

## VALIDACION DE METODOLOGIA DE RIGIDEZ REDUCIDA PARA INESTABILIDAD DE TANQUES

Rossana C. Jaca <sup>a</sup> y Luis A. Godoy <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Grupo de Métodos Numéricos y Experimentales, Universidad Nacional del Comahue,  
Buenos Aires 1400, 8300 Neuquén, Argentina, [rjaca@uncoma.edu.ar](mailto:rjaca@uncoma.edu.ar)

<sup>b</sup> CONICET y FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba, 5000 Córdoba, Argentina,  
[lgodoy@com.uncor.edu](mailto:lgodoy@com.uncor.edu)

**Palabras Clave:** Cáscaras, Elementos Finitos, Pandeo, Validación modelo, Rigidez reducida.

**Resumen.** Este trabajo plantea la validación de la metodología de rigidez reducida para analizar el pandeo elástico de cáscaras, contrastando los resultados con los obtenidos en ensayos publicados en la literatura relativa al tema. El sistema estudiado son tanques de almacenamiento de pared delgada con techo plano o esférico destinados al almacenamiento de petróleo, combustibles o agua bajo la acción de vacío interior o viento. El modelo de energía reducida de la cáscara, desarrollado originalmente por Croll y colaboradores, plantea el cálculo de límites inferiores para las cargas críticas en base a la eliminación de las componentes estabilizantes de energía membranal. Esta metodología representa una manera alternativa de analizar la disminución de las cargas críticas en problemas que presentan sensibilidad a imperfecciones iniciales. Los resultados obtenidos con la metodología de rigidez reducida pueden ser comparados con los del análisis de seguimiento de trayectoria, que también es una manera de evaluar esa reducción de cargas críticas usando otra solución numérica con un mayor costo computacional. La comparación con resultados experimentales permite asegurar la concordancia del modelo con la realidad representada. Los ensayos disponibles en la literatura son un conjunto de tanques reales con techo esférico ensayados con vacío interior hasta la destrucción total y otro conjunto de modelos de tanques con techo plano ensayados en túnel de viento. Planteando una reducción selectiva de las contribuciones membranales se obtienen límites inferiores con formas de modo asociadas compatibles con la observada en los ensayos.

## 1 INTRODUCCION

El modelo de energía reducida de la cáscara fue presentado por Croll y colaboradores en la década del 70 como una manera alternativa de evaluar la disminución de las cargas críticas obtenidas por vía experimental con respecto a las halladas por un análisis de bifurcación lineal. Esta dispersión de cargas críticas, con fuertes reducciones en algunos casos respecto a las que resultan de la teoría lineal clásica, puede ser estudiada mediante procedimientos no lineales con un importante esfuerzo computacional. La metodología de rigidez reducida provee un modelo de análisis menos complejo, basado en la observación que la componente membranal inicial se erosiona en las primeras etapas del comportamiento poscrítico. Las imperfecciones iniciales actúan como un catalizador para la pérdida de energía membranal, de manera que un límite inferior para las cargas críticas se puede hallar mediante un análisis de autovalores con la energía membranal eliminada.

Una manera de validar la mecánica del modelo y sus predicciones es mediante estudios numéricos sistemáticos. Pero un modelo es una representación válida de la realidad y requiere la representación real de los resultados. La validación propiamente dicha consiste en construir una representación correcta y es necesario que los resultados del modelo sean adecuados en relación al comportamiento del sistema que se estudia. En ese sentido para asegurar la representación de la realidad, es necesaria una contrastación con resultados experimentales.

Este modelo ya ha sido validado por Croll y colaboradores en estructuras de cáscara de diferente tipo: cilíndricas (Yamada y Croll, 1993), esféricas, hiperboloides y toroides (Zintillis y Croll, 1982) sujetos a diferentes cargas axilsimétricas (Croll y Zintillis, 1985). Estas verificaciones han sido en algunos casos con modelaciones numéricas y en otros con ensayos experimentales. El objetivo de este trabajo es verificar la implementación del modelo en un código de propósitos específicos y validarlo para cargas no axilsimétricas como las que resultan de la acción del viento. Las estructuras estudiadas son tanques metálicos de grandes dimensiones destinados al almacenamiento de fluidos, propios de la industria del petróleo.

En la Sección 2 se presenta la formulación incluida en el código de propósitos específicos ALREF (Flores, 1990) y en la Sección 3 se describe el modelo numérico implementado. Posteriormente se describe la metodología usada para la validación en la Sección 4. La Sección 5 presenta los casos usados para validar diferentes tipos de tanques para cargas axilsimétricas y la Sección 6 para cargas no axilsimétricas. En estas dos secciones últimas se contrastan los resultados del modelo de rigidez reducida con resultados numéricos, producidos por otros autores con otras metodologías, y en otros casos con resultados de ensayos presentados en la bibliografía.

## 2 FORMULACION GENERAL

### 2.1 Análisis de bifurcación clásico

La modelización de la cáscara por Elementos Finitos plantea, considerando la rigidez total del sistema, la condición de equilibrio para el cálculo de los estados precríticos:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}^F + \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (1)$$

donde  $\mathbf{K}_0$  es la matriz de rigidez lineal de la cáscara,  $\mathbf{u}^F$  es el vector desplazamientos nodales,  $\lambda$  el parámetro de carga y  $\mathbf{P}$  el vector de cargas escaladas mediante  $\lambda$ . Conocido el vector de desplazamientos  $\mathbf{u}^F$  se calculan los esfuerzos correspondientes al estado precrítico  $\mathbf{N}^F$ .

La condición de punto crítico se expresa como un problema de autovalores y autovectores:

$$[\mathbf{K}_0 + \lambda^C \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{N}^F)]\Phi = 0 \quad (2)$$

donde  $\lambda^C$  es la carga crítica del problema,  $\Phi$  es el autovector que indica la deformada asociada al modo crítico y  $\mathbf{K}_\sigma$  es la matriz carga-geometría que tiene en cuenta las componentes no lineales de las deformaciones y los esfuerzos sobre la trayectoria fundamental.

Usando la notación común para un análisis de elementos finitos (Zienkiewicz y Taylor, 2005), la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_0$  se expresa en función de  $\mathbf{B}_0$  que contiene las funciones de interpolación y la matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  obtenida a partir de las características del material y contiene el aporte de la energía membranar  $\mathbf{K}_m$  y de la energía flexional  $\mathbf{K}_b$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \int (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0) dA, & \mathbf{K}_\sigma &= \int (\mathbf{G}^T \mathbf{N}^F \mathbf{G}) dA \\ \mathbf{K}_0 &= \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_b \end{aligned} \quad (3)$$

y  $\mathbf{K}_\sigma$  se obtiene a partir de  $\mathbf{G}$ , que vincula los giros con los desplazamientos, y de  $\mathbf{N}^F$  que incluye las tensiones iniciales sobre la trayectoria fundamental.

La matriz de rigidez lineal ( $\mathbf{K}_0$ ) se obtiene a partir de las componentes lineales del campo de tensiones ( $N'_{ij}$  y  $M'_{ij}$ ) y deformaciones ( $\epsilon'_{ij}$  y  $\chi'_{ij}$ ), permitiendo identificar la contribución de las componentes membranales y flexionales:

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int N'_{ij} \epsilon'_{ij} dA \\ U_b &= \frac{1}{2} \int M'_{ij} \chi'_{ij} dA \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $U_m$  representa la energía membranar lineal y  $U_b$  la energía flexional lineal, con sus respectivas componentes meridionales ( $U_{mss}$  y  $U_{bss}$ ), circunferenciales ( $U_{mtt}$  y  $U_{btt}$ ) y torsionales ( $U_{mst}$  y  $U_{bst}$ ) asociadas a los esfuerzos y deformaciones correspondientes:

$$\begin{aligned} U_{mss} &= \frac{1}{2} \int N'_{ss} \epsilon'_{ss} dA, & U_{bss} &= \frac{1}{2} \int M'_{ss} \chi'_{ss} dA \\ U_{mtt} &= \frac{1}{2} \int N'_{tt} \epsilon'_{tt} dA, & U_{btt} &= \frac{1}{2} \int M'_{tt} \chi'_{tt} dA \\ U_{mst} &= \frac{1}{2} \int N'_{st} \epsilon'_{st} dA, & U_{bst} &= \frac{1}{2} \int M'_{st} \chi'_{st} dA \end{aligned} \quad (5)$$

## 2.2 Análisis de Rigidez Reducida

Las bases de la teoría de Límites Inferiores fueron establecidas por Croll y colaboradores, sustentadas en la característica que en las primeras etapas del comportamiento poscrítico se presenta un estado de deformación en el cual casi toda la energía membranar se ha perdido. Este hecho genera una importante caída en las cargas críticas obtenidas en el análisis de bifurcación clásico, producida principalmente por la presencia de imperfecciones iniciales y la interacción de modos poscríticos. La metodología de rigidez reducida propone reducir o eliminar la energía de deformación membranar lo que permitirá predecir una respuesta poscrítica que se aproxima por valores menores a la respuesta no lineal exacta.

Identificando las componentes membranales estabilizantes, que contribuyen positivamente a la energía potencial total, se plantea un nuevo problema de autovalores con las componentes membranales modificadas obteniendo cargas críticas reducidas que resultan ser límites

inferiores a las halladas con resultados experimentales o métodos computacionales más complicados. En el caso de eliminación completa de las componentes de energía membranar, la condición de punto crítico resulta:

$$[\mathbf{K}_b + \lambda^* \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{N}^F)]\Phi^* = 0 \quad (6)$$

donde  $\lambda^*$  y  $\Phi^*$  son el nuevo autovalor y autovector del problema de rigidez reducida. Las modificaciones afectan solamente a la matriz de rigidez lineal del sistema ( $\mathbf{K}_0$ ) que retiene solamente el aporte flexional, mientras que la matriz carga-geometría ( $\mathbf{K}_\sigma$ ) no cambia porque depende del estado precrítico y de las componentes no lineales del campo de tensiones y deformaciones.

Los autores mostraron en un trabajo anterior (Jaca y Godoy, 2007) que la alternativa de eliminar completamente todas las componentes membranales conduce a formas de modo no compatibles, principalmente en estructuras que presentan zonas con diferente rigidez o por la presencia de modos localizados. Si se considera en estos casos la estructura separada en dos zonas diferentes (zona 1 y zona 2), ya sea por tener diferente rigidez ( $t_1 < t_2$ ) o bien porque presenta mayores solicitaciones, la condición de punto crítico expresada en (2) resulta:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^M & \mathbf{K}_{12}^M \\ \mathbf{K}_{21}^M & \mathbf{K}_{22}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{K}_{12}^B \\ \mathbf{K}_{21}^B & \mathbf{K}_{22}^B \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G & \mathbf{K}_{12}^G \\ \mathbf{K}_{21}^G & \mathbf{K}_{22}^G \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

afectando tanto a las matrices de rigidez lineal y carga-geometría como al autovector. En estructuras de pared delgada la mayor rigidez es membranar y depende de  $t$ , mientras que la rigidez flexional resulta menor dependiendo de  $t^3$  ( $t \ll 1$  por ser cáscaras delgadas).

### 2.2.1 Rigideces diferentes

Si zona 2 es la de mayor rigidez por mayor espesor, entonces  $\mathbf{K}_{22}$  tiene elementos mayores que las otras submatrices resultando  $\Phi_2 \approx 0$  y la forma de modo solamente tiene componentes significativas en  $\Phi_1$ . El problema efectivo planteado en la ecuación (7) se reduce a:

$$[(\mathbf{K}_{11}^M + \mathbf{K}_{11}^B) + \lambda (\mathbf{K}_{11}^G)]\Phi_1 = 0 \quad (8)$$

En el problema de rigidez reducida, donde la reducción de la rigidez membranar se aplica de manera homogénea en toda la cáscara, desaparece  $\mathbf{K}_M$  por completo y el problema de autovalores resulta:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{K}_{12}^B \\ \mathbf{K}_{21}^B & \mathbf{K}_{22}^B \end{bmatrix} + \lambda' \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G & \mathbf{K}_{12}^G \\ \mathbf{K}_{21}^G & \mathbf{K}_{22}^G \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Phi_1' \\ \Phi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Los valores de la matriz  $\mathbf{K}_G$  no sufren ninguna reducción ya que dependen de los esfuerzos precríticos. Las submatrices  $\mathbf{K}_{22}^B$  y  $\mathbf{K}_{11}^B$  son del mismo orden y esto origina que  $\Phi_2' \neq 0$  y  $\Phi_1 \neq \Phi_1'$ . Aparece entonces una transferencia de deformaciones de la zona 1 a la zona 2 y pueden presentarse formas de modo asociadas a  $\lambda'$  con deformaciones por flexión que no son compatibles con las obtenidas en un análisis no lineal geométrico con seguimiento de trayectoria.

Si en cambio se reducen las componentes membranales de manera selectiva solamente en la zona menos rígida manteniendo todas las componentes de la energía en el resto de la cáscara, se obtiene:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{K}_{12}^B \\ \mathbf{K}_{21}^B & \mathbf{K}_{22}^B \end{bmatrix} + \lambda'' \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G & \mathbf{K}_{12}^G \\ \mathbf{K}_{21}^G & \mathbf{K}_{22}^G \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Phi_1'' \\ \Phi_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Como se mantiene intacta  $\mathbf{K}_{22}^M$ , que tiene mayores valores respecto a las submatrices asociadas a las componentes flexionales, entonces vuelve a ser  $\Phi_2'' \approx 0$  y el problema se compacta como:

$$\left( \mathbf{K}_{11}^B + \lambda'' \mathbf{K}_{11}^G \right) \Phi_1'' = 0 \quad (12)$$

El problema así planteado responde a lo observado, ya sea en análisis no lineal o en los ensayos, en cuanto a las formas de modo asociadas.

### 2.2.2 Modos localizados

El efecto de zonas diferenciadas también puede aparecer cuando, por la acción de las cargas exteriores, se generan zonas con diferente magnitud de esfuerzos con la aparición de modos con deformaciones localizadas en esas regiones, como ocurre por acción del viento. Llamando zona 1 en este caso a la zona a barlovento, que presenta mayores esfuerzos y deformaciones, se genera una distorsión en la matriz de estados precríticos  $\mathbf{N}^F$  donde la submatriz  $\mathbf{K}_{11}^G \gg \mathbf{K}_{22}^G$ . La matriz  $\mathbf{K}_0$  no presenta alteraciones porque no hay cambios relativos de rigidez por lo que la ecuación (7) resulta de la forma:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^0 & \mathbf{K}_{12}^0 \\ \mathbf{K}_{21}^0 & \mathbf{K}_{22}^0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

con lo que el autovector  $\lambda$  queda asociado a  $\Phi_1$ :

$$\left( \mathbf{K}_{11}^0 + \lambda \mathbf{K}_{11}^G \right) \Phi_1 + \mathbf{K}_{12}^0 \Phi_2 = 0 \quad (14)$$

resultando nuevamente que  $\Phi_2 \approx 0$ , ya que  $\mathbf{K}^0$  no tiene modificaciones y el problema es similar al planteado en (8).

En el problema de rigidez reducida, cuando se elimina toda  $\mathbf{K}^M$  se modifican las relaciones entre términos de zonas 1 y 2 en la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^0$  original del sistema y ahora sí resulta  $\Phi_2 \neq 0$ , apareciendo nuevamente una transferencia de deformaciones que no concuerda con las evidencias de daño.

Si por el contrario se plantea una reducción selectiva de las componentes membranales, nuevamente como  $\mathbf{K}_{22}^M$  no desaparece en  $\mathbf{K}_0$  pero sí las otras, resulta  $\Phi_2 \approx 0$  obteniéndose formas de modo aceptables sin traspaso de deformaciones a zonas inactivas.

## 3 MODELO NUMÉRICO

La implementación del modelo de rigidez reducida mediante Elementos Finitos se realiza mediante el código ALREF (Flores, 1990, Flores y Godoy, 1991) en el cual se han realizado modificaciones para incorporar la evaluación de las diferentes componentes de energía y el cálculo de autovalores con la energía reducida. Este código utiliza un elemento curvo unidimensional semianalítico que discretiza la cáscara en al sentido del meridiano y representa el comportamiento del paralelo mediante series de Fourier. El análisis no lineal geométrico con seguimiento de trayectoria incluyendo imperfecciones geométricas se realiza mediante el programa de propósitos generales ABAQUS (2002) usando elementos de cáscaras. En ambos casos se utilizan mallas lo suficientemente densas para asegurar la

convergencia.

La distribución de presión de viento adoptada sobre las paredes cilíndricas del tanque corresponde a la expresión (Rish, 1967):

$$p = \lambda \sum_{i=1}^n c_i \cos(i\theta) \quad (15)$$

con los siguientes coeficientes de Fourier:  $c_0 = 0.387$ ,  $c_1 = -0.338$ ,  $c_2 = -0.533$ ,  $c_3 = -0.471$ ,  $c_4 = -0.166$ ,  $c_5 = 0.066$ ,  $c_6 = 0.055$ , donde  $p$  es la presión externa del viento y  $\theta$  es el ángulo con respecto a la dirección del viento. Se considera una distribución de presión constante en la dirección vertical. Para las presiones que actúan en el techo se considera una distribución de presiones obtenidas en ensayos de túnel de viento por Macdonald et al. (1988), que son similares a las presentadas por Portela y Godoy (2005). La Figura 1(a) muestra la distribución de viento usada en el techo y la Figura 1(b) la distribución sobre la cáscara cilíndrica.

En el análisis de estabilidad, los valores de las presiones que actúan en la cáscara completa se aumentan usando el parámetro de carga  $\lambda$ .

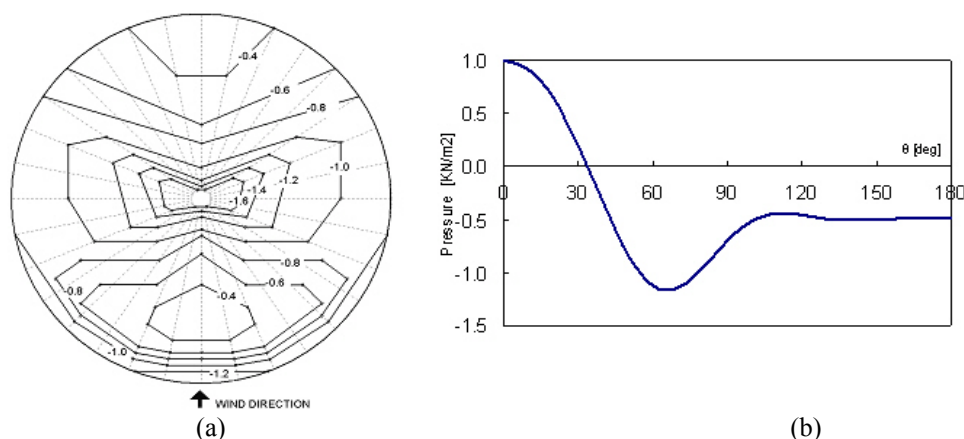


Figura 1: Distribución de presión de viento (a) en el techo; (b) alrededor del cilindro.

#### 4 METODOLOGIA DE VALIDACION

La validación propiamente dicha (Lecompte, 2003) consiste en construir una representación correcta del problema planteado. Este proceso de validación, mediante comparaciones con resultados disponibles en la literatura, puede ser a través de comparaciones con otros soluciones numéricas, con soluciones analíticas, con resultados experimentales o con benchmarks (Dardati y Godoy, 2001). En este trabajo se usa como metodología de validación las comparaciones con resultados obtenidos con otros códigos y con datos experimentales que surgen de ensayos en túnel de viento ó ensayos bajo vacío interior.

Si bien el objetivo es aplicar esta metodología para cargas no axilimétricas, como las de viento, se pretende cubrir también con la validación casos de cargas axilimétricas presentados en trabajos vinculados a la temática. En trabajos presentados anteriormente por los autores (Jaca, Godoy y Flores, 2005, Jaca, Sosa y Godoy, 2006, Jaca y Godoy, 2007) se verificaron algunos casos de estudio con el objetivo de ir validando la metodología y poder seguir avanzando en su implementación. En todos estos trabajos las estructuras estudiadas corresponden a tanques de almacenamiento de fluidos de grandes dimensiones.

Con el objeto de validar el modelo de rigidez reducida de la cáscara implementado en el código de propósitos específicos (ALREF) se comparan los resultados hallados con los

obtenidos con otras metodologías, como es la de energía reducida o con un análisis no lineal con seguimiento de trayectoria considerando imperfecciones geométricas implementado en un código de propósitos generales (ABAQUS). Además como una forma de analizar si los resultados del modelo concuerdan con la realidad representada, se hacen comparaciones con resultados experimentales. Para verificar el comportamiento bajo cargas no axilsimétricas, se recurre a resultados de ensayos en túnel de viento provenientes de distintos autores (Kundurpi et al., 1975, Schmidt et al., 1998, Resinger and Greiner, 1982), y a resultados de ensayos realizados sobre tanques reales sometidos a vacío interior (Hornung and Saal, 2002).

Los casos de estudio seleccionados permiten comparar resultados relativos a tanques de diferentes características: tanques con techo plano, esférico y cónico, y tanque con techo plano flotante analizados sin contenido interior porque esa situación es la más desfavorable, ya que el líquido ejerce un efecto estabilizante. Además, en algunos casos la cáscara cilíndrica presenta espesor variable y en otros el espesor es constante, sometidos a cargas axilsimétricas (vacío interior) o no axilsimétricas (viento), estos casos permiten verificar ambas problemáticas presentadas anteriormente.

## 5 TANQUES BAJO CARGAS AXILSIMÉTRICAS

En estos casos de estudio, al ser las cargas axilsimétricas, la respuesta de la estructura también es axilsimétrica y no aparecen modos localizados por la presencia de zonas con mayor nivel de esfuerzos. La problemática que se presenta es la asociada a la existencia de zonas de diferente rigidez por espesores diferentes. En el diseño de tanques contenedores de fluidos es frecuente que los espesores resultan escalonados reduciéndose al aumentar la altura, con zonas menos rígidas en la zona próxima al techo.

### 5.1 Tanque con techo flotante de espesor variable

Sosa y Godoy (2006) estudiaron por la metodología de energía reducida un tanque cilíndrico típico sin techo, ya que no se considera el fluido interior, con espesor variable y condición de empotrado en la base y libre en el extremo superior sometido a carga radial uniforme. El modelo es analizado mediante un programa de propósitos generales usando una modelación de elementos finitos con elementos de cáscara. En este caso el código (ABAQUS, 2002) no permite calcular las componentes de energía pero sí la energía total y la carga crítica, para posteriormente plantear la metodología de energía reducida como una manera para la evaluación de las cargas límites inferiores. También en dicho trabajo se presentan resultados de análisis no lineal con imperfecciones geométricas con la forma del primer modo crítico.

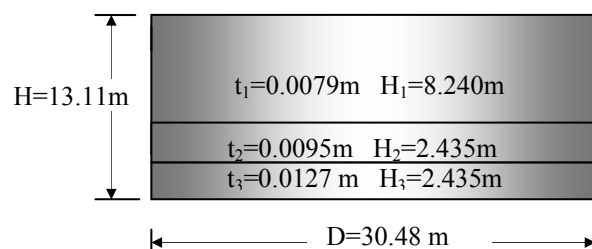


Figura 2: Estructura temática estudiada ( $r/t=1950$ ,  $H/D=0.43$ ).

Este tanque es analizado mediante rigidez reducida para comparar resultados y validar la metodología. La estructura tiene un diámetro ( $D$ ) de 30.48 m, altura ( $H$ ) de 13.11 m y espesor variable como se muestra en la Figura 2. El material constitutivo es acero con módulo de

elasticidad de 206 MPa y módulo de Poisson de 0.3, como en todos los casos estudiados.

Al estudiar las componentes de energía con ALREF se obtiene un espectro similar a casos estudiados anteriormente (Jaca, Godoy, Flores y Croll, 2007) con componentes membranales positivas en el modo crítico, es decir todas estabilizantes, y una carga crítica de 884 N/m<sup>2</sup> para 16 ondas circunferenciales. En un trabajo anterior (Jaca y Godoy, 2007), los autores mostraron que la reducción completa de la energía membranal en la zona de menor rigidez presenta formas de modo no compatibles como se puede observar en la Figura 3(a). Por esta razón proponen realizar una reducción parametrizada de toda la componente membranal a través de la reducción  $(1-\alpha)U_m$  afectando solamente a la zona de menor espesor  $t_1$ . A efectos de realizar una comparación se presenta en la Figura 3(a) la forma de modo obtenida con el análisis clásico de autovalores y autovectores con todas las componentes de energía ( $U_{comp}$ ) y las obtenidas planteando la eliminación gradual de todas las componentes membranales llegando a la eliminación total ( $U_m=0$  en  $t_1$ ), indicando las cargas críticas halladas en cada caso. Se observa que las cargas críticas disminuyen al aumentar la reducción parametrizada y para reducciones importantes de energía membranal (mayores a 0.001  $U_m$ ), la forma de modo se aparta de la observada en el análisis no lineal. Aún para valores del parámetro de reducción  $\alpha > 0.85$ , las cargas críticas se mantienen casi constantes en el orden de 680 N/m<sup>2</sup>, como se muestra en la Figura 3 (b), por lo que este valor se puede tomar como límite inferior.

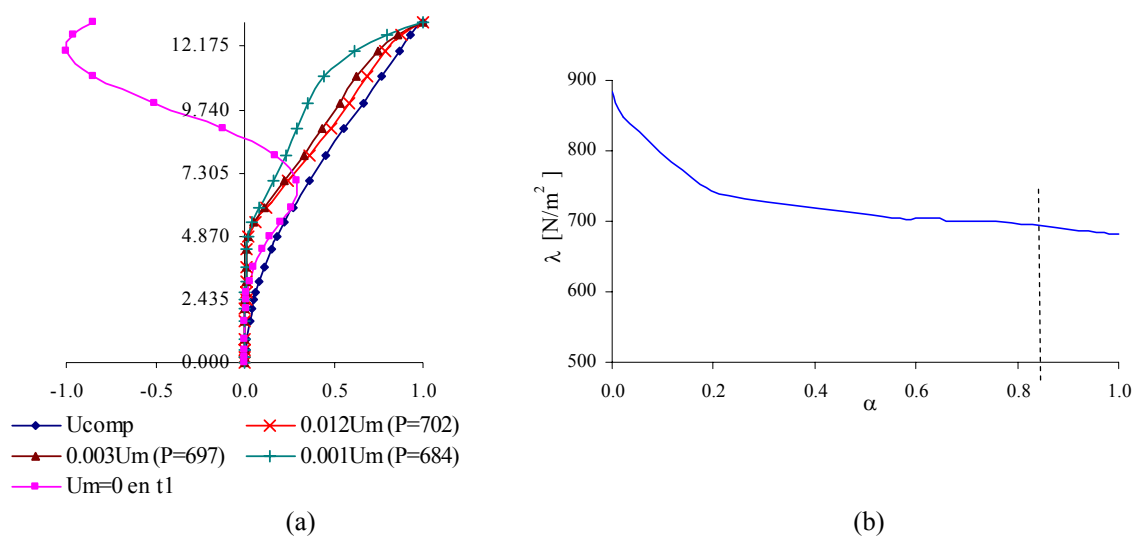


Figura 3: Reducción parametrizada de toda la rigidez membranal ( $r/t=1950$ ,  $H/D=0.43$ ),  
(a) Formas de modo, (b) Variación de cargas críticas.

Vinculando la carga crítica hallada con energía reducida con la hallada en el análisis de bifurcación, se define el factor de reducción ( $\eta$ ). En el trabajo realizado por Sosa y Godoy se obtiene un valor de factor de reducción  $\eta=0.76$  mediante un análisis no lineal con imperfecciones y  $\eta=0.77$  mediante la metodología de energía reducida. En este estudio, la carga crítica hallada con eliminación total de la componente membranal en la zona de menor espesor es de 621 N/m<sup>2</sup> que representa un factor de reducción  $\eta=0.70$  pero que no aproxima bien la forma de modo. Con la reducción parametrizada se obtiene una carga crítica de 680 N/m<sup>2</sup> con una buena aproximación de la forma de modo y que lleva a un factor de reducción  $\eta=0.77$  del orden de los hallados con las otras metodologías en el trabajo de referencia. Es decir que, los resultados obtenidos con la reducción parametrizada en la zona de menor espesor son del orden de los hallados con las otras metodologías numéricas.



## 5.2 Tanques con techo cónico de espesor variable

En esta sección se estudian un conjunto de tanques con techo cónico ya analizados por Sosa y Godoy (2006) bajo carga radial uniforme, con análisis de energía reducida, y también los autores (2007) por rigidez reducida bajo viento. Estos casos resultan de interés ya que permiten verificar el modelo de rigidez reducida en estructuras de tanques con techo que presentan zonas de diferente rigidez que ya han sido estudiados con otra metodología. Los seis modelos (identificados como MC1, MC2, MC3, MC4, MC5 y MC6) elegidos para el análisis tienen el mismo diámetro de 30.48 m y se suponen construidos usando virolas de acero de 2.438 m de altura. La parte cilíndrica de cada modelo tiene diferente altura con relaciones de aspecto altura del cilindro-diámetro (H/D) variando de 0.24 a 0.95, con un espesor de la cáscara cilíndrica reducido gradualmente mediante el método de un pie especificado en la Norma API 650 Sección 3.6.3 (1988). En particular, los modelos MC2, MC4 y MC6 son los analizados por Sosa y Godoy (2006) bajo carga radial uniforme, mediante análisis no lineal con imperfecciones y mediante energía reducida.

Todos los modelos tienen un techo fijo cónico reforzado por 32 vigas con una pendiente de techo de 3/16 y un espesor de 0.007m, el cilindro se considera empotrado en la base. La Tabla 1 resume los espesores adoptados para las diferentes virolas de todos los tanques estudiados.

Virola	MC1	MC2	MC3	MC4	MC5	MC6
	t diseño [m]	t diseño [m]	t diseño [m]	t diseño [m]	t diseño [m]	t diseño [m]
1	0.0095	0.0127	0.0175	0.0206	0.0254	0.0286
2	0.0079	0.0111	0.0159	0.0175	0.0222	0.0254
3	0.0079	0.0079	0.0127	0.0159	0.0206	0.0254
4		0.0079	0.0111	0.0127	0.0175	0.0222
5		0.0079	0.0095	0.0111	0.0159	0.0206
6			0.0079	0.0079	0.0127	0.0191
7			0.0079	0.0079	0.0111	0.0159
8				0.0079	0.0079	0.0127
9					0.0079	0.0111
10					0.0079	0.0079
11						0.0079
12						0.0079

Tabla 1: Espesores adoptados para cada modelo.

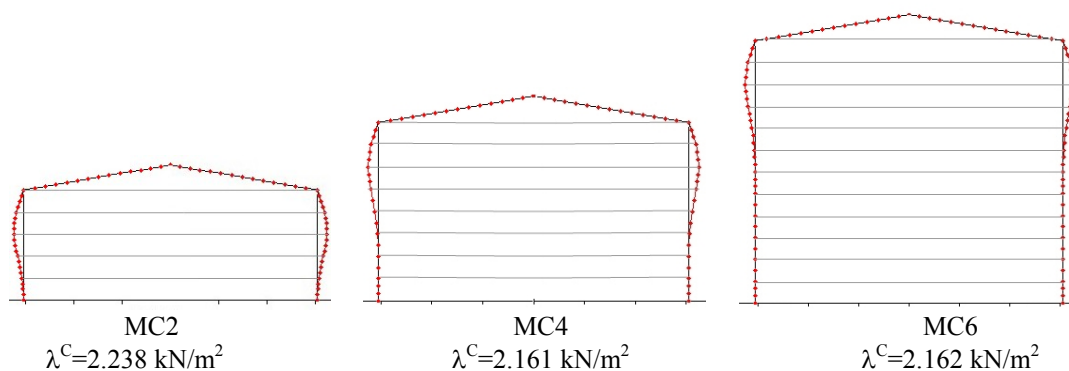


Figura 4: Formas de modo bajo vacío interior.

Las formas de modos obtenidas se presentan en la Figura 4 junto con las cargas críticas halladas en cada caso. En los modelos más bajos (MC1 y MC2) la forma de modo es global

tanto en el sentido meridional como circunferencial extendiéndose a toda la cáscara. Al aumentar la relación H/D, si bien en el sentido circunferencial continúa teniendo una distribución similar con un número de ondas alto ( 21 ondas circunferenciales), en el sentido meridional la zona más afectada por las deformaciones se va desplazando hacia el techo y se concentra en la zona de menores espesores. Los valores de carga crítica y formas de modo halladas son compatibles con las obtenidas por Sosa y Godoy (2006).

En la Figura 5(a) se muestran las formas de modo obtenidas con todas las componentes de energía membranal y también las alcanzadas eliminando sucesivamente alguna de las componentes membranales hasta llegar a la eliminación completa en la zona de menor espesor. En la Figura 5(b) se presentan las deformadas generadas con una reducción parametrizada de todas las componentes membranales. Al eliminar sucesivamente las diferentes componentes membranales o bien con una reducción parametrizada de la energía membranal, las cargas críticas van disminuyendo con las sucesivas reducciones y las formas de modo se mantienen aceptables mientras que el conjunto retenga algo del comportamiento membranal. La reducción de dos de las componentes membranales solamente proporciona formas de modo adecuadas pero se obtienen cargas críticas menores con deformadas también aceptables planteando una reducción parametrizada en la zona de menores espesores. Se observa que las formas de modo son razonables para reducciones del orden de 0.0005Um, pero para reducciones mayores ya se va apartando de esa forma y se acerca a la generada con Um=0 que no es compatible con la obtenida en el análisis no lineal.

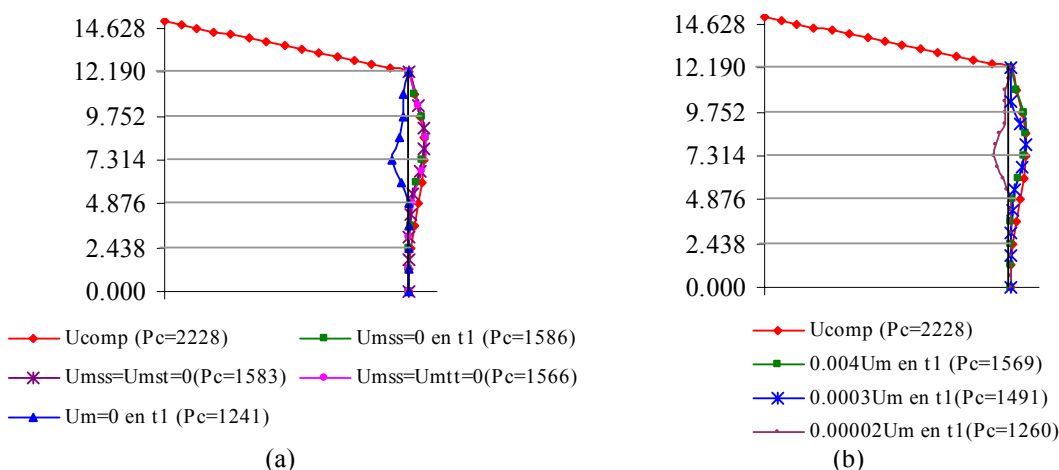


Figura 5: Formas de modo para modelo MC2 (a) Reducción en  $t_1$  de componentes membranales, (b) Reducción parametrizada  $(1-\alpha)U_m$  en  $t_1$ .

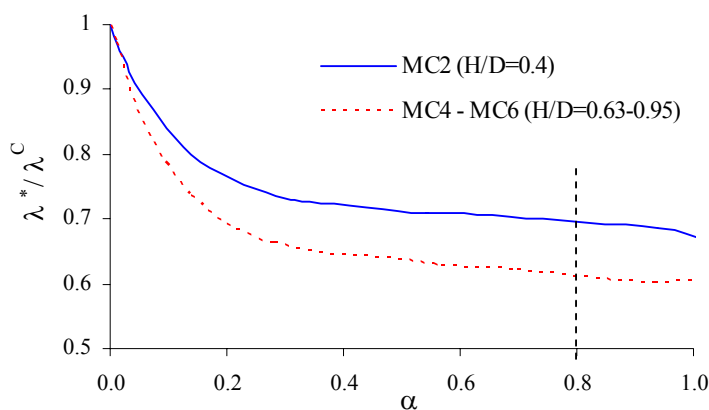


Figura 6: Variación del cargas críticas en función del parámetro de reducción ( $\lambda^C=2.24 \text{ kN/m}^2$  para MC2,  $\lambda^C=2.16 \text{ kN/m}^2$  para MC4 y MC6).

A medida que aumenta el parámetro de reducción ( $\alpha$ ) las cargas críticas tienden a un valor determinado y finalmente cuando  $\alpha$  es muy próximo a 1 toman el valor obtenido con  $U_m=0$  pero con una forma de modo no compatible con lo observado en el análisis no lineal. La Figura 6 muestra la variación del factor de reducción ( $\eta$ ) al variar el parámetro de reducción ( $\alpha$ ). Si se consideran valores de  $\alpha$  mayores a 0.8, el factor de reducción se mantiene del orden de 0.69 para MC2 y del orden de 0.63 para MC4 y MC6. Sosa y Godoy (2006) obtuvieron valores de  $\eta$  del orden de 0.77 para MC2 y 0.74 para MC4 y MC6 con la metodología de energía reducida, y  $\eta=0.73$  para todos los modelos mediante análisis no lineal considerando imperfecciones geométricas de amplitud igual al menor espesor de la cáscara cilíndrica. Los coeficientes de reducción encontrados con esta metodología de rigidez reducidas son inferiores a los hallados con las otras metodologías representado límites inferiores a las cargas críticas con formas de modo aceptables.

### 5.3 Tanques con techo esférico

Hornung y Saal (2002) presentaron un conjunto de ensayos realizados sobre tanques reales con techo esférico, cuyos diámetros varían entre 10 y 70 m, sometidos a vacío interior. En este trabajo, los autores contrastaron los resultados obtenidos mediante los ensayos con las especificaciones dadas en diferentes códigos en relación a cargas críticas de pandeo y tolerancia en las imperfecciones geométricas. Las estructuras son ensayadas hasta el colapso indicando las cargas para las cuales aparecen las primeras evidencias de pandeo y las cargas de colapso, junto con el número de ondas circunferenciales que se presentan en cada caso.

Uno de los tanques ensayados tiene un radio de 5 m, una altura de 13.29 m y un espesor constante de 0.01m en la cáscara cilíndrica sin rigidizadores, resultando  $L/r=2.66$  y  $r/t=500$ . El material es acero y la carga de vacío se aplica por evacuación de aire del interior del tanque. En el trabajo se indica que el pandeo ocurre a una carga de  $11.6 \text{ kN/m}^2$  con seis ondas circunferenciales en la cáscara cilíndrica y la falla de toda la estructura del tanque se produce a  $11.8 \text{ kN/m}^2$  con cinco ondas circunferenciales.

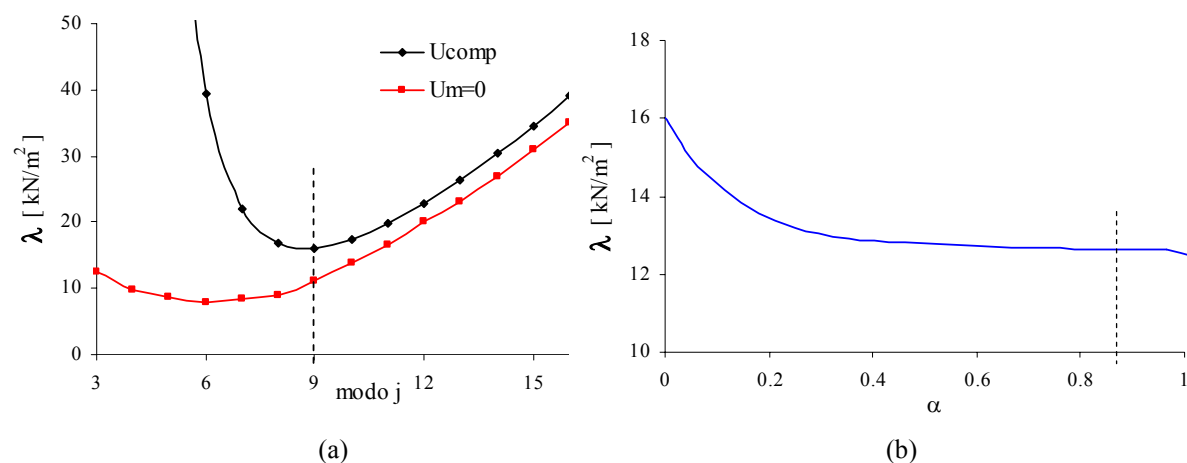


Figura 7: Análisis de energía reducida ( $L/r=2.66, r/t=500$ ); (a) Espectro de cargas críticas, (b) Variación de las cargas críticas en función del parámetro de reducción

El espectro de cargas críticas hallado mediante ALREF se muestra en la Figura 7 (a) con un mínimo de  $16.1 \text{ kN/m}^2$  para nueve ondas circunferenciales ( $j=9$ ), junto con la distribución de cargas críticas obtenida con la eliminación de todas las componentes membranales. Al eliminar completamente la energía membranal para  $j=9$  se obtiene una carga crítica de  $11.1 \text{ kN/m}^2$  del orden de la obtenida en los ensayos pero con una forma de modo no adecuada

como en los casos anteriores. Al plantear una reducción parametrizada de todas las componentes membranales en toda la cáscara cilíndrica los valores de carga crítica se aproximan a un valor de  $12.6 \text{ kN/m}^2$  como se muestra en la Figura 7(b), superior al hallado en los ensayos, con formas de modo acordes a lo observado. En el trabajo de referencia se indica que para este tanque no se hicieron mediciones de magnitud de imperfecciones. Este podría ser el motivo por el cual los valores obtenidos con la metodología de rigidez reducida no son límites inferiores, ya que si las amplitudes de imperfección fueran significativas respecto al espesor de la cáscara el comportamiento de la estructura podría diferir con respecto a la estructura original.

En este caso la reducción completa de todas las componentes membranales aproxima bien la carga crítica del ensayo, pero la forma de modo obtenida no es adecuada tanto en el meridiano como en el paralelo si se toma como referencia el número de ondas correspondiente al punto crítico. Esa diferencia en la cantidad de ondas circunferenciales observadas en el ensayo con respecto al modelo numérico puede originarse en la presencia de imperfecciones de amplitud alta y formas diferentes a la del primer modo crítico.

Otro de los tanques estudiados tiene un radio de  $5.75 \text{ m}$  y una altura de  $10 \text{ m}$  ( $L/r=1.74$  y  $r/t=1150$ ), con 4 virolas de  $1.665 \text{ m}$  de altura con espesor  $t=0.005 \text{ m}$  en la parte superior y dos virolas inferiores de espesor  $t=0.006 \text{ m}$  y  $t=0.007 \text{ m}$  respectivamente. El techo también es un casquete esférico y el material es acero.

En este caso se midieron imperfecciones respecto a la geometría perfecta en el fondo del tanque y en la cáscara cilíndrica, resultando que la máxima desviación en dirección perpendicular a la envolvente es de  $33.4 \text{ mm}$  que representa un valor 6.6 veces el menor espesor ( $\xi/t=6.6$ ). Este es un nivel de imperfección alto que genera que la respuesta de la estructura en el proceso de aplicación de la carga sea diferente a la correspondiente a la geometría original con imperfecciones de pequeña magnitud. Esto queda en evidencia al realizar un análisis de seguimiento de trayectoria considerando no linealidad geométrica con imperfecciones de diferentes amplitudes.

La descripción del ensayo reportado en el trabajo de referencia es la siguiente: a una presión de  $1.36 \text{ kN/m}^2$  aparece los primeros indicios de pandeo con siete ondas circunferenciales, al continuar aplicando vacío interior se marca más el patrón de pandeo y se incrementan las deformaciones hacia adentro en las ondas generándose una especie de columnas con sección transversal en punta en esa zona. La falla de esas columnas se produce con una carga de  $2.78 \text{ kN/m}^2$ . Posteriormente la carga todavía puede ser incrementada con grandes deformaciones en el tanque apareciendo una cierta torsión de estas especies de columnas que se forman. El ensayo finalizó a una carga de  $4.95 \text{ kN/m}^2$ , quedando el tanque completamente deformado con grandes deformaciones plásticas y fisuras en las aristas que se forman.

La carga crítica clásica obtenida por análisis de bifurcación es de  $3.04 \text{ kN/m}^2$  con una deformada con 13 ondas circunferenciales en el sentido circunferencial, estos valores resultaron similares al realizar el cálculo tanto con un programa de propósitos específicos (ALREF) como con uno de propósitos generales (ABAQUS), nuevamente se presenta una diferencia respecto a lo registrado en el ensayo con respecto a la cantidad de ondas circunferenciales de la deformada.

Se realiza un análisis no lineal con seguimiento de trayectoria considerando imperfecciones iniciales con la forma del primer modo y variando la magnitud de la imperfección para estudiar el comportamiento de la estructura en el proceso del ensayo. El modelo usado en ABAQUS no considera el techo porque éste sufre pequeños desplazamientos y su modelación requeriría un aumento considerable en el tiempo de cálculo

empleado debido al aumento de la cantidad de elementos necesarios. En su defecto se consideró la cáscara cilíndrica como simplemente apoyada ya que no se producen diferencias significativas en su respuesta ni en los valores de cargas críticas clásicas. La Figura 8 muestra las curvas carga-desplazamiento obtenidas para la estructura en estudio con diferentes amplitudes de imperfecciones con la forma del primer modo crítico.

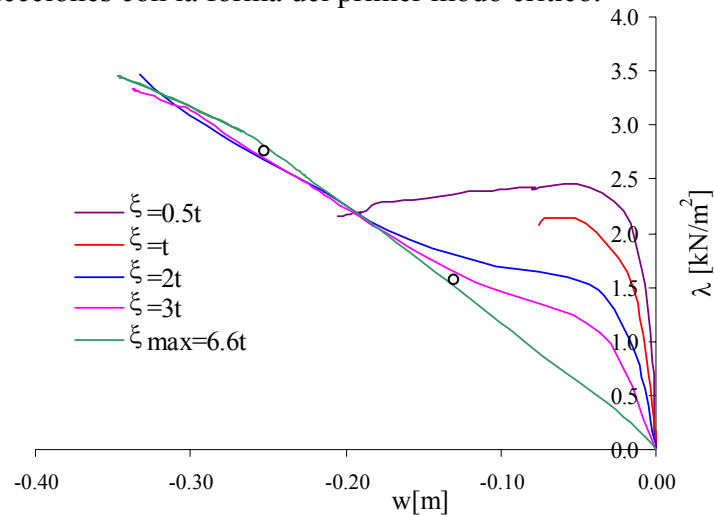


Figura 8: Análisis no lineal geométrico para tanque con  $L/r=1.74$  y  $r/t=1150$ . Curva carga-desplazamiento del nodo de mayor desplazamiento, ubicado a  $2/3L$  desde el fondo.

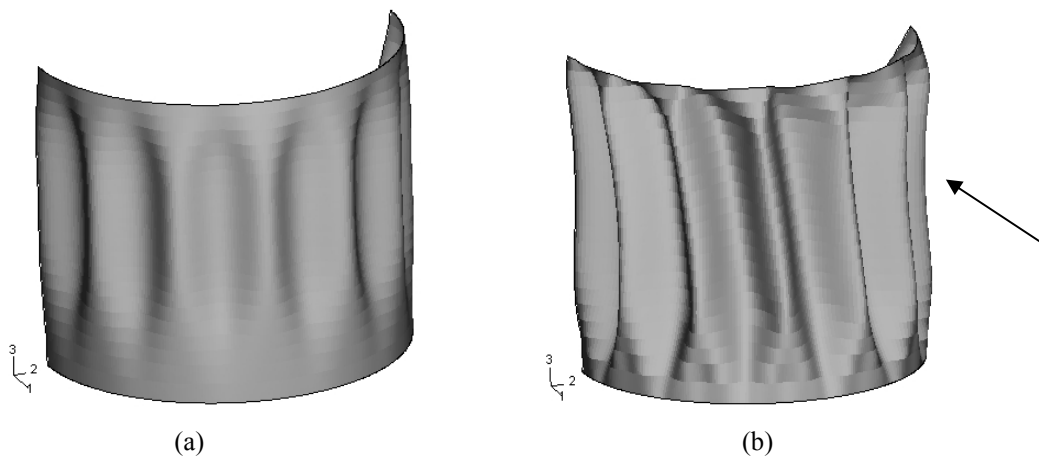


Figura 9: Deformadas obtenidas en el proceso de carga; (a) Primeros indicios de pandeo, (b) Etapa de deformación avanzada.

Al aumentar la magnitud de la imperfección las cargas máximas van disminuyendo, para una amplitud mayor al espesor de la cáscara se presenta un cambio de comportamiento en la respuesta de la estructura, alcanzando para esa magnitud de imperfección ( $\xi/t=1$ ) una carga máxima de  $2.1 \text{ kN/m}^2$ . Para amplitudes mayores al espesor de la cáscara ya no se presenta un máximo en la respuesta sino que la estructura continúa tomando cargas con mayores desplazamientos, como se muestra en las curvas correspondientes a  $\xi=2t$ ,  $\xi=3t$  y  $\xi=6.6t$ . En la curva correspondiente a la amplitud máxima medida e indicada en el trabajo de referencia,  $\xi=6.6t$ , se observa un leve cambio de comportamiento en los puntos indicados sobre la curva. En el punto correspondiente a una carga de  $1.51 \text{ kN/m}^2$  aparecen las primeras ondas similares al modo crítico como se muestra en la Figura 9(a), al continuar el proceso de carga aumentan los desplazamientos hacia adentro de las ondas circunferenciales formándose esas especies de

columnas y para cargas mayores a  $2.7 \text{ kN/m}^2$  las columnas comienzan deformarse y torsionarse como lo muestra la Figura 9(b). El modelo considerado en ABAQUS para realizar este seguimiento de trayectoria no incluye plasticidad por eso el proceso de carga no sigue mas allá de  $3.5 \text{ kN/m}^2$ , mientras que en el ensayo se puede continuar con valores mayores de carga apareciendo importantes deformaciones plásticas.

Los resultados obtenidos con el proceso de seguimiento de trayectoria reproducen la descripción del ensayo, salvo que los primeros indicios de pandeo aparecen a una carga algo más baja en el ensayo. Esto puede ser producido porque el patrón de imperfecciones mostrado en el trabajo no es exactamente según la forma del primer modo crítico, como se consideró en el estudio no lineal geométrico.

Al realizar un estudio de rigidez reducida se obtienen cargas críticas para las sucesivas eliminaciones de contribuciones membranales como las mostradas en la Tabla 2. El valor obtenido con la reducción de toda la energía membranar es de  $1.91 \text{ kN/m}^2$  que es mayor al hallado en el ensayo. Esta diferencia puede originarse en el hecho que la estructura ensayada presenta imperfecciones de magnitud importante frente al espesor de la cáscara generando una estructura diferente a la analizada con rigidez reducida donde se considera la geometría perfecta.

$\lambda$ [kN/m <sup>2</sup> ]	Umss=0		Umss=Umst=0		Um=0	
	$\lambda^*$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$\eta$	$\lambda^*$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$\eta$	$\lambda^*$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$\eta$
3.04	2.18	0.717	2.17	0.714	1.91	0.638

Tabla 2: Análisis de rigidez reducida para el tanque con  $L/r=1.74$  y  $r/t=1150$ .

El valor hallado con eliminación completa de las contribuciones membranales,  $\lambda^*=1.91 \text{ kN/m}^2$ , representa un límite inferior para la estructura perfecta con respecto al valor hallado en el análisis no lineal con una amplitud de imperfección igual al espesor de la cáscara,  $\lambda^{\max}=2.1 \text{ kN/m}^2$ . Para mayores amplitudes de imperfección, la estructura se aparta tanto de la geometría original que presenta un comportamiento diferente como el exhibido en el análisis no lineal y en el ensayo. Estos dos ensayos sobre estructuras reales son particulares porque las estructuras presentan un importante nivel de imperfecciones iniciales, que superan los valores admitidos por los códigos. Aún así los valores encontrados no son tan diferentes a los reportados en los ensayos.

## 6 TANQUES BAJO CARGAS NO AXILSIMÉTRICAS

La problemática que se presenta frente a cargas no axilsimétricas, como las de viento, es la presencia de zonas inactivas, por localización de modos con bajo nivel de desplazamientos y esfuerzos, generando una transferencia de deformaciones de la zona con mayores desplazamientos hacia el resto de la estructura, que se suma a la transferencia de deformaciones en el meridiano que aparece por zonas con diferente rigidez. En este punto se pretende verificar la metodología de rigidez reducida en relación a las problemáticas mencionadas anteriormente, comparando cargas críticas con las halladas por otros procedimientos numéricos, como análisis no lineal con seguimiento de trayectoria, o con algunos resultados de ensayos en túnel de viento disponibles en la literatura.

### 6.1 Tanques con techo flotante

En trabajos anteriores (Jaca, Godoy y Flores, 2005) se verificaron con conjunto de tanques estudiados por Flores y Godoy (2002) con análisis no lineal. Estos tanques presentan espesor

constante en toda la altura y las cargas críticas halladas con la metodología de rigidez reducida representaban un límite inferior a las halladas con ese otro procedimiento numérico. En ese trabajo se planteaba la reducción sucesiva de todas las componentes membranales, pero al indagar en las formas de modo asociadas se observan deformaciones circunferenciales por flexión que no son compatibles con las obtenidas en un análisis no lineal geométrico.

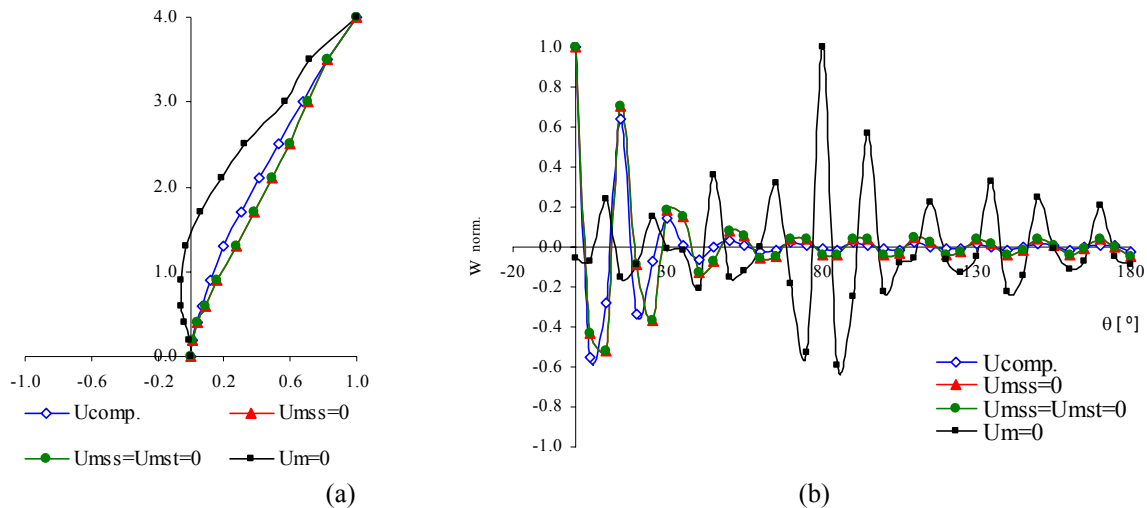


Figura 10: Formas de modo con reducción de toda la rigidez membranal para el modelo M1 ( $L/r=0.33$ ,  $r/t=2000$ ), (a) en el meridiano, (b) en el paralelo.

Uno de los modelos estudiados, identificado como M1, tiene una altura ( $L$ ) de 4 m, radio ( $r$ ) de 12 m y espesor ( $t$ ) de 0.006m. La Figura 10 muestra la forma de modo correspondiente a ese modelo asociada al modo clásico y las obtenidas con la reducción sucesiva de las diferentes contribuciones membranales. Al plantear la reducción de las componentes membranales sucesivamente hasta la eliminación completa se observa que la deformada en el meridiano mantiene una forma de modo similar al modo clásico mientras que en el paralelo la forma se aparta de la esperada al eliminar completamente el aporte membranal ( $U_m=0$ ). Así aparecen desplazamientos importantes fuera del sector a barlovento producido por ese traspaso de desplazamientos desde las zonas con mayores esfuerzos a aquellas con bajo nivel de desplazamientos. En los otros modelos aparece un comportamiento similar.

Un análisis alternativo es considerar que la rigidez reducida se aplica de manera selectiva, eliminando solamente las componentes membranales asociadas a la zona donde el modo crítico tiene desplazamientos significativos. Esta alternativa requiere una eliminación diferenciada de las contribuciones membranales en el sentido del paralelo que la modelación axilsimétrica del código ALREF no lo permite, ya que este programa modela la estructura mediante elementos curvos unidimensionales en el meridiano y extiende los desplazamientos en el paralelo mediante series de Fourier.

Sin embargo planteando una reducción parametrizada de las componentes membranales,  $(1-\alpha)U_m$ , en toda la cáscara se obtienen formas de modo asociadas que son compatibles con las formas esperadas en el meridiano, tendiendo a la obtenida con reducción membranal total. En el paralelo hasta un cierto nivel de reducción las formas de modo halladas son adecuadas pero para reducciones mayores se presenta esa transferencia de componentes de desplazamientos que produce formas no compatibles. Este efecto se puede observar en la Figura 11, donde se muestra la deformada en el meridiano, en el paralelo y en la Figura 12, la variación de las cargas críticas con el parámetro de reducción ( $\alpha$ ) para el caso estudiado.

Se observa que en el caso del modelo M1 las cargas críticas tienen formas de modo

asociadas no compatibles para valores del parámetro  $\alpha > 0.81$  correspondientes a cargas críticas  $\lambda^* < 1210 \text{ N/m}^2$ . Los valores del factor de reducción ( $\eta$ ) obtenidos con esa carga crítica con reducción parametrizada es  $\eta = 0.526$ . Este valor también resulta un límite inferior a los valores obtenidos con análisis no lineal, a pesar de ser algo superior que el hallado con reducción membranal completa.

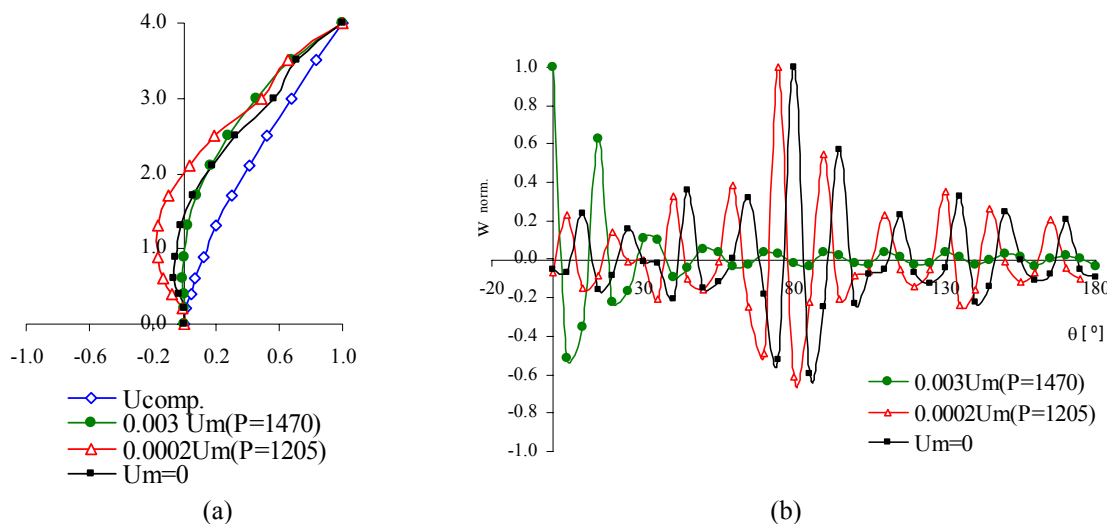


Figura 11: Formas de modo con reducción parametrizada de toda la rigidez membranal, (a) en el meridiano, (b) en el paralelo.

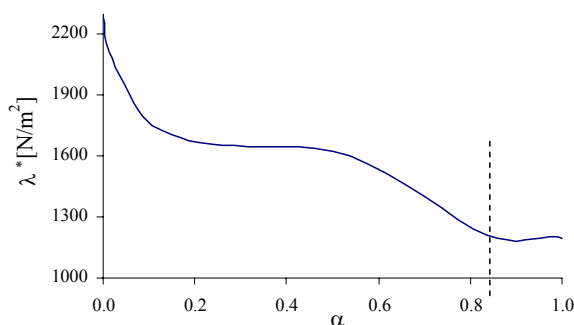


Figura 12: Variación de cargas críticas en función del parámetro de reducción.

En la bibliografía se presentan algunos resultados de ensayos realizados en túnel de viento. Las dimensiones de los modelos ensayados presentan relaciones de aspecto,  $L/r$  y  $r/t$ , diferentes a las de estructuras reales. La comparación entre las diferentes geometrías se facilita usando el parámetro de Batdorf ( $Z$ )

$$Z = \frac{L^2}{rt} \sqrt{1 - \nu^2} \quad (16)$$

Kundurpi et al. (1975) presentó ensayos con  $L/r=3$ ,  $L/r=2$ ,  $L/r=3/2$  y  $L/r=1$  y relaciones de espesor  $r/t=363$ ,  $r/t=476$  y  $r/t=555$ , para los cuales el parámetro  $Z$  resulta  $Z=442$ ,  $Z=812$ ,  $Z=1443$ ,  $Z=1776$ ,  $Z=2117$ ,  $Z=3247$  y  $Z=3975$ . Schmidt et al. (1998) mostraron resultados de ensayos para relaciones  $L/r=1$  y  $r/t=2500$  con  $Z=2368$ .

En la Figura 13 se muestran los resultados de las estructuras mencionadas calculadas con la metodología de energía reducida junto con los obtenidos en los ensayos, para un rango de geometrías con  $Z$  comprendido entre 200 y casi 5000. Los resultados informados por Flores y Godoy (2002) provenientes del análisis no lineal son presentados también en la Figura 13,



incluyendo imperfecciones con amplitud de  $2t$  (dos veces el espesor de la cáscara).

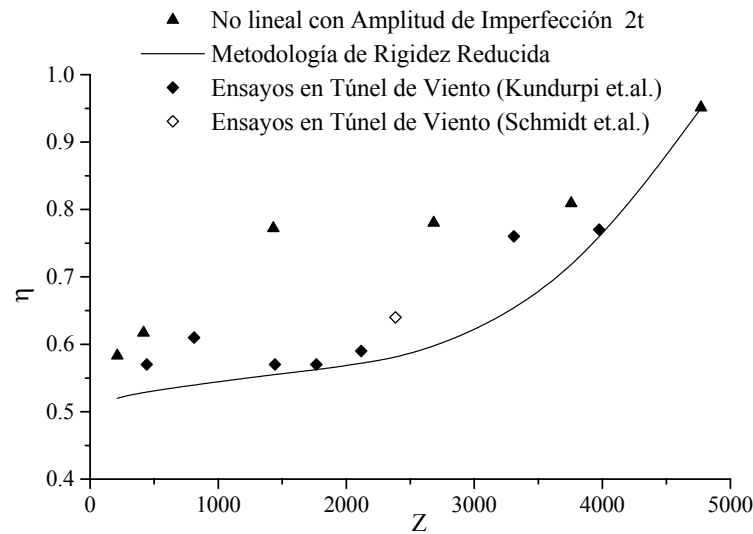


Figura 13: Resultados de rigidez reducida, análisis no lineal y ensayos en túnel de viento para cáscaras cilíndricas abiertas en la parte superior, para diferentes valores del parámetro de Batdorf.

Los resultados experimentales son muy cercanos a los resultados de rigidez reducida. En todos los casos, los resultados calculados usando rigidez reducida representan límites inferiores al análisis no lineal y ensayos.

## 6.2 Tanques con techo plano

En esta sección se estudian mediante la metodología de rigidez reducida, un conjunto de modelos ensayados en túnel de viento presentados en un trabajo de Resinger y Greiner (1982). Se trata de un conjunto de seis modelos compuestos por una cáscara cilíndrica de espesor constante con techo plano. El material constitutivo es aluminio, con módulo de elasticidad de  $70000 \text{ N/m}^2$  y coeficiente de Poisson de 0.347. En la Tabla 3 se presenta las dimensiones de los modelos estudiados, junto con los resultados de cargas críticas correspondientes.

Modelo	r [mm]	L [mm]	t [mm]	$\lambda^C$ [N/m <sup>2</sup> ]	Ensayos túnel de viento		Rigidez Reducida	
					$\lambda^T$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\eta^T$	$\lambda^P$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\eta^P$
MR1	220	440	0.105	267.9	229	0.85	206	0.77
MR2		320	0.105	356.2	298	0.83	205	0.57
MR3		180	0.100	534.7	401	0.75	271	0.51
MR4	310	320	0.105	204.1	149	0.73	130	0.64
MR5		250	0.105	259.5	192	0.74	157	0.60
MR6		180	0.105	357.1	243	0.68	212	0.59

Tabla 3: Cargas críticas provenientes de: análisis de bifurcación ( $\lambda^C$ ), ensayos en túnel de viento ( $\lambda^T$ ) y de análisis de rigidez reducida ( $\lambda^P$ ).

La carga crítica ( $\lambda^C$ ) para cada caso se obtiene mediante un análisis de autovalores y autovectores a través de ALREF y ABAQUS, con buen acuerdo entre ambos resultados. Estos

valores se muestran en la Tabla 3 junto con las cargas críticas correspondientes a los ensayos ( $\lambda^T$ ). Para todos los modelos se realiza un análisis con la metodología de rigidez reducida con una reducción parametrizada de las contribuciones de energía membranal obteniéndose cargas críticas ( $\lambda^P$ ) que presentan modos críticos asociados compatibles con lo observado en los ensayos o en el análisis no lineal. Estos valores también se presentan en la Tabla 3 junto con los respectivos factores de reducción ( $\eta^T$  y  $\eta^P$ ) obtenidos relacionando las cargas críticas correspondientes a los ensayos y las calculadas con rigidez reducida con las provenientes del análisis de bifurcación con la energía completa. Se puede observar que los modelos MR3 y MR5 tienen prácticamente la misma relación  $L/r$  pero MR3 tiene menor relación  $r/t$ , entre ambos modelos el que posee menor  $r/t$  presenta una reducción mayor en la carga crítica.

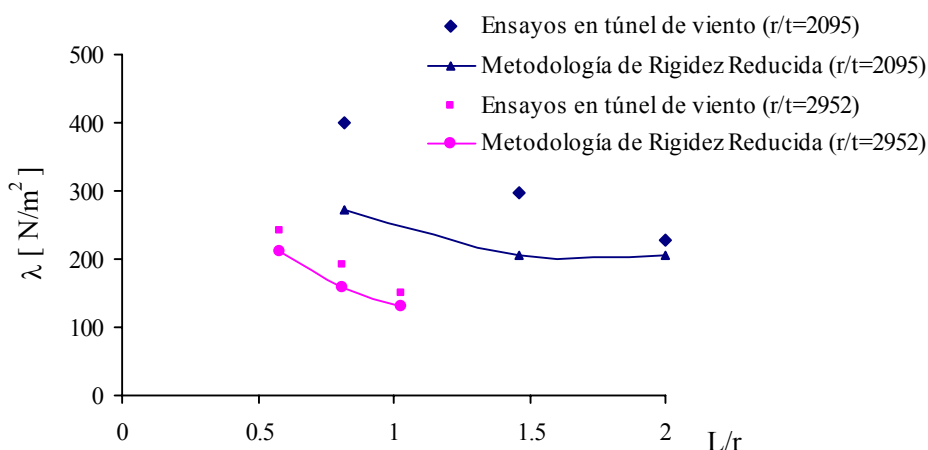


Figura 14: Cargas críticas de modelos estudiados (Resinger y Greiner, 1982).

La Figura 14 muestra las cargas críticas correspondiente a los ensayos en túnel de viento y las obtenidas por la aproximación de rigidez reducida parametrizada para los relaciones de aspecto correspondientes a los modelos analizados. Se puede observar que los valores hallados con la metodología de rigidez reducida representan límites inferiores a las cargas críticas correspondientes a los ensayos. Los modelos con mayor relación  $r/t$  presentan una menor diferencia entre las cargas críticas provenientes del análisis de bifurcación y las obtenidas con la metodología de rigidez reducida. En estos modelos al aumentar la relación  $L/r$  para un valor determinado de  $r/t$  es menor la diferencia entre los dos tipos análisis obteniéndose límites inferiores más próximos a los autovalores calculados con todas las componentes de energía.

En todos los casos, la metodología de rigidez reducida provee valores de carga crítica que limitan inferiormente los valores registrados en los ensayos.

## 7 CONCLUSIONES

Este trabajo presenta una validación de la metodología de rigidez reducida para cáscaras de revolución, implementada en un código de propósitos específicos mediante una modelación por elementos finitos. Esta validación se realiza para estructuras de tanques metálicos de grandes dimensiones destinados al almacenamiento de fluidos, en los cuales el diseño genera envolventes de espesor escalonado y en los que se presentan problemas de inestabilidad de equilibrio bajo cargas de viento o vacío interior.

En la modelación se incorporan en la modelación nuevas problemáticas en la metodología de rigidez reducida, como las que surgen por la existencia en la cáscara de zonas de diferentes

rigideces o bien por la producción de modos localizados, generados cuando en una zona de la cáscara no aparecen tensiones significativas.

Se verifica el comportamiento del modelo de rigidez reducida frente a cargas axilsimétricas, como el vacío interior, o no axilsimétricas, como las de viento, contrastando distintos casos de estudio con resultados numéricos producidos con otras metodologías o bien con resultados experimentales provenientes de ensayos reportados en la bibliografía.

La comparación con otros procedimientos numéricos genera resultados aceptables para la metodología evaluada resultando cargas críticas que son límites inferiores a las halladas por análisis no lineal o bien por la metodología de energía reducida.

La verificación con ensayos realizados sobre tanques reales con vacío interior no arroja buenos resultados, pero las características de los tanques ensayados son muy particulares ya que presentan una magnitud elevada de imperfecciones con respecto a la estructura original que hace que su comportamiento sea diferente. La configuración geométrica inicial de los tanques al comenzar los ensayos se aparta de la geometría indeformada con un nivel de imperfecciones que superan lo aceptado por los códigos, como se indica en el trabajo de referencia. Por esta razón la estructura se comporta como una estructura diferente.

La validación con ensayos realizados en túnel de viento, en condiciones controladas, dio buenos resultados para la metodología implementada cuyos valores limitaron inferiormente todos los resultados de los ensayos para los diferentes tipos de tanque, con o sin techo.

## REFERENCIAS

- Abaqus, *User's Manuals, Version 6.3*. Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc. Rhode Island, 2002.
- Croll, J.G.A., and Zintillis, G.M., Combined Axial and Pressure Buckling of End Supported Shells of Revolution. *Eng. Structures*, 199-206, 1985.
- Dardati, P., y Godoy, L.A., Validación de modelos en Mecánica Computacional. *Mecánica Computacional*, 20: 663-670, 2001.
- Flores, F.G., Análisis no lineal geométrico y estabilidad elástica de láminas de revolución mediante elementos finitos con aplicaciones a recipientes a presión. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, 1990.
- Flores, F.G., and Godoy, L.A., Instability of shells of revolution using ALREF: studies for wind loaded shells. *Buckling of shells structures, on land, in the sea and in the air*, Elsevier, Oxford, 213-222, 1991.
- Godoy, L.A., and Flores, F.G., Imperfection Sensitivity to elastic buckling of wind loaded open cylindrical tanks. *Structural Engineering and Mechanics*, 13 (5): 533-542, 2002.
- Hornung, U., and Saal, H., Buckling loads of tank shells with imperfections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37: 605-621, 2002.
- Jaca, R.C., Godoy, L.A., Flores, F.G., and Croll, J.G.A., A reduced stiffness approach for the buckling of open cylindrical tanks under wind loads. *Thin Walled Structures*, 45: 727-736, 2007.
- Jaca, R.C., Godoy, L.A., y Flores, F.G., Límites inferiores para cáscaras cilíndricas bajo cargas no axilsimétricas. *Mecánica Computacional*, 24: 1723-1740, 2005.
- Jaca, R.C., Sosa, E., y Godoy, L.A., Estrategias de implementación de límites inferiores para pandeo de tanques bajo viento. *Mecánica Computacional*, 25: 585-604, 2006.
- Jaca, R.C., y Godoy, L.A., Análisis de cáscaras de espesor variable usando la técnica de rigidez reducida. *Mecánica Computacional*, 26: 228-246, 2007.
- Kundurpi, P.S., Samavedam, G., and Johns, D.J., Stability of cantilever shells under wind loads. *ASCE J. Engineering Mechanics Division*, 101 (5): 517-531, 1975.

- Lecompte, K.L., Verificación y validación de modelos geoquímicos realizados con un software específico. *Problemas del conocimiento en Ingeniería y Geología*, 1: 65-76, 2003.
- Macdonald, P.A., Kwok, K.C.S., and Holmes, J.D., Wind loads on circular storage bins and tanks: I. Point pressure measurements on isolated structures. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 31: 165-188, 1988.
- Portela, G., and Godoy, L.A., Wind pressures and buckling of cylindrical steel tanks with conical roof. *Journal of Construction Steel Research*, 61(6): 786-807, 2005.
- Resinger, F., and Greiner, R., Buckling of wind loaded cylindrical shells: Application to unstiffened and ring stiffened tanks. *Buckling of Shells*, 305-331, 1982.
- Schmidt, H., Binder, B., and Lange, H., Postbuckling strength design of open thin-walled cylindrical tanks under wind load. *Thin-Walled Structures*, 31: 203-220, 1998.
- Sosa, E.M., Godoy, L.A., and Croll, J.G.A., Computation of lower-bound buckling loads using general-purpose finite element codes. *Computers and Structures*, 84 (29-30): 1934-1945, 2006.
- Yamada, S., and Croll, J.G.A., Buckling and Post-buckling Characteristics of Pressure-loaded Cylinders. *Journal of Applied Mechanics*, 60: 290-299, 1993.
- Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., *The finite element method for Solid and Structural Mechanics*, Sixth Edition. Elsevier, Oxford, U.K., 2005.
- Zintillis, G., and Croll, J.G.A., Pressure buckling of end supported shells of revolution. *Engineering Structures*, 4: 222-232, 1982.