos com valores teóricos.

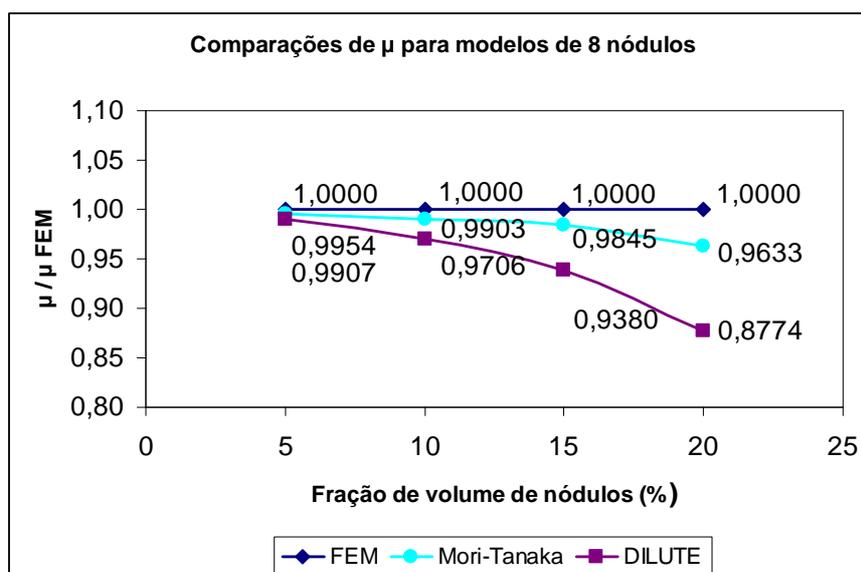


Figura 13: Detalhe sem os limites de Voigt e Reuss da comparação do módulo de elasticidade transversal  $\mu$  obtido por este estudo (FEM) para 8 nódulos com valores teóricos.

## 6 CONCLUSÕES

Foi apresentada neste trabalho uma aplicação do método dos elementos finitos na homogeneização das propriedades mecânicas de um material composto particulado com distribuição aleatória. O estudo foi realizado sobre uma matriz polimérica de PMMA com inclusões esféricas de borracha. O material foi considerado elástico linear e não foi considerado o descolamento entre matriz e nódulos. Os resultados do estudo apontam para as seguintes conclusões:

- O estudo se mostrou adequado para a determinação do EVR, uma vez que, para materiais compostos (matriz com inclusões esféricas) elásticos e isotrópicos, Drugan and Willis (1996) estimaram, com erros menores que 5% e menores que 1% respectivamente, elementos de volume com aproximadamente 2 ou 5 inclusões são suficientes para qualquer volume de fração de nódulos esféricos. Estes mesmos resultados podem ser evidenciados no presente estudo, como se observa nas Figuras 6, 7, 8 e 9, apresentando para dois nódulos um erro menor que 2% para todos os casos estudados. Ainda assim é possível observar que para  $c_I=10\%$  o número de nódulos a partir do qual o gradiente de variação das propriedades diminui consideravelmente é 8. Por isso foi eleito 8 nódulos como EVR.

- As comparações dos resultados obtidos através do FEM com os valores teóricos mostram a observância dos limites de Voigt e Reuss para os dois módulos elásticos analisados, bem como uma boa aproximação dos valores de Mori-Tanaka e DILUTE em relação ao FEM.

Finalmente cabe salientar que a partir dos resultados obtidos será possível estender este estudo do EVR na faixa não linear do comportamento considerando decoesão entre matriz e nódulos e considerando leis não lineares de comportamento para os nódulos e para a interface nódulo matriz.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio da CAPES, órgão de fomento à pesquisa do governo Brasileiro, e o CONICET, órgão de fomento à pesquisa da Argentina.

**REFERÊNCIAS**

- Argon A. S. and Cohen R. E. Toughenability of polymer. *Polyme*, 44:6013-6032, 2003.
- Böhm H.J. *A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics*, CDL-FMD Report 3-1998. Vienna University of Technology, 1998.
- Drugan W.J. and Willis J.R. A Micromechanics-Based Nonlocal Constitutive Equation and estimates of Representative Volume Element Size for Elastic Composites. *J.Mech.Phys.Sol*, 44:497-524, 1996.
- Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241: 376-396, N°. 1226, 1957.
- Gross D. and Seelig T. *Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics*. Springer, 2006.
- Malvern L. *Introduction to the mechanics of a continuous médium*. Prentice Hall, 1968.
- Mori T. and Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions. *Acta. Metall*, 21:571-574, 1973.
- Nemat-Nasser S. and Hori M. *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. North-Holland, 1999.
- Ortiz J.E., Cisilino A.P., and Otegui J.L. Effect of Microcracking on the Micromechanics of Fatigue Crack Growth in Austempered Ductile Iron. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 24/9:591-606, 2001.
- Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Z. angew. Math. Mech*, 9:49-58, 1929.
- Suquet P. M. Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity, Plasticity today: modelling, methods and applications, In Sawczuk A. and Bianchi G. editors, *Elsevier Applied Science Publishers*, 279–310, 1985.
- Voigt W. Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper. *Wied. Ann*, 38:573-587, 1889.
- Zohdi T. I. *Computational modeling and design of new random microheterogeneous materials*, CISM Course Notes, 2002.