

## ENDURECIMIENTO A TRAVES DE SUPERFICIES CON CAPA DEPENDIENTES DEL GRADO DE PRESTACION DEL HORMIGON

Paula C. Folino<sup>a</sup>, Guillermo Etse<sup>a</sup>

<sup>a</sup> LMNI - Laboratorio de Métodos Numéricos en Ingeniería- Laboratorio de Materiales y Estructuras -  
Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires - Las Heras 2214 (C1127AAR) -  
Buenos Aires – Argentina - [pfolino@fi.uba.ar](mailto:pfolino@fi.uba.ar); [getse@herrera.unt.edu.ar](mailto:getse@herrera.unt.edu.ar)

**Palabras Clave:** Hormigón de Alta Resistencia, parámetro de prestación, ecuación constitutiva, plasticidad con capa, endurecimiento.

**Resumen:** En este trabajo se propone una función de endurecimiento no uniforme representado por sucesivas superficies de fluencia con capa, en el marco de una formulación constitutiva no lineal para la predicción del comportamiento mecánico tanto de hormigones de resistencia normal (NSC) como de hormigones de alta resistencia (HSC).

Se utiliza como superficie de máxima resistencia el criterio de falla propuesto por los autores en trabajos anteriores, dependiente del parámetro de prestación, del primer invariante de tensiones, del segundo y tercer invariantes de tensiones deviatoricas, y de tres parámetros materiales del hormigón. La consideración del parámetro de prestación permite tener en cuenta la influencia de la calidad del hormigón en el valor de la máxima resistencia.

En esta propuesta, las sucesivas superficies de carga poseen una capa o capuchón. Los meridianos tienen forma elíptica, manteniéndose una continuidad de tipo C1, y cerrándose sobre el semieje negativo del primer invariante de tensiones. Esto permite interpretar mejor el comportamiento del hormigón frente a alto confinamiento. Al igual que la superficie de máxima resistencia, dependen del parámetro de prestación del hormigón, por lo que son válidas para distintas calidades de hormigón. Se incluye en particular la justificación y formulación de estas superficies, la definición del parámetro de endurecimiento correspondiente, y la extensión de las mismas, planteadas para el meridiano de compresión, a otros meridianos caracterizados con distintos ángulos de Lode.

La función de endurecimiento que se presenta es sólo un aspecto de una formulación constitutiva actualmente en desarrollo, que se basará en la teoría de la elasto-plasticidad con flujo no asociado y en la teoría de la fisura difusa pero con una formulación del ablandamiento basado en la energía de fractura.

## 1 INTRODUCCION

En este trabajo se presenta una función de endurecimiento no uniforme para hormigones de distintas prestaciones en el marco de la teoría de la elastoplasticidad, constituida por sucesivas superficies de carga cerradas sobre el semieje negativo hidrostático de presiones, con un parámetro de endurecimiento que no varía entre 0 y 1, sino que puede variar desde un valor mínimo hasta un valor mayor cualquiera. Los meridianos de estas superficies están formados por curvas elípticas tangentes a la superficie de máxima resistencia. Ambas superficies dependen del parámetro de prestación, del primer invariante de tensiones, del segundo y tercer invariantes de tensiones deviatoricas, y de tres parámetros materiales del hormigón. Esta propuesta logra interpretar el fenómeno de compactación volumétrica creciente con el nivel de confinamiento manteniéndose una continuidad del tipo  $C^1$ .

La superficie de máxima resistencia en la que se basa, es dependiente del índice de prestación del hormigón y fue desarrollada previamente por los autores. Por lo tanto la superficie de máxima resistencia y la ley de endurecimiento, son válidas para hormigones de distintas calidades, desde hormigones de resistencia normal (NSC - *Normal Strength Concretes*) hasta hormigones de alta resistencia (HSC - *High Strength Concretes*). (Folino et al., 2008).

El trabajo incluye la justificación de la utilización de superficies de carga cerradas con una capa o capuchón frente al empleo de superficies de carga abiertas, un breve resumen de la superficie de máxima resistencia dependiente del grado de prestación, el planteo de la curva inicial del endurecimiento, el planteo de las sucesivas superficies de carga con la correspondiente definición del parámetro de endurecimiento adoptado, y su extensión a los distintos meridianos posibles de carga.

## 2 POR QUÉ SUPERFICIES DE CARGA CON CAPA (O CAPUCHON)?

Para responder esta pregunta, es necesario remarcar algunos aspectos del comportamiento mecánico del hormigón frente a compresión, sin y con confinamiento.

Si se analiza el comportamiento de una probeta de hormigón sometida a compresión uniaxial, se observa que hasta alcanzar el pico, se presentan básicamente dos zonas bien diferenciadas: una zona prácticamente lineal en el que las deformaciones pueden considerarse elásticas, y una zona con deformaciones plásticas o irrecuperables en la que se distinguen a su vez dos comportamientos diferentes como se explica más abajo.

La zona inicial proporcional está regida por el módulo de elasticidad tangente inicial, el cual, dado que el hormigón es un material compuesto, dependerá no sólo de los módulos de elasticidad de la pasta y de los agregados, sino también de las propiedades de la interface pasta-agregado, la cual puede considerarse como un tercer material. Desde el fraguado, el hormigón presenta un estado de microfisuración interna, debido a la concentración de tensiones que se generan por contracción de secado y por temperatura en el proceso de hidratación del cemento. Estas microfisuras hacen que el diagrama tensión-deformación sea en realidad curvo desde prácticamente el inicio del ensayo, aunque en general se considera recto, identificándose un rango elástico lineal, en el que estas microfisuras no se propagan, o sea que se mantienen prácticamente estáticas.

A un cierto nivel de carga, estas fisuras empiezan a propagarse y el diagrama tensión-deformación se curva ya mucho más evidentemente. Nuevamente, en esta zona curva pueden distinguirse básicamente dos etapas: la primera, en la que las microfisuras comienzan a avanzar y a conectarse entre sí pero de manera aproximadamente estable. Luego, este avance de las fisuras se vuelve inestable llegándose finalmente al pico, luego del cual se produce un

pronunciado “ablandamiento” del material con localización de la falla.

Si en el ensayo uniaxial descrito, se evalúan las deformaciones volumétricas, se observa que las distintas fases de comportamiento descritas, se corresponden con diferentes leyes de variación de las deformaciones volumétricas. Hay una primera etapa de compactación volumétrica creciente prácticamente lineal; luego, una segunda etapa en la cual las deformaciones volumétricas empiezan a disminuir gradualmente y no linealmente hasta llegar a ser nulas cuando la tensión se aproxima a la tensión pico; y una tercera etapa en la que comienza un fenómeno de dilatación volumétrica hasta la falla final. La dilatación está por lo tanto asociada con la degradación del material.

Sin embargo, si el mismo ensayo se realiza bajo tensiones de confinamiento, no sólo se observa un incremento de la tensión pico, sino que se observa que la dilatación es menor cuanto mayor es la presión de confinamiento, hasta que para ciertos niveles de confinamiento, no se observa dilatación. Esto significa que el hormigón frente a altos estados de confinamiento experimenta claramente menor degradación que el hormigón sin confinar.

Este fenómeno también se confirma evaluando curvas de tensión de carga-descarga versus deformación correspondientes a un ensayo de compresión triaxial, donde se observa que si bien la descarga se produce con una rigidez menor que la correspondiente a la tangente inicial a la curva, esta rigidez por un lado es mayor cuanto mayor es el confinamiento y además, no se degrada en los sucesivos ciclos. (Sfer et al., 2002).

Este comportamiento del hormigón frente a presiones de confinamiento, es representable mediante la teoría de la elastoplasticidad. Si bien esta teoría fue desarrollada en principio para materiales metálicos, en los que se relaciona la degradación del material con deformaciones plásticas debidas a dislocaciones, se ha demostrado que es aplicable al modelado del comportamiento mecánico del hormigón. En este caso, la degradación no se debe a dislocaciones, sino a microfisuras y al colapso de los poros, el que se acepta asociar con las deformaciones plásticas. (Ohtani y Chen, 1988).

Sin embargo, si las superficies de carga son abiertas, no se limita la zona elástica al avanzar hacia el lado negativo del eje de presiones hidrostáticas, lo cual se contradice con lo observado experimentalmente como se explicó anteriormente.

Si en lugar de superficies de carga abiertas, se consideran superficies de carga cerradas, cuando se incrementa la presión hidrostática, la zona elástica tendrá un límite, a partir del cual comenzará a haber deformaciones plásticas. Por lo tanto, frente a altos confinamientos habrá deformaciones plásticas aún con cargas deviatoricas pequeñas o incluso, nulas.

### **3 MAXIMA RESISTENCIA DEPENDIENTE DEL PARAMETRO DE PRESTACION**

Se resumen aquí los aspectos fundamentales del criterio de máxima resistencia basado en el índice de prestación.

Todo lo explicado en la sección anterior es válido para cualquier tipo de hormigón. Sin embargo, los niveles de carga a partir de los cuales se producen los cambios de comportamiento descritos, pueden variar considerablemente si se considera un NSC o un HSC. (Folino et al., 2008)

Básicamente, los materiales constituyentes de ambos hormigones son los mismos, pero para lograr una elevada resistencia a compresión uniaxial, es necesario por un lado, seleccionar cuidadosamente los materiales componentes (tipo de piedra, tipo de cemento, etc), y por otro, es imprescindible reducir la relación W/B (agua/materiales cementicios) para lo cual es necesario introducir en la mezcla adiciones minerales (como por ejemplo humo de sílice) y aditivos químicos (superplastificantes).

Como se explicara previamente, el hormigón es un material compuesto. Básicamente a nivel meso-mecánico está constituido por pasta y por agregados gruesos. En el caso de los NSC, los agregados tienen una rigidez mucho más alta que la pasta, y la interface pasta agregado tiene una importancia fundamental. Al tener más agua que los HSC, son más porosos y presentan en consecuencia mayor microfisuración antes de ser cargados. Contrariamente, en los HSC, la pasta tiene una menor diferencia de rigidez con la de los agregados, diferencia que será menor cuanto mayor sea la calidad del hormigón, al tener menos agua son mucho menos porosos, y por lo tanto presentan una menor microfisuración inicial.

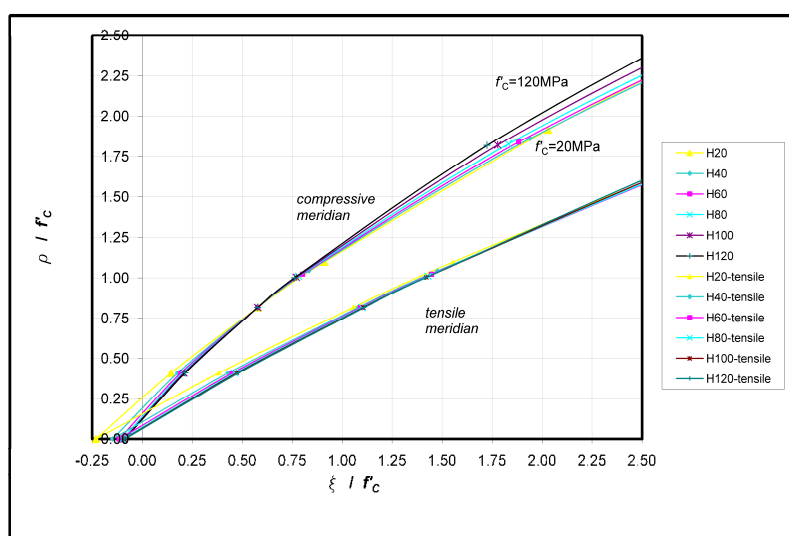


Figura 1 – Predicciones de máxima resistencia para los meridianos de compresión y de tracción para hormigones de distintas calidades (en coordenadas normalizadas)

Estas diferencias de composición, se reflejan en comportamientos mecánicos gradualmente (pero no linealmente) distintos al ir aumentando la resistencia a compresión uniaxial. Así los HSC frente a cargas de compresión presentan un rango elástico mucho más extendido, deformaciones laterales menores, y comportamiento más frágil en general. Además, desde el punto de vista de la dosificación, resulta posible obtener una determinada resistencia uniaxial a compresión  $f'_c$  a partir de distintas proporciones de mezclas, resultando por lo tanto pastas de distinta calidad, distintas relaciones de rigidez pasta/agregado, y por lo tanto, distintos comportamientos, aún teniendo la misma resistencia uniaxial a compresión  $f'_c$ .

Una característica importante que surge de la comparación de la falla de NSC versus HSC, es que si bien en ambos la resistencia en el meridiano de tracción es bastante menor que en el de compresión, para los HSC esta diferencia es aún más acentuada. Es decir, básicamente lo que sucede es que al aumentar la resistencia a compresión, la resistencia a tracción no aumenta en la misma medida.

Lo expuesto, sumado a que la mayoría de los criterios de máxima resistencia desarrollados para hormigón, han sido desarrollados en base a la falla de NSC, llevó a que los autores desarrollaran un nuevo criterio de falla, válido para NSC y para HSC.

Para ello se definió el “Parámetro de Prestación (Performance Parameter)  $\beta_P$ ” adimensional, cuya definición se basa en la relación que existe entre la resistencia uniaxial a compresión  $f'_c$  y la relación W/B (agua/materiales cementicios), considerando que el valor W/B está directamente vinculado con la porosidad y por lo tanto con la calidad del hormigón.

En el Anexo I se presenta un resumen de las ecuaciones que definen el Criterio de Falla basado en el Parámetro de Prestación. En las Figs. (1) y (2) se muestran resultados obtenidos con este criterio para hormigones de distintas calidades. Por último, cabe destacar que el rango de aplicabilidad de este criterio es para hormigones sin fibras ni refuerzos de ningún tipo, entre aproximadamente 20 y 140 MPa de resistencia uniaxial a compresión, y con  $|\xi / f'_c| \leq 6$ .

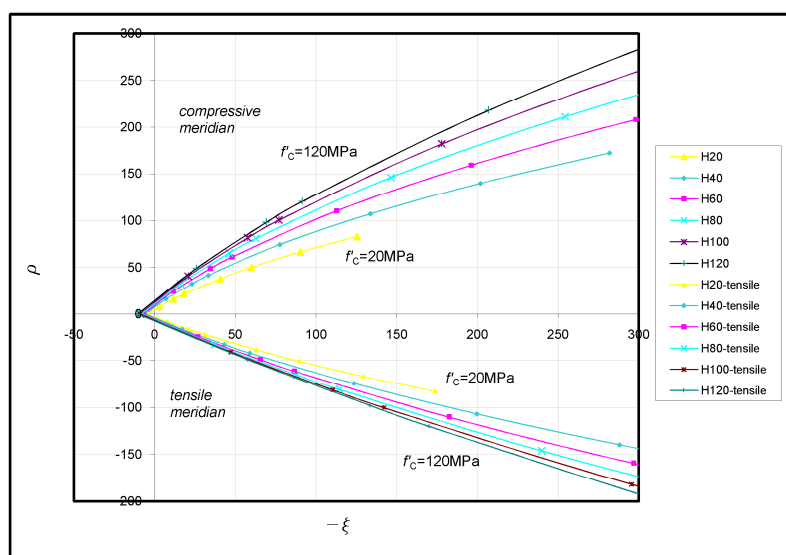


Figura 2 – Predicciones de máxima resistencia para los meridianos de compresión y de tracción para hormigones de distintas calidades (en coordenadas sin normalizar)

#### 4 DEFINICION DE LA CURVA DE INICIO DEL ENDURECIMIENTO EN EL MERIDIANO DE COMPRESION

##### 4.1 Definición y calibración del parámetro de inicio del endurecimiento “ $k_{el}$ ”

Como se explicara anteriormente, para todos los hormigones puede considerarse que, en un ensayo de compresión uniaxial, existe una zona de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones. El punto en el cual comenzarán las deformaciones plásticas está directamente vinculado a la calidad del hormigón. Se observa que la zona elástica es muy pequeña para NSC (aproximadamente 30% de  $f'_c$ ), mientras que para HSC este límite es mucho mayor (alcanzándose en algunos casos valores del orden del 80% de  $f'_c$  o incluso, mayores).

Se define “ $k_{el}$ ” como el parámetro de inicio del endurecimiento, de manera tal que en un ensayo de compresión uniaxial, el comienzo de las deformaciones plásticas sucederá cuando la tensión alcance el valor  $k_{el} \cdot f'_c$ .

$$0.10 \leq k_{el} = \beta_P^{0.11} - 0.50 + \frac{f'_c [MPa]}{300} \leq 0.95 \quad (1)$$

Se propone la Ec. (1) como ley de variación de “ $k_{el}$ ” en función del parámetro de prestación  $\beta_P$  (ver Anexo I) y de la resistencia a compresión uniaxial  $f'_c$ , calibrada sobre la base de diversos resultados de ensayos a compresión uniaxial recopilados de la literatura. En

la Fig. (3) se representa dicha ley de variación, y con líneas punteadas se representa el rango de variación posible de acuerdo a valores extremos posibles de  $\beta_p$  para un mismo valor de  $f'_c$ .

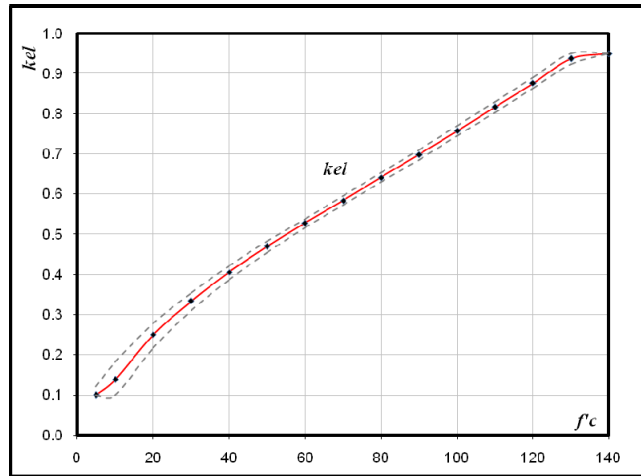


Figura 3 – Ley de variación empírica propuesta para el parámetro de inicio del endurecimiento

#### 4.2 Trazado de la primer superficie de fluencia

Para la primer superficie de fluencia, definida sobre el meridiano de compresión, se adoptan las siguientes hipótesis (Ver Fig. 4):

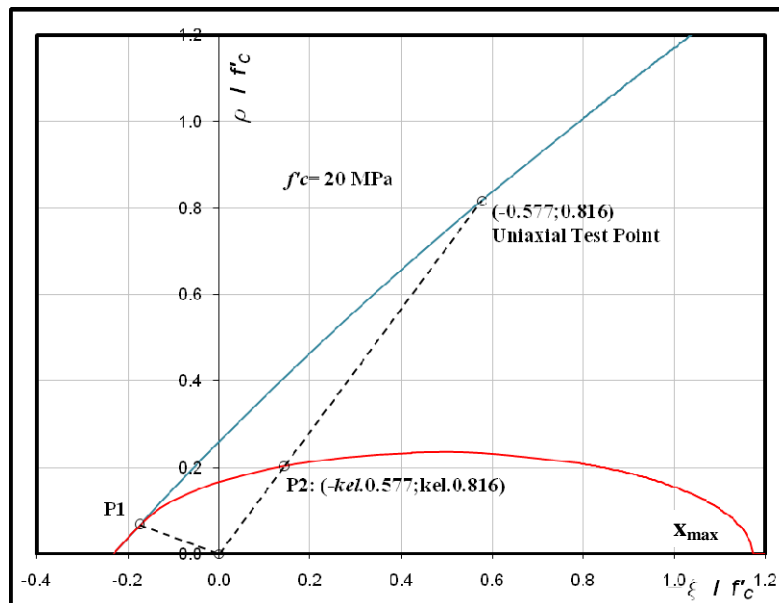


Figura 4 – Primer superficie de fluencia – Hormigón  $f'_c=20\text{MPa}$

Hay una zona ubicada entre el vértice de la parábola que define el meridiano de compresión en coordenadas normalizadas de acuerdo al criterio de máxima resistencia basado en el parámetro de prestación (Ver Anexo I), y un punto denominado “P1” de coordenadas  $(\bar{\xi}_1; \bar{\rho}_{c1})$ , en la que no hay endurecimiento: el comportamiento del hormigón en esta zona es elástico hasta la falla sobre la superficie de máxima resistencia. A partir del punto “P1” la superficie de fluencia que separa el rango elástico del plástico está constituida por una curva

que cumple las siguientes **condiciones de paso y de tangencia**:

- a. Pasa por el punto denominado “P1” de coordenadas  $(\bar{\xi}_1; \bar{\rho}_{c1})$
- b. Pasa por un punto denominado “P2”, el cual coincide con el punto de tensiones en el que en un ensayo uniaxial a compresión comienzan las deformaciones plásticas. Las coordenadas del punto “P2” serán:

$$(\bar{\xi}_2; \bar{\rho}_{c2}) = \left( -\frac{k_{el}}{\sqrt{3}}; k_{el} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \quad (2)$$

- c. Es tangente a la curva de máxima resistencia en el punto “P1”.
- d. Su tangente en un punto denominado “ $x_{max}$ ” es normal al eje de presiones.

Por lo tanto se busca una curva que cumpla con las 4 condiciones enunciadas. Se adopta una elipse cuyo centro esté sobre el eje de presiones hidrostáticas en las coordenadas  $(x_{cen}; 0)$ , con lo cual, la cuarta condición se verá cumplida. Esta elipse deberá pasar por “P1”, ser tangente en “P1” a la curva de máxima resistencia, y deberá pasar por “P2”. Su ecuación general será

$$\frac{(\bar{\xi} - x_{cen})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

ó

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad x = \bar{\xi} - x_{cen} \quad ; \quad y = \bar{\rho}_c \quad (4)$$

El punto “P1” se supone conocido, y sus coordenadas  $(\bar{\xi}_1; \bar{\rho}_{c1})$  cumplen la ecuación de la curva que representa el meridiano de compresión de máxima resistencia dependiente de la prestación:

$$A \cdot y_1^2 + B_c \cdot y_1 + C \cdot \bar{\xi}_1 - 1 = 0 \quad \text{donde} \quad y_1 = \bar{\rho}_{c1} \quad (5)$$

Además, las coordenadas de “P1” cumplen la ecuación de la elipse:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad x_1 = \bar{\xi}_1 - x_{cen} \quad ; \quad y_1 = \bar{\rho}_{c1} \quad (6)$$

La condición de tangencia en el punto “P1” exige que:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right]_{P1} = \left. \frac{d\bar{\rho}_c}{d\bar{\xi}} \right]_{P1} = n_1 \quad (7)$$

De la Ec. (4),

$$\Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right]_{P1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} \quad (8)$$

De la Ec. (5),

$$\Rightarrow n_1 = \frac{-C}{2 \cdot A \cdot y_1 + B_c} \quad (9)$$

y por lo tanto, de las Ecs. (7) a (9),  $\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = -\frac{1}{n_1} \cdot \frac{x_1}{y_1}$  (10)

En el punto denominado “P2”, de coordenadas  $(\bar{\xi}_2; \bar{\rho}_{c2}) = \left( -\frac{k_{el}}{\sqrt{3}}; k_{el} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$ , la ecuación de la elipse será:

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad x_2 = \bar{\xi}_2 - x_{cen} \quad ; \quad y_2 = \bar{\rho}_{c2} \quad (11)$$

Se observa que en la ecuación general de la elipse (Ec. (3)) hay 3 incógnitas:  $x_{cen}$ ,  $a$  y  $b$ , las cuales pueden despejarse del conjunto de ecuaciones constituidas por las Ecs. (6), (10) y (12), resultando:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{cen} = \frac{\left( \bar{\xi}_1^2 - \bar{\xi}_2^2 \right) \cdot n_1 \cdot y_1 - \bar{\xi}_1 \cdot \left( y_1^2 - y_2^2 \right)}{2 \cdot y_1 \cdot n_1 \cdot \left( \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 \right) - \left( y_1^2 - y_2^2 \right)} \end{array} \right. \quad (12)$$

$$a^2 = x_1^2 - \frac{x_1 \cdot y_1}{n_1} \quad (13)$$

$$b^2 = \frac{a^2 \cdot y_1^2}{\left( a^2 - x_1^2 \right)} \quad (14)$$

**Condición de elipticidad:** Para que la elipse pueda construirse, considerando que el punto “P2” está fijo, el punto “P1” no puede ser cualquiera, sino que debe ser tal que se cumpla  $a^2 > 0$ ,  $b^2 > 0$  y por lo tanto  $a^2/b^2 > 0$ . De estas condiciones de elipticidad puede demostrarse que surge primero una condición obvia que es

$$\bar{\xi}_1 > \bar{\xi}_2 \quad (15)$$

Y una segunda condición que determina un rango dentro del cual debe estar el punto “P1”

$$y_1^2 + \frac{2}{B_c} \cdot \left[ A \cdot y_2^2 - 1 + C \cdot \bar{\xi}_2 \right] \cdot y_1 + y_2^2 > 0 \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{B_c} \cdot \left[ A \cdot y_2^2 - 1 + C \cdot \bar{\xi}_2 \right] - \sqrt{\left( \frac{1}{B_c} \cdot \left[ A \cdot y_2^2 - 1 + C \cdot \bar{\xi}_2 \right] \right)^2 - y_2^2} < y_1 < \\ < -\frac{1}{B_c} \cdot \left[ A \cdot y_2^2 - 1 + C \cdot \bar{\xi}_2 \right] + \sqrt{\left( \frac{1}{B_c} \cdot \left[ A \cdot y_2^2 - 1 + C \cdot \bar{\xi}_2 \right] \right)^2 - y_2^2} \end{array} \right. \quad (17)$$

**Elección del punto “P1”:** se observa que cuanto menor sea  $y_1$ , mayor será el semieje mayor de la elipse, y mayor será la zona elástica. Lamentablemente no hay suficientes datos de ensayos hidrostáticos como para calibrar este valor con gran precisión. De todos los puntos



comprendidos en el rango determinado por la Ec. (17), se propone adoptar el siguiente valor calibrado en función del parámetro de prestación:

$$y_1 = \left(1 + \frac{1}{\beta_p \cdot 100}\right) \cdot \left[ -\frac{1}{B_c} \cdot [A \cdot y_2^2 - 1 + C \cdot \bar{\xi}_2] - \sqrt{\left(\frac{1}{B_c} \cdot [A \cdot y_2^2 - 1 + C \cdot \bar{\xi}_2]\right)^2 - y_2^2} \right] \quad (18)$$

De esta manera, la curva de fluencia inicial sobre el meridiano de compresión queda definida por la Ec. (18), junto con las Ecs. (12), (13) y (14).

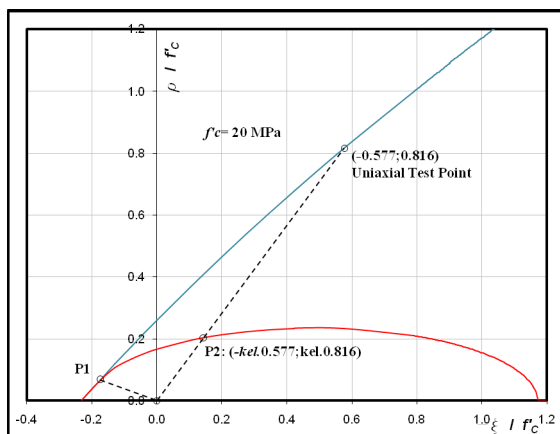


Figura 5 – Primer superficie de fluencia – Hormigón  $f'c=20\text{MPa}$

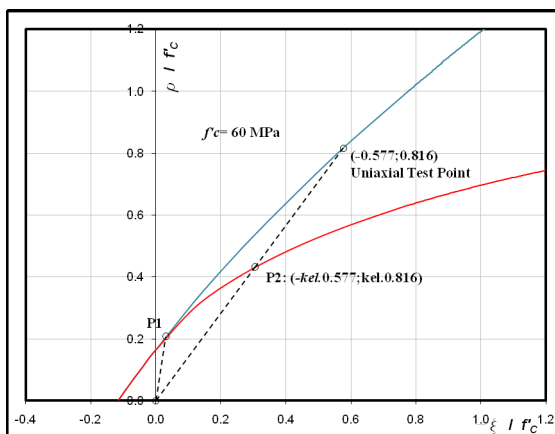


Figura 6 – Primer superficie de fluencia – Hormigón  $f'c=60\text{MPa}$

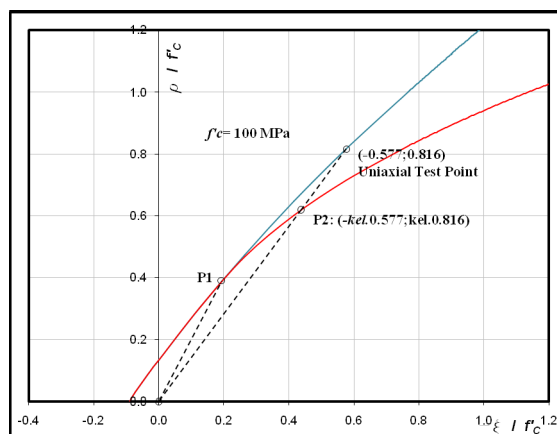


Figura 7 – Primer superficie de fluencia – Hormigón  $f'c=100\text{MPa}$

En las Figs. (5), (6), y (7), se observa que al variar la calidad del hormigón, varía la curva inicial de fluencia, observándose que para hormigones de bajo nivel de prestación, el punto P1 está muy cerca del vértice de la curva de máxima resistencia, mientras que para hormigones de alto nivel de prestación, la zona elástica es más amplia, y el punto “P1” llega a ubicarse en el semieje negativo del eje hidrostático de presiones.

### 4.3 Parámetro de endurecimiento inicial “ $k_0$ ”

Se define como parámetro de endurecimiento inicial a la relación entre la coordenada y del Punto “P1” de tangencia de la primer superficie de fluencia, dada por la Ec. (18), y la correspondiente al punto del ensayo de compresión uniaxial igual a  $\sqrt{2/3}$ .

$$k_o = \frac{y_1}{\sqrt{2/3}} \quad (19)$$

## 5 DEFINICION DE LAS SUCESIVAS SUPERFICIES DE CARGA SOBRE EL MERIDIANO DE COMPRESION

### 5.1 Evolución de la superficie de fluencia durante el endurecimiento

Definida la primer superficie de acuerdo a lo expuesto en la Sección 4, se considera que la misma va evolucionando durante el proceso de endurecimiento de acuerdo a las siguientes condiciones:

- El punto "P1" se va desplazando de manera continua sobre la superficie de máxima resistencia y hacia el semieje negativo del eje de presiones hidrostáticas, de manera tal que la coordenada  $y_1^i$  del punto  $P_1^i$  adquiere un valor

$$y_1^i = \bar{\rho}_{c1}^i = k \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{donde } k \geq k_o \quad (20)$$

- Las curvas que constituyen las sucesivas curvas de carga, son elipses tangentes al meridiano de compresión de la superficie de máxima resistencia en el nuevo punto " $P_1^i$ ", de coordenadas  $(\bar{\xi}_{c1}^i; \bar{\rho}_{c1}^i)$  las cuales cumplen la ecuación de la curva correspondiente al meridiano de compresión de máxima resistencia.
- Estas elipses mantienen constante la relación entre los cuadrados de sus semiejes expresada en la Ec. (10).

A partir de las ecuaciones de paso y tangencia por el punto " $P_1^i$ ", y de la condición de relación de semiejes constante

$$\frac{(\bar{\xi}_1^i - x_{cen}^i)^2}{a^{i2}} + \frac{y_1^{i2}}{b^{i2}} = 1 \quad \text{con } y_1^i = \bar{\rho}_{c1}^i \quad (21)$$

$$\frac{a^{i2}}{b^{i2}} = -\frac{1}{n_1^i} \cdot \frac{(\bar{\xi}_1^i - x_{cen}^i)}{y_1^i} \quad (22)$$

$$\frac{a^{i2}}{b^{i2}} = \frac{a^2}{b^2} = cte \quad (23)$$

Se determinan las incógnitas quedando las elipses perfectamente definidas

$$x_{cen}^i = \bar{\xi}_1^i + n_1^i \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot y_1^i \quad (24)$$

$$a^{i2} = (\bar{\xi}_1^i - x_{cen}^i)^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot (y_1^i)^2 \quad (25)$$

$$b^{i2} = a^{i2} \cdot \left( \frac{a^2}{b^2} \right)^{-1} \quad (26)$$

## 5.2 Parámetro de endurecimiento

En la Fig. (8) se observan distintas curvas de carga obtenidas para un determinado tipo de hormigón en el meridiano de compresión.

De acuerdo a lo estipulado en la Ec. (20), cada una de estas curvas está caracterizada por un parámetro “ $k$ ” que se adoptará como parámetro de endurecimiento. Obsérvese que “ $k$ ” tiene un valor mínimo dado por “ $k_0$ ”, pero no tiene un valor máximo. Es decir, desde un punto de vista teórico, un punto cargado sólo con una presión hidrostática creciente, se iría degradando infinitamente pero sin “fallar”.

El parámetro de endurecimiento queda definido entonces como la relación entre la resistencia a corte (2da coordenada de Haigh Wetergaard normalizada) del punto donde la elipse correspondiente es tangente a la superficie de máxima resistencia, y la resistencia a corte correspondiente al punto de ensayo de compresión uniaxial, el cual en un diagrama normalizado es constante e igual a  $\sqrt{2/3}$ .

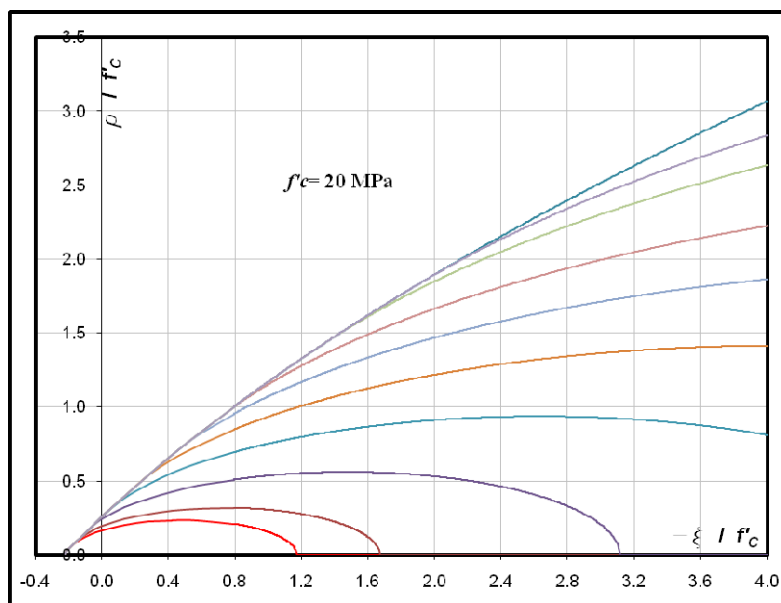


Figura 8 – Superficies de carga – Hormigón  $f'_c=20\text{MPa}$

En las Figs. (9), (10), y (11), se observa la variación de las superficies de carga en el meridiano de compresión al ir variando la calidad del hormigón.

Este tipo de planteo es usualmente conocido como “capa y cono”, donde la capa es la superficie de fluencia y el cono es la superficie de falla. En la implementación numérica, de acuerdo al camino de carga, se alcanzará en determinado momento una cierta superficie de fluencia caracterizada por su correspondiente parámetro de endurecimiento. Si en el siguiente paso la tensión de prueba cae fuera de la superficie, deberá retornar a la superficie de fluencia actualizada. Sin embargo, pueden darse dos situaciones distintas, de acuerdo a la relación entre las coordenadas de tensiones del punto de retorno, respecto a las correspondientes al punto donde la superficie de fluencia actualizada es tangente a la superficie de falla. Esta relación definirá si ya se ha alcanzado la falla, o si el material sólo se ha degradado sin

alcanzarla.

Como se dijera en el resumen, esta función de endurecimiento es sólo un aspecto de una formulación constitutiva actualmente en desarrollo, que se basará en la teoría de la elasto-plasticidad con flujo no asociado. Actualmente, se está trabajando sobre la ley de endurecimiento basado en las sucesivas superficies de carga aquí propuestas, y en el potencial plástico que se utilizará.

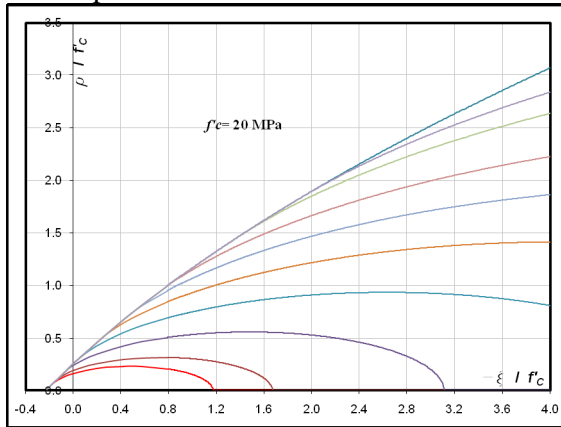


Figura 9 – Superficies de carga – Hormigón  $f'c=20\text{MPa}$

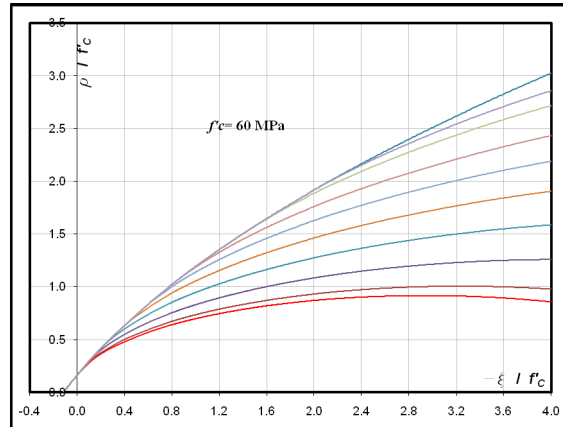


Figura 10 – Superficies de carga – Hormigón  $f'c=60\text{MPa}$

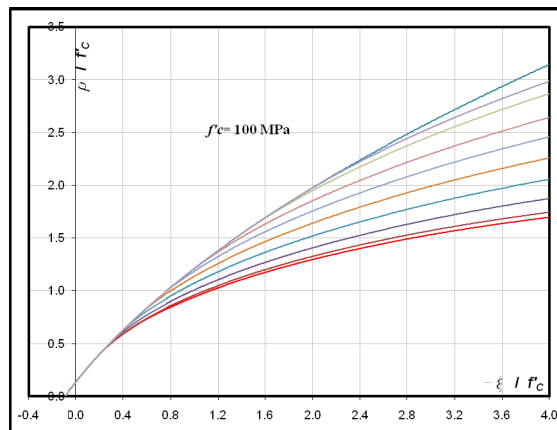


Figura 11 – Superficies de carga – Hormigón  $f'c=100\text{MPa}$

## 6 EXTENSION A OTROS MERIDIANOS

Las distintas curvas de carga deducidas en las Secciones 4 y 5 para el meridiano de compresión, se extienden al resto de los meridianos adoptando la misma proporcionalidad que existe entre las respectivas curvas de máxima resistencia las cuales cumplen

$$\forall 0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \Rightarrow \rho^* = \frac{\rho_c}{r} \tag{27}$$

Donde “r” es el factor de elipticidad en el plano deviatorico (Ver Anexo I) que depende del tercer invariante de tensiones deviatoricas y de la excentricidad “e”, la cual a su vez depende de las constantes del material y del primer invariante de tensiones. Se adopta entonces para las curvas de carga

$$\forall 0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \Rightarrow \rho_y^* = \frac{\rho_{yc}}{r} \quad (28)$$

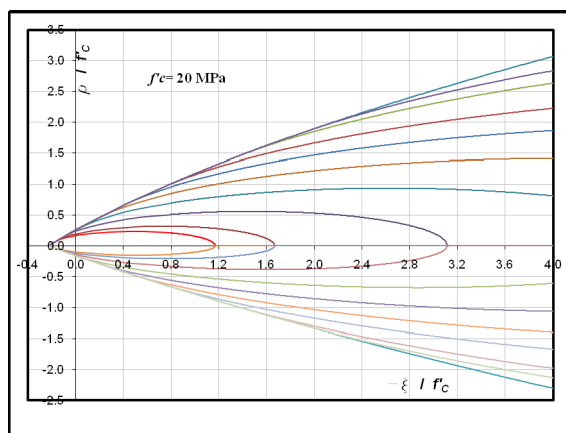


Figura 12 – Superficies de carga – Meridianos de compresión y de tracción - Hormigón  $f'_c=20\text{MPa}$

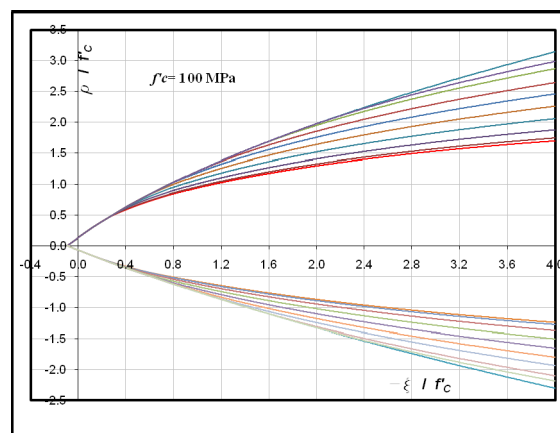


Figura 13 – Superficies de carga – Meridianos de compresión y de tracción - Hormigón  $f'_c=100\text{MPa}$

En las Fig. (12) y (13) se presentan las curvas de carga correspondientes a los meridianos de compresión y de tracción (dibujadas como negativas) correspondiente a dos hormigones de calidades muy distintas. Se observa en estas figuras el mayor rango elástico que poseen los hormigones de alta resistencia (HSC) frente a los hormigones de resistencia normal (NSC), no alcanzándose la capa hasta valores muy altos de presión hidrostática.

Existen en la literatura distintas funciones de fluencia propuestas en el marco de formulaciones constitutivas basadas en distintas teorías para modelar el comportamiento de materiales cohesivo friccionales. Sin embargo, pocas son del tipo capa, es decir cerradas sobre el eje de presiones hidrostáticas. Así por ejemplo las propuestas por Oller (1988) y por Grassl et al. (2002), consideran superficies abiertas. Otras que sí consideran superficies cerradas con capa, como las propuestas por Han y Chen (1987), Kang y Willam (1999), y por Fossum y Fredrich (2000), no presentan continuidad del tipo  $C^1$  como la presentada aquí. Otras, como la función de fluencia propuesta por Etse (1992), tiene el inconveniente de estar representada por una función de cuarto orden. Además, ninguna de estas superficies adapta su forma de acuerdo a la calidad del hormigón, más allá de la modificación propia de los parámetros del material.

## 7 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan superficies de endurecimiento no uniforme cerradas sobre el eje de presiones hidrostático, con una capa o capuchón, en el marco de una formulación constitutiva no lineal para la predicción del comportamiento mecánico tanto de hormigones de resistencia normal como de hormigones de alta resistencia.

Se adopta como superficie de máxima resistencia el criterio basado en el índice de prestación desarrollado previamente por los autores. Como consecuencia, tanto la superficie de máxima resistencia como las superficies de carga, resultan dependientes del parámetro de prestación, del primer invariante de tensiones, del segundo y tercer invariantes de tensiones deviatoricas, y de tres parámetros materiales del hormigón. La consideración del parámetro de prestación permite tener en cuenta la influencia de la calidad del hormigón tanto en el valor de la máxima resistencia como en el endurecimiento.

Las sucesivas superficies de carga presentan las siguientes características:

- Hay una zona ubicada entre el vértice de la superficie de máxima resistencia, y un

punto que dependerá de la calidad y del nivel de endurecimiento del hormigón en la que no hay endurecimiento: el comportamiento del hormigón en esta zona es elástico hasta la falla sobre la superficie de máxima resistencia.

- A partir de este punto, el endurecimiento está representado por sucesivas superficies de carga. La forma de cada una de estas superficies está caracterizada por meridianos con forma de elipses, tangentes a la superficie de máxima resistencia, con su centro ubicado sobre el semieje negativo de presiones hidrostáticas, de manera que cuando esta elipse intersecta dicho semieje, lo hace en forma perpendicular, formando una capa o capuchón.
- La deducción de estas elipses se hace para el meridiano de compresión, pero luego se extienden al resto de los meridianos basándose en la misma proporcionalidad que existe entre las ordenadas de los meridianos sobre la superficie de máxima resistencia, logrando una continuidad del tipo  $C^1$ .
- Desde el punto de vista teórico, estas superficies pueden evolucionar infinitamente.

Estas superficies de carga cerradas, limitan la zona elástica de manera tal que si se incrementa la presión hidrostática, permitirían reproducir, implementadas en el modelo global de plasticidad de flujo no asociado (en la cual se está trabajando actualmente), deformaciones plásticas frente a altos confinamientos aún con cargas deviatoricas pequeñas o incluso, nulas.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo brindado por una lado por la Universidad de Buenos Aires (UBA) - Argentina, por medio del proyecto UBACYT 2006-2009, I813; y por otro, por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica ANPCyT por medio del proyecto PICT-2006-01232.

## ANEXO I - ECUACIONES DEL CRITERIO DE MÁXIMA RESISTENCIA BASADO EN EL ÍNDICE DE PRESTACIÓN

El planteo de la superficie se hace en términos de las coordenadas de Haigh Westergaard:

$$\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \rho = \sqrt{2J_2} \quad ; \quad \cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (29)$$

donde  $I_1$  es el primer invariante del tensor de tensiones  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $J_2$  y  $J_3$  son el segundo y tercer invariantes de tensiones deviatoricas  $\underline{\underline{s}}$ .

Parámetro de Prestación:

$$\beta_p = \frac{1}{1000} \frac{f'_c}{(W/B)} \quad f'_c \text{ in } [MPa] \quad (30)$$

Valor medio propuesto para el índice de prestación cuando no se conoce la relación W/B, para  $f'_c \leq 55\text{Mpa}$  (7977psi):

$$\beta_p = (2.60E - 4) \cdot (f'_c)^{1.60} \quad f'_c \text{ in } [MPa] \quad (31)$$

para  $f'_c > 55\text{MPa}$  (7977psi):

$$\beta_p = (4.00E - 2) \cdot e^{(2.5E - 2) \cdot f'_c} \quad f'_c \text{ in } [MPa] \quad (32)$$

Para estimar valores máximos y mínimos del índice de prestación, considerar:

$$f'_c{}^{max} = f'_c + 5 \text{ MPa} \quad (33)$$

Criterio de falla: 
$$F_{(\xi, \rho, \theta, f'_c, \beta_p)} = \frac{\rho}{\rho^*} - 1 = 0 \Rightarrow \rho = \rho^* \quad (34)$$

$$\forall 0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \Rightarrow \rho^* = \frac{\rho_c}{r} \quad (35)$$

$$r = \frac{4.(1 - e^2). \cos^2 \theta + (2.e - 1)^2}{2.(1 - e^2). \cos \theta + (2.e - 1). \sqrt{4.(1 - e^2). \cos^2 \theta + 5.e^2 - 4.e}} \quad (36)$$

$$e_{\left(\frac{\bar{\rho}_t}{\rho_c}, f'_c, \beta_p\right)} = \frac{\bar{\rho}_t}{\rho_c} = \frac{-B_t + \sqrt{B_t^2 + 2.A.\bar{\rho}_c.(2.A.\bar{\rho}_c + 2.B_c)}}{2.A.\bar{\rho}_c} \quad (37)$$

donde 
$$\bar{\rho}_c_{\left(\frac{\bar{\rho}_t}{\rho_c}, f'_c, \beta_p\right)} = \frac{-B_c + \sqrt{B_c^2 + 4.A.(1 - C.\bar{\xi})}}{2.A} ; 0.50 \leq e \leq 1.00$$

Ecuación general del criterio de falla dependiente de la prestación:

$$F = A.r^2.\bar{\rho}^{*2} + B_c.r.\bar{\rho}^* + C.\bar{\xi} - 1 = 0 \quad (38)$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A.\bar{\rho}_c^2 + B_c.\bar{\rho}_c + C.\bar{\xi} - 1 = 0 \quad (39)$$

$$\theta = 0 \Rightarrow A.\bar{\rho}_t^2 + B_t.\bar{\rho}_t + C.\bar{\xi} - 1 = 0 \quad (40)$$

Ecuaciones de los coeficientes del criterio, que adoptan un valor constante para una determinada calidad de hormigón:

$$A = -\frac{3}{2} \left\{ 1 + \frac{(m - \sqrt{2})(1 - \alpha_b \alpha_t)(\alpha_b - \alpha_t)}{\alpha_b \alpha_t [(m - \sqrt{2})(\alpha_b - \alpha_t) + 3m]} \right\} \quad (41)$$

$$B_c = \sqrt{3} \left\{ \sqrt{2} + \frac{(\sqrt{2}m - 1)(1 - \alpha_b \alpha_t)(\alpha_b - \alpha_t)}{\alpha_b \alpha_t [(m - \sqrt{2})(\alpha_b - \alpha_t) + 3m]} \right\} \quad (42)$$

$$B_t = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1 + \alpha_t^2}{\alpha_t} + \frac{[(m - \sqrt{2})\alpha_t - m](1 - \alpha_b \alpha_t)(\alpha_b - \alpha_t)}{\alpha_b \alpha_t [(m - \sqrt{2})(\alpha_b - \alpha_t) + 3m]} \right\} \quad (43)$$

$$C = \sqrt{3}m \frac{(1 - \alpha_b \alpha_t)(\alpha_b - \alpha_t)}{\alpha_b \alpha_t [(m - \sqrt{2})(\alpha_b - \alpha_t) + 3m]} \quad (44)$$

Propuesta de calibración de parámetros del material incluidos en el modelo:

$$m = 1.05 \cdot \beta_p^{0.05} \quad (45)$$

$$\alpha_t = \frac{f_t^*}{f_c'} = \frac{6.70 \cdot \beta_p^{0.27}}{f_c'} \quad f_t^*, f_c' \text{ in [MPa]} \quad (46)$$

$$\left[ \alpha_t = \frac{f_t^*}{f_c'} = \frac{972 \cdot \beta_p^{0.27}}{f_c'} \right] \quad f_t^*, f_c' \text{ in [psi]}$$

$$\alpha_b = \frac{f_b^*}{f_c'} = (1.21 \cdot k_b + 1.50 \cdot \alpha_t)$$

$$k_b \begin{cases} \beta_p \geq \beta_{p_{\max}} \rightarrow k_b = 0.89 \\ \beta_{p_{\min}} \leq \beta_p \leq \beta_{p_{\max}} \rightarrow k_b = 1 - 0.11 \left[ \frac{\beta_p - \beta_{p_{\min}}}{\beta_{p_{\max}} - \beta_{p_{\min}}} \right] \\ \beta_p \leq \beta_{p_{\min}} \rightarrow k_b = 1 - 0.125 \left[ \frac{\beta_p - \beta_{p_{\min}}}{\beta_{p_{\max}} - \beta_{p_{\min}}} \right] \end{cases} \quad (47)$$

Se debe cumplir  $B_c \geq 0,50 B_t$ . De esta condición resulta que los tres parámetros del material deben cumplir la siguiente ecuación:

$$\left[ (\sqrt{2} - m) \alpha_t \frac{1 + \alpha_t^2 - 4\alpha_t}{\alpha_t [m(5 - \alpha_t) + \sqrt{2}(\alpha_t - 2)]} - \alpha_t \right] \cdot \alpha_b^2 +$$

$$+ \left[ 1 + \alpha_t^2 + \left( (m - \sqrt{2}) \alpha_t^2 - 3m\alpha_t \right) \frac{1 + \alpha_t^2 - 4\alpha_t}{\alpha_t [m(5 - \alpha_t) + \sqrt{2}(\alpha_t - 2)]} \right] \cdot \alpha_b - \alpha_t \geq 0 \quad (48)$$

En las ecuaciones (29) a (48),

$\alpha_b$  Relación entre la resistencia a compresión uniaxial y la resistencia a compresión uniaxial  $f_b^*/f_c'$

$\alpha_t$  Relación entre la resistencia a tracción uniaxial y la resistencia a compresión uniaxial  $f_t^*/f_c'$

$\beta_p$  Parámetro de Prestación

$\xi; \rho; \theta$  Coordenadas de Haigh Westergaard en el espacio de tensiones principales [MPa]

$\bar{\rho}; \bar{\xi}$  1ª y 2ª coordenada de Haigh Westergaard normalizadas con respecto a  $f_c'$

$\bar{\rho}_c$  Resistencia a corte para  $\theta = \pi/3$  (*meridiano de compresión*) (2ª coordenada de Haigh Westergaard normalizada con respecto a  $f_c'$ )

$\bar{\rho}^*$  Resistencia a corte (2ª coordenada de Haigh Westergaard normalizada con respecto a  $f_c'$ )

$\bar{\rho}_t$  Resistencia a corte para  $\theta = 0$  (*meridiano de tracción*) (2ª coordenada de Haigh Westergaard normalizada con respecto a  $f_c'$ )

$A; B_c; B_t; C$  Coeficientes del Criterio de falla dependiente de la prestación.



CTET	Ensayo convencional de extensión triaxial
$e$	Excentricidad $e = \rho_t / \rho_c$
$f_c$	Resistencia a compresión uniaxial [MPa]
$f_b$	Pico de presión de confinamiento lateral en un ensayo CTET bajo tensión axial nula, o resistencia a compresión biaxial [MPa]
$f_b^*$	Pico de presión de confinamiento lateral en un ensayo CTET bajo tensión axial nula, o resistencia a compresión biaxial calibrada empíricamente en términos de $\beta_p$ [MPa]
$f_t$	Resistencia a tracción uniaxial [MPa]
$f_t^*$	Resistencia a tracción uniaxial calibrada empíricamente en términos de $\beta_p$ [MPa]
$m$	Pendiente a la curva de máxima resistencia trazada en función de las coordenadas normalizadas $(\bar{\xi}; \bar{\rho})$ en el punto de compresión uniaxial (fricción equivalente)
$r$	Factor de elipticidad en el plano deviatorico
W/B	Relación agua/materiales cementicios [W=contenido de agua [kg/m <sup>3</sup> ], B=contenido de (cemento + adiciones minerales) [kg/m <sup>3</sup> ]

## REFERENCIAS

- Chen W.F., Han D.J.; "Plasticity for structural engineers", *Springer Verlag*, 1988.
- Dvorkin, E.; Cuitiño, A.; Gioia, G.; "A concrete material model based on non-associated plasticity and fracture", *Journal Engineering Computations*, Vol. 6, No. 4, pp 281 – 294, 1989.
- Etse G.; "Theoretische und numerische untersuchung zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton", *Phd thesis. University of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany*, 1992.
- Etse G., Willam K.; "Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete", *ASCE Journal of Engineering Mechanics* 120(9): 1983-2011, 1994.
- Folino, P.; Etse, G.; Will, A.; "Modelación inelástica de hormigones de distintas resistencias basada en el índice de prestación"- *Proc. ENIEF 2006, Mecánica Computacional Vol. XXV, pp. 1915-1925*, 2006.
- Folino, P., Etse, G., Will, A.; "A performance dependent failure criterion for normal and high strength concretes", *enviado para su publicación a ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 2008.
- Fossum, A. F.; Fredrich, J. T.; "Cap plasticity models and compactive and dilatant pre-failure deformation" – *Proc. 4<sup>th</sup> North American Rock Mechanics Symp., 1169-1176, Seattle, WA, July 31-August 3, 2000, A.A. Balkema, Rotterdam*, 2000.
- Grassl, P.; Lundgren, K.; Gylltoft, K.; "Concrete in compression: a plasticity theory with a novel hardening law" - *International Journal of Solids and Structures* 39, 5205–5223, 2002.
- Han, D.J.; Chen WF.; "Constitutive modeling in analysis of concrete structures", *ASCE Journal of Engineering Mechanics* V113-No.4: 577-593, 1987.
- Imran I., Pantazopoulou S. J.; "Experimental study of plain concrete under triaxial stress", *ACI Materials Journal*, 93-6: 589-601, 1996.
- Kang, H.; Willam, K.; "Localization characteristics of triaxial concrete model", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 125-8:941-950, 1999.
- Lade P.; "Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces", *International Journal os Solids and Structures* 13: 1019–1035, 1977.
- Leon A.; "Über die Scherfestigkeit des Betons" ("Over the shearing strength of concrete"), *Beton und Eisen, Berlin, Germany*, 34(8), 1935.
- Lu, X.; "Uniaxial and triaxial behavior of high strength concrete with and without steel

- fibers”, *Phd Thesis, New Jersey Institute of Technology*, 2005.
- Ohtani, Y.; Chen WF.; “Multiple hardening plasticity for concrete materials”, *ASCE Journal of Engineering Mechanics V114-No.11:1890-1910*, 1988.
- Oller, S.; “Un modelo de daño continuo para materials friccionales”, *Tesis Doctoral UPC, Barcelona, España*, 1988.
- Ottosen N.S.; “A failure criterion for concrete”, *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE 103 (EM4): 527-535*, 1977.
- Rossi P., Ulm F.J., Hachi F.; “Compressive behavior of concrete: physical mechanisms and modeling”, *ASCE Journal of Engineering Mechanics V122-No.11:1038-1043*, 1996.
- Sfer D., Carol I., Gettu R., Etse G.; “Experimental study of the triaxial behavior of Concrete”, *ASCE Journal of Engineering Mechanics, 128-2:156-163*, 2002.
- Smith, S.; Willam K. J., Gerstle, K.; Sture S.; “Concrete over the top, or: Is there life after peak”, *ACI Materials Journal*, 86-5: 491-497, 1989.
- van Geel E.; “Concrete Behavior in multiaxial compression”, *Doctoral Thesis, Technische Universiteit Eindhoven*, 1998.
- van Mier J. G.; “Fracture Processes of Concrete”, *CRC Press*, 1997.
- Willam K. J., Warnke E. P.; “Constitutive model for the triaxial behavior of concrete”, *Proc. Intl. Assoc. Bridge Struct. Engrg., Report 19, Section III, Zurich: 1-30*, 1974.