

RELACION ENTRE EL COMPORTAMIENTO DE LAS ONDAS ELASTICAS Y EL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES EN UNA PLACA RECTANGULAR CON UNA FISURA INCLINADA

Luis Kosteski^a, Ricardo Barrios D'Ambra^a, Ignacio Iturrioz^b

^a*Departamento de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Nordeste, Av. Las Heras 727, 3500 Resistencia, Chaco, Argentina, lkosteski@ing.unne.edu.ar; rbarrios@ing.unne.edu.ar; <http://ing.unne.edu.ar>*

^b*PROMECA, Departamento Ingeniería Mecánica, Escuela de Ingeniería, Universidad Federal de Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, ignacio@mecanica.ufrgs.edu.br*

Palabras clave: Distribución de ondas, Mecánica de fractura, Método de los elementos discretos, Factor de intensidad de tensiones.

Resumen.

El comportamiento de las ondas elásticas en un cuerpo fisurado sometido a sollicitaciones dinámicas es complejo de simular y entender. En este trabajo se realiza un esfuerzo para asociar el movimiento de dichas ondas en el cuerpo fisurado al valor del factor de intensidad de tensiones. Para realizar la simulación del proceso es utilizado el Método de los Elementos Discretos (MED). El mismo se caracteriza por permitir representar con facilidad eventos donde acontezcan fractura y fragmentación, permite simular con relativa facilidad la propagación inestable de fisuras, razón por la cual la implementación de algoritmos de cálculo de parámetros Fractomecánicos resulta de utilidad. El MED consiste esencialmente en la discretización espacial del continuo por medio de un reticulado espacial formado por la repetición de un módulo regular. La masa del modelo es también discretizada y concentrada en los nodos de dicho reticulado.

El cuerpo estudiado es una placa rectangular con una fisura inclinada que llega a uno de los bordes. La placa está sometida a una tensión de tracción en uno de sus extremos aplicada en forma abrupta. La descripción detallada del evento así como una discusión sobre la calidad de los resultados obtenidos es tratada en el trabajo.

1 INTRODUCCION

El cálculo de parámetros fractomecánicos utilizando métodos numéricos presenta aún desafíos, ya que las aplicaciones tecnológicas de la mecánica de fractura llevan al análisis de problemas con diferentes tipos de anisotropía en el material y/o de geometrías y condiciones de borde complejas que en muchos casos resulta imposible de resolver utilizando soluciones disponibles en manuales (Roque y Cartwright, 1976). Sin lugar a dudas las técnicas computacionales más extendidas en esta área son el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC) (Aliabadi y Roque, 1991), pero a estos se suman nuevos métodos y técnicas desarrolladas para el análisis de problemas y aplicaciones específicas.

La modalidad del Método de los Elementos Discretos (MED) aquí utilizada, ha sido empleada en el modelado de estructuras de hormigón y hormigón armado sometidas a cargas impulsivas (Riera e Iturrioz, 1995 y 1998), en la simulación del comportamiento de fundaciones de suelo cemento apoyadas sobre un lecho de arena suelta (Schnaid et al., 2004) y en la simulación del proceso de generación y propagación de un sismo en un conjunto rocoso (Dalguer et al., 2003). También resulta importante mencionar el trabajo de Rios y Riera (2004) en el cual se aplicó el MED para el estudio del efecto de escala en hormigón.

El suceso del MED para modelar mecanismos de falla en materiales frágiles y cuasi frágiles y su habilidad de simular la nucleación y posterior propagación inestable de fisuras permiten su aplicación en problemas de mecánica de la fractura. En el MED no es necesaria la introducción de un entalle para inducir la fractura, la posibilidad de nucleación de un defecto es embutida en la ley constitutiva de cada elemento. Por estas razones, en este trabajo se presenta la aplicación del MED para el cálculo de parámetros fractomecánicos dinámicos en el campo de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE). Para su cálculo se utilizan las metodologías usuales empleadas en los métodos numéricos clásicos, como el MEF y el MEC, como fue presentado en trabajos de Kostas et al. (2006), (2008-a) y (2008-b).

El objetivo de este trabajo es explorar las posibilidades que brinda el MED de calcular el factor de intensidad de tensiones dinámico en función del tiempo asociando sus variaciones con el juego de ondas elásticas de tensión que se generan durante el proceso estudiado. Para esto se analiza una placa con una fisura inclinada sometida a una tensión uniforme aplicada en uno de sus extremos en forma abrupta en función del tiempo (función escalón).

2 FORMULACIÓN BÁSICA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

El MED como fue presentado en trabajos anteriores de este mismo congreso (Spellmeyer et al.; 2001, Barrios D'Ambra et al.; 2003, Kostas et al.; 2006), está basado en la discretización espacial del continuo, utilizando elementos de barra que forman un reticulado espacial, se hace una equivalencia mecánica entre el comportamiento de esas barras y el medio continuo que se desea representar. Cada nodo tiene 3 grados de libertad (desplazamientos en las 3 direcciones), las masas son concentradas en dichos nodos y unidas por elementos longitudinales y diagonales de longitud L_c y $\sqrt{3}/2 L_c$ respectivamente. El reticulado es formado por un conjunto de módulos cúbicos regulares mostrados en la Figura 1. Sólo debe ser impuesta la restricción $\nu = 0.25$ al valor del módulo de Poisson para que la equivalencia entre el modelo sólido y el reticulado sea perfecta. Para otros valores de ν aparecen pequeñas diferencias en los términos de corte.

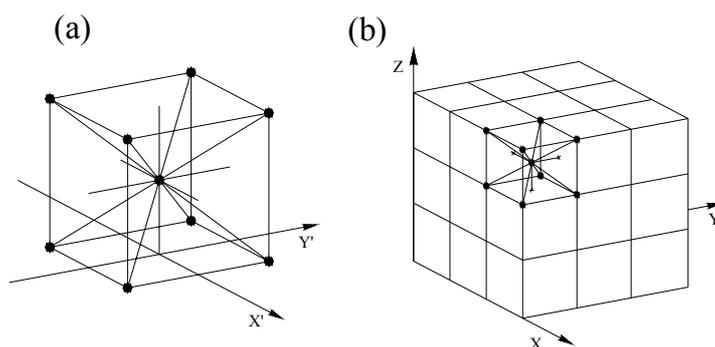


Figura 1. a) Detalle del módulo cúbico básico, b) Prisma compuesto por varios módulos cúbicos.

En el caso de materiales con una ley de comportamiento lineal elástica la ecuación de movimiento del sistema de N grados de libertad resultante de la discretización espacial puede ser expresada en la forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{q}(t) \quad (1)$$

Dónde \mathbf{M} denota la matriz de masa (diagonal), y \mathbf{u} y $\ddot{\mathbf{u}}$ representan los vectores de desplazamiento y aceleraciones generalizadas (desplazamientos y aceleraciones nodales) respectivamente. Por su parte $\mathbf{q}(t)$ es el vector que contiene las fuerzas externas aplicadas. Las ecuaciones de movimiento resultantes son desacopladas (la matriz de masa es diagonal y el amortiguamiento es proporcional a la masa) y son integradas numéricamente en el dominio del tiempo, utilizando el Método de las Diferencias Finitas Centrales.

3 CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

Son conocidos una gran variedad de métodos para calcular el factor de intensidad de tensiones (FIT), tanto para casos estáticos como para dinámicos. Una excelente recopilación de los mismos se puede encontrar en [Aliabadi y Rooke \(1991\)](#).

En este trabajo se utilizará para el cálculo del FIT únicamente el Crack Opening Displacement (COD) que se basa en las expresiones de Irwin ([Aliabadi y Rooke; 1991](#)).

Otras modalidades para calcular el FIT dentro del contexto del MED son presentadas en [Kosteski et al. \(2006\)](#) y [\(2008-a\)](#).

3.1 Extrapolación de K calculado a partir del COD

Es posible obtener el valor del factor de intensidad de tensiones a partir de las expresiones de Irwin y William, como las presenta [Aliabadi y Rooke \(1991\)](#). En la ecuación (2) se presenta dicha expresión:

$$K = \delta \frac{E}{4 + 4\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \left(\frac{1 + \nu}{2} \right) = \delta \frac{E}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (2)$$

En la que r es la distancia desde la punta de la fisura hasta el punto donde se miden los desplazamientos δ , como se indica en la [Figura 2b](#). E y ν son las constantes elásticas para el caso estudiado.

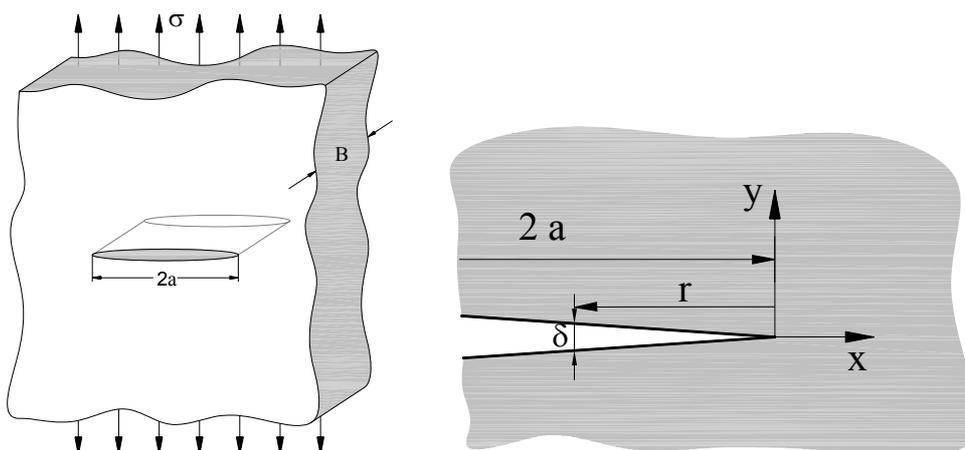


Figura 2 (a) placa tensionada con una fisura central, (b) Esquema de referencia para valores de r , δ .

En función de cómo se toman los desplazamientos δ entre dos puntos originariamente en la misma posición pero en labios opuestos de la fisura, se puede obtener:

$$\begin{aligned}
 K_{\text{I}} &= \delta_y \frac{E}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \\
 K_{\text{II}} &= \delta_x \frac{E}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \\
 K_{\text{III}} &= \delta_z \frac{E}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{r}}
 \end{aligned} \quad (3)$$

Dónde δ_x , δ_y y δ_z (referidos a ejes locales de la Figura 2b) son los desplazamientos relativos entre dos nudos inicialmente con la misma coordenada, correspondientes con los tres modos de ruptura conocidos (Modos I, II, y III; Anderson; 2005). Para un problema de modo I de ruptura como es el caso de la Figura 2, y dado el sistema de ejes indicado, podemos reemplazar en la ecuación (3a) δ_y por δ obteniendo la expresión (2).

3.2 Implementación del COD en el MED

En el MED se miden los desplazamientos relativos (δ) entre los puntos a uno y otro lado de la fisura cercanos a la punta de la misma. Se calcula el factor de intensidad de tensiones en cada uno de los puntos utilizando la expresión (3a) y se realiza una extrapolación para cuando r tiende a cero. De esta forma se logra independizar de la discretización adoptada el valor del K/K_0 obtenido. Con la extrapolación mencionada se predice el valor para $r = 0$ por medio de una regresión lineal con un ajuste de mínimos de cuadrados del rango de datos conocidos.

Como el COD es un parámetro local, al igual que el K , si el problema analizado es dinámico las ondas de tensión elásticas se tienen en cuenta implícitamente. Por esto las fórmulas para un problema estático o dinámico son las mismas, lo cual representa una gran ventaja.

Una gran cantidad de autores miden el K estático o dinámico utilizando el COD como parámetro, es decir que han utilizado una formulación similar a la aquí presentada, entre otros podemos mencionar a Fedelinski et al. (1993) que trabajan con el método de los elementos de contorno duales, Wen et al. (1998), también con una formulación dual del Método de Elementos de Contorno, Tabiei y Wu (2003) que trabajan con un sistema comercial de

elementos finitos [DYNA3D](#).

Esta forma de determinar el FIT también es comentada en [Nishioka \(1998\)](#), [Aliabadi y Rooke \(1991\)](#) y [Anderson \(2005\)](#).

4 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO ELÁSTICO

Si en un punto cualquiera de un medio elástico se produce una perturbación, las ondas que se originan se propagan en todas las direcciones.

Las ondas elásticas causan deformaciones no permanentes en el medio en que se propagan. La deformación se constituye de una alternancia de compresión y de dilatación de tal manera que las partículas del medio se acercan y se alejan respondiendo a las fuerzas asociadas con las ondas. Las deformaciones obtenidas debido a la perturbación inducida se irán propagando a lo largo de todo el cuerpo hasta disipar gradualmente la energía.

En este trabajo se hará referencia a las ondas de compresión o longitudinales (ondas P) por lo que las definiremos a continuación:

Como se puede observar en la [Figura 3](#), las partículas de un cuerpo excitados por una onda P, longitudinal o de compresión oscilan en la dirección de propagación de la onda. Las ondas P son parecidas a las ondas sonoras ordinarias. En caso de tener una carga puntual, la propagación se dará en forma radial. Son las ondas más veloces.

La velocidad de las ondas P se presenta en la ecuación (4), su deducción se puede encontrar en [Timoshenko y Goodier \(1968\)](#):

$$V_p = \sqrt{\frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu) \cdot \rho}} \quad (4)$$

Donde: V_p es la velocidad de la onda P [m/s]; E el módulo de elasticidad [N/m²]; ρ la densidad [kg/m³] y ν el módulo de Poisson.

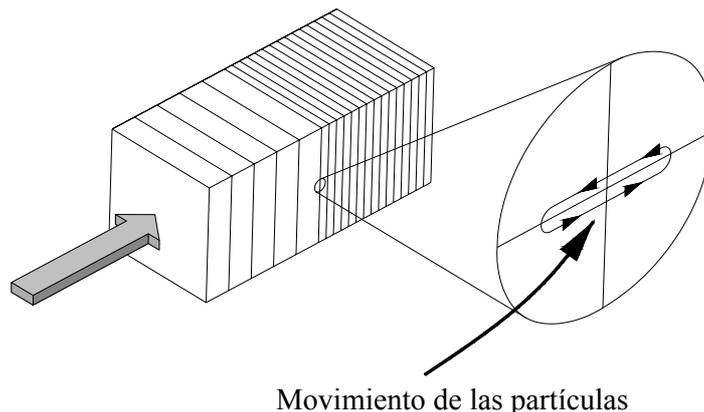


Figura 3 Esquema ilustrativo de las ondas P o longitudinales.

Existen en los cuerpos sólidos otros dos tipos de ondas, las de corte asociados a la distorsión en el cuerpo y las ondas de superficie u ondas de Rayleigh que tiene mayor intensidad en las fronteras libres del cuerpo estudiado. Detalles sobre propiedades de estas otras ondas pueden encontrarse en libros clásicos de elasticidad como [Timoshenko y Goodier \(1968\)](#).

5 EJEMPLOS DE APLICACIÓN: PLACA RECTANGULAR CON UNA FISURA INCLINADA.

Se analiza una placa rectangular con una fisura inclinada a 45° que llega hasta uno de sus bordes, como se ilustra en la [Figura 4 a\)](#). Se aplica sobre el borde superior de la placa una tensión que varía en el tiempo con una función escalón (Heaviside) a partir de $t = 0$. Las propiedades del material son: módulo de corte 29.4 GPa, módulo de Poisson 0.286 y densidad de 2450 kg/m^3 .

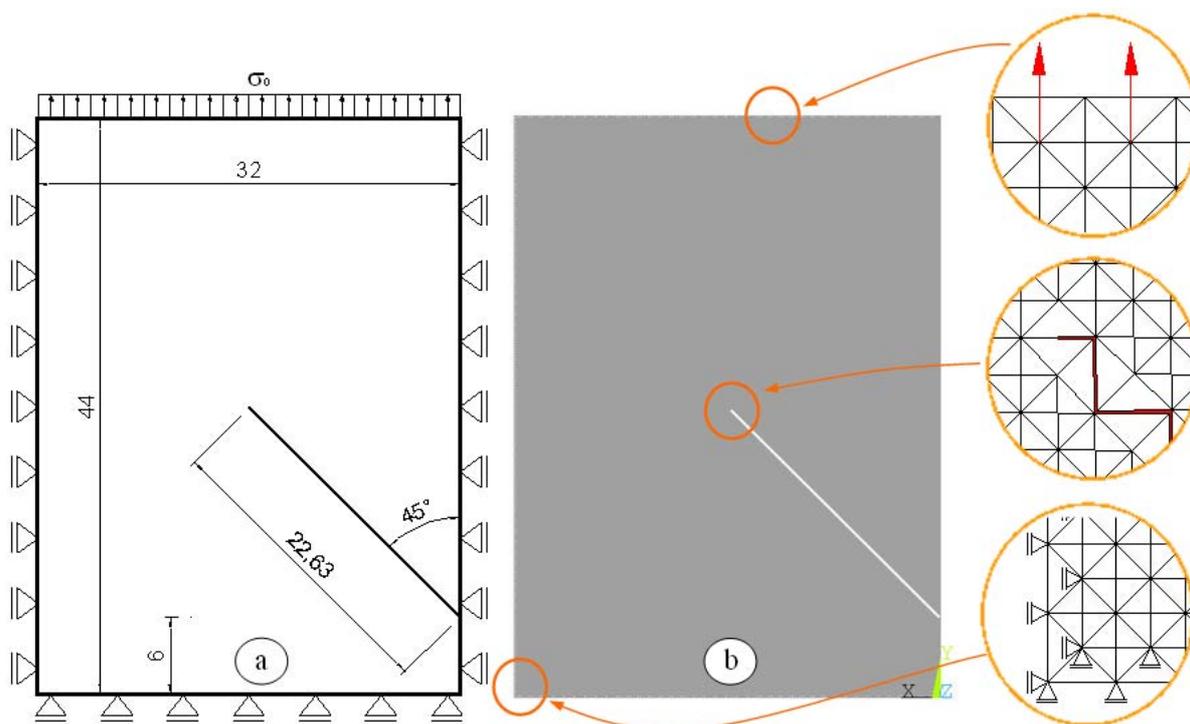


Figura 4 Esquema de la placa en estudio. Geometría de la placa, en mm y detalle modelo con MED

5.1 Modelo en el MED

La placa modelada en el MED tiene 220 módulos de alto, 160 módulos de ancho y un módulo de profundidad. La necesidad de una malla tan refinada radica en el tipo de problema y la forma de obtener los FIT. Este problema no presenta simetría por lo que las ondas de tensión sólo arriban a la fisura en una dirección (al principio), además el tiempo en que llegan las ondas elásticas al borde de la fisura inclinada es variable. Esto complica la extrapolación que se realiza con el COD ya que si los nudos están muy separados los tiempos en que llegan dichas ondas es diferente.

Propiedades del material		Parámetros del MED	
E	75.6 GPa	Lc	$2.00 \text{ E}^{-4} \text{ m}$
ν	0.286	ν	0.25
ρ	2450 kg/m^3	Δt	$1.0 \text{ E}^{-8} \text{ seg}$

Tabla 1: Propiedades del material para el ejemplo estudiado, parámetros utilizados en la simulación

En la [Tabla 1](#) se muestran las propiedades del material para el ejemplo estudiado y

parámetros utilizados en la simulación realizada con el MED, adoptándose además $\nu = 0.25$ por las razones comentadas anteriormente.

5.2 Cálculo del K dinámico

Se midieron los desplazamientos, de los nodos que originalmente ocupaban la misma posición, en la dirección perpendicular a la fisura, δ_y (correspondiente con el modo I), y en la dirección de la misma, δ_x (modo II). Utilizando las ecuaciones 3 a) y b) se obtuvieron los valores de K_I y K_{II} en varios puntos cercanos a la punta de la fisura. Para conseguir los valores de FIT buscados se realizó una extrapolación con un ajuste de mínimos cuadrados ($r \rightarrow 0$).

Las curvas de K_{Id} y K_{IId} versus tiempo, obtenidas utilizando el COD para el cálculo de los valores de K , son mostradas en la Figura 5 junto con los resultados obtenidos por Dominguez y Gallego (1992) que utilizaron el método de los elementos de contorno en el dominio del tiempo, Kishimoto et al. (1980), que aplicaron el método de los elementos finitos y Fedelinski et al. (1993) que usaron el método de los elementos de contorno (BEM). Se puede observar una buena correlación con los resultados de referencia.

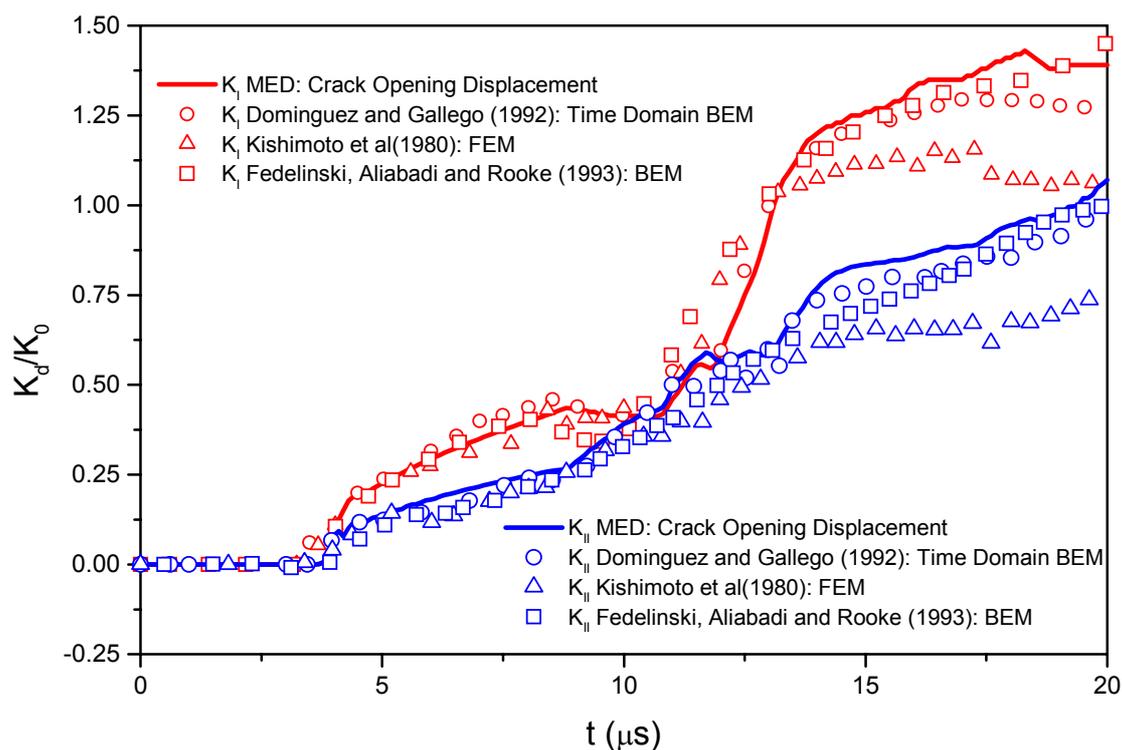


Figura 5 FIT dinámico normalizado para el modo I (KI) y para el modo II (KII).

5.3 Relación entre la propagación de ondas de tensión y los FIT

La onda de tensión generada por la carga impulsiva llega a la punta de la fisura a los $3.61 \mu\text{s}$, antes de este tiempo (t_1) las ondas se mueven paralelas al borde en donde se aplicó la carga y no se tienen valores en la curva de K/K_0 vs tiempo (ver Figura 6).

En la Figura 7 los dos primeros gráficos muestran distribuciones de tensión principal máxima en donde se aprecia lo mencionado anteriormente.

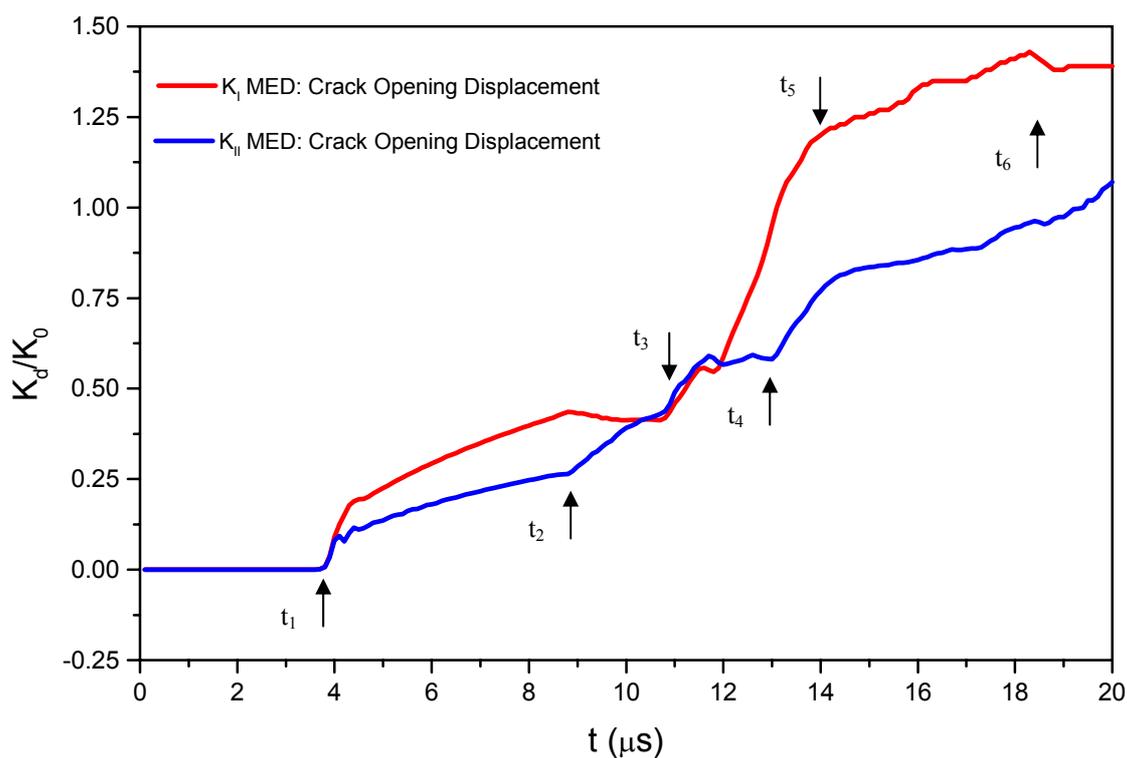


Figura 6 Distribución de tensión principal máxima vinculada con los FIT modo I y II

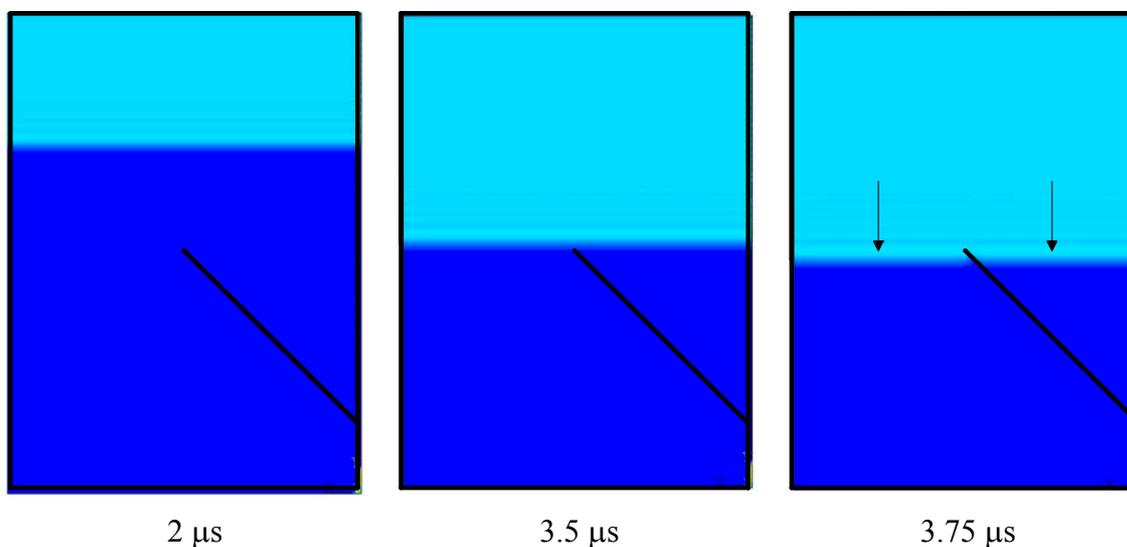


Figura 7 Distribución de tensión principal máxima para diferentes tiempos.

Una vez que las ondas de tensión llegan a la punta de la fisura, t_1 , (tercer gráfico de la Figura 7) una parte de ellas siguen su camino por la izquierda de la misma y otra parte de las ondas de tensiones se reflejan en las superficies de la fisura y se dirigen hacia el lateral derecho y otra parte de dichas ondas siguen paralelas a la dirección de la fisura llegando al extremo de la misma en coincidencia con el borde lateral de la placa. Esto se observa en el primer gráfico de la Figura 8.

Las ondas que se desvían hacia el lateral derecho lo alcanzan y vuelven hacia la punta de la fisura para los $8.86 \mu\text{s}$, t_2 , (segundo gráfico de la Figura 8) que coincide con el comienzo de

una meseta en la curva de K_I y un quiebre en la de K_{II} . Otra parte de dichas ondas siguen paralelas a la dirección de la fisura llegando al extremo de la misma en coincidencia con el borde lateral de la placa. Estas ondas vuelven a la punta de la fisura casi al mismo tiempo en que arriban las ondas que habían seguido su camino por la izquierda de la fisura a la punta de la misma ya habiéndose reflejado en el borde inferior. Esto ocurre para un tiempo t_3 , alrededor de $11 \mu\text{s}$ (tercer gráfico de la Figura 8). En este tiempo se observa un marcado aumento en la curva de K_I , para la curva de K_{II} en este punto también hay un aumento pero no es tan notorio.

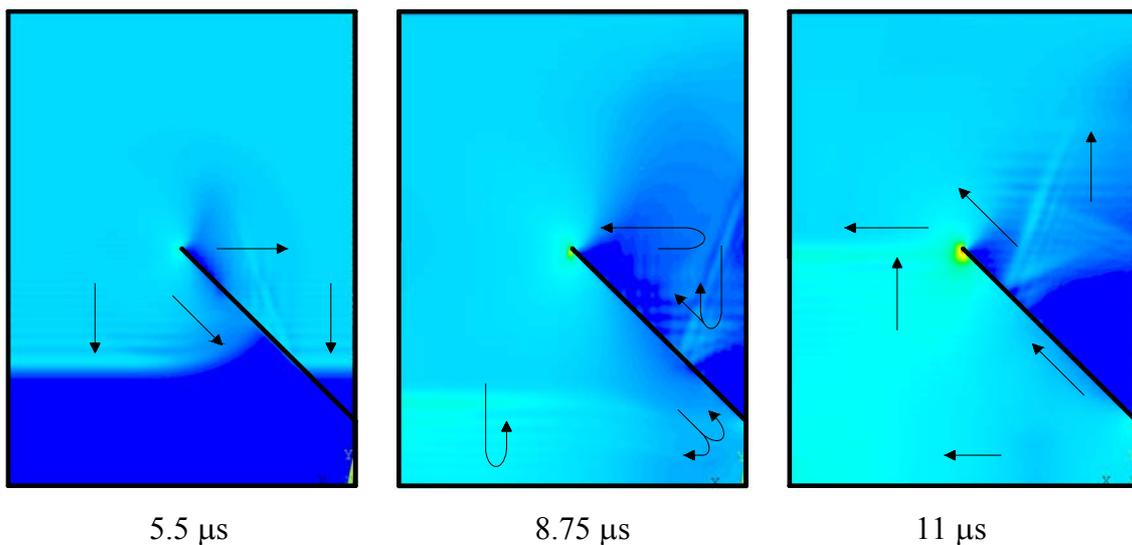


Figura 8 Distribución de tensión principal máxima para diferentes tiempos.

Las ondas que pasaron por la izquierda de la fisura llegan a la esquina inferior derecha de la placa y vuelven hacia la punta de la fisura a los $13 \mu\text{s}$ (primer gráfico de la Figura 9). Aquí se observa un cambio brusco en la curva de K_{II} aunque en la curva de K_I el cambio de pendiente pasa casi inadvertido (t_4).

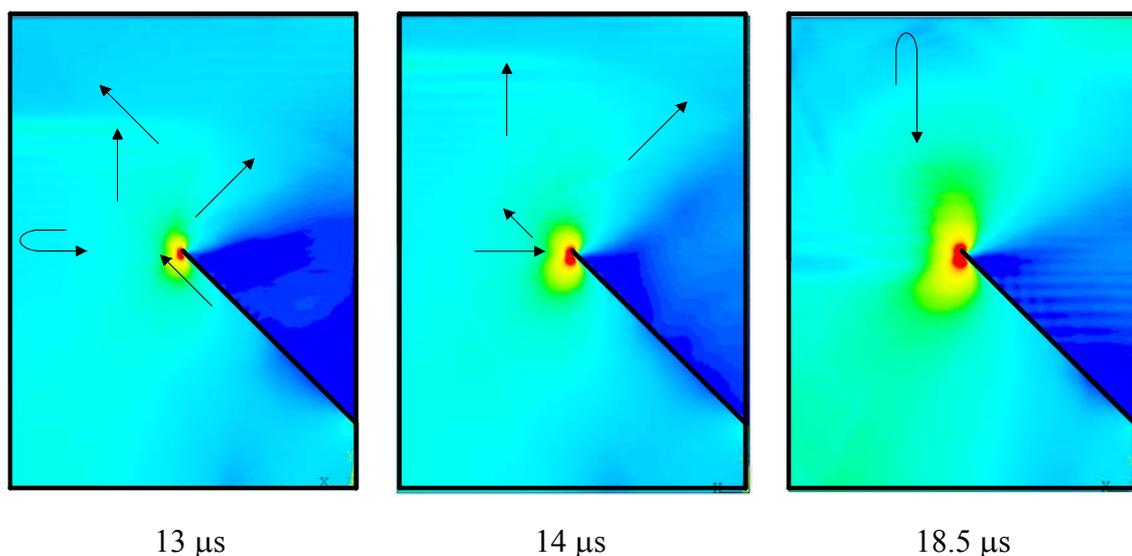


Figura 9 Distribución de tensión principal máxima para diferentes tiempos.

Las ondas de tensión que, viajando en dirección horizontal, se habían dirigido hacia el lateral derecho de la placa, rebotan en el mismo y siguen hacia el lateral izquierdo arribando a la punta de la fisura para los 14 μs (segundo gráfico de la Figura 9) en donde se aprecia un cambio de pendiente brusco tanto en la curva de K_I como en la de K_{II} (t_5).

Finalmente los valores máximos de K_I se obtienen justo antes de que la primer onda de tensión haya rebotado sobre el borde cargado y esté llegando nuevamente a la punta de la fisura ($t_6 = 5 t_1 = 18.5 \mu\text{s}$), esto se puede apreciar en el tercer gráfico de la Figura 9.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta el cálculo del factor de intensidad de tensiones dinámico (FITD) utilizando el concepto de COD. El ejemplo aquí estudiado es el de una placa rectangular con una fisura inclinada sobre la cual se aplica una tensión uniforme con una función temporal del tipo Heaviside en uno de sus bordes. La descripción del camino tomado por las ondas de tensiones durante todo el proceso es asociado a los valores que va tomando el factor de intensidad de tensiones dinámico. Durante el trabajo fue posible concluir que:

- El MED permite calcular en forma adecuada o FITD, y permite mostrar en forma clara la correlación entre el mismo y el juego de las ondas tensionales existentes.

7 AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el apoyo de la Secretaría General de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), así como también a la Facultad de Ingeniería de la misma Universidad y al CNPq órgano de fomento del gobierno de Brasil. Estas entidades apoyaron directa o indirectamente el trabajo aquí presentado.

REFERENCIAS

- Aliabadi M.H. y D.P. Rooke, Numerical Fracture Mechanics. *Kluwer Academic Publishers*, 1991.
- Aoki, S., Kishimoto, K., Izumihara, Y. y Sakata, M., Dynamic analysis of cracked linear viscoelastic solids by finite element method using singular element. *Int. J. Fract.*, 16,97-109, 1980.
- Anderson, T.L., Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. Third Edition, CRC Press, ISBN: 978-0-8493-1656-2, 2005.
- Barrios D'Ambra, R., Iturrioz, I., Fasce, L.A., Frontini, P. M., Cisilino, A.P., Caracterización del proceso de ruptura de un material polimérico utilizando el método de los elementos discretos. AMCA (Asociación Argentina de Mecánica Computacional - iacm (International association of computational mechanics) Mecánica Computacional Vol. XXII. ISSN 1666-6070. 2003.
- Dalguer, A., Irikura, K., Riera, J.D. , Generations of New Cracks Accompanied by Dynamic Shear Rupture Propagation of the 2000 Tottori (Japan), Earthquak. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 93, pp. 2236-2252, 2003.
- Dominguez, J. y Gallego, R., Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations. *Int. J. Num. Meth. Engng*, vol. 33, pp. 635-647, 1992.
- DYNA3D: www.eng.llnl.gov.

- Fedelinski, P., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., The dual boundary element method in dynamic fracture mechanics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 12, pp. 203-210, 1993.
- Kosteski L., Cóceres H., Barrios D'Ambra R., Iturrioz I., Cisilino A., Aplicación del Método de los Elementos Discretos para la Determinación del Factor de Intensidad de Tensiones Estático y Dinámico. *Mecánica Computacional Vol XXV*, pp. 2109-2123, Alberto Cardona, Norberto Nigro, Victorio Sonzogni, Mario Storti. (Eds.), Santa Fe, Argentina, 2006.
- Kosteski L., Barrios D'Ambra R., Iturrioz I., Determinación de Parámetros Fractomecánicos Estáticos y Dinámicos Utilizando el Método de los Elementos Discretos de barras. *Revista Internacional Métodos Numéricos en Ingeniería (RIMNI)*. Artículo en Revisión. Barcelona España, 2008-a.
- Kosteski L., Cóceres H., Barrios D'Ambra R., Iturrioz I., Cisilino A., Cálculo de parámetros fractomecánicos vía integral J utilizando el método de los elementos discretos. *Mecánica Computacional*, San Luis, Argentina, 2008-b.
- Nishioka, T., Fracture a Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Chapter 30, Edited by G. P. Cherepanov, Krieger Publishing Company Malabar Florida, 870 pp, 1998.
- Riera, J.D. e Iturrioz, I., Discrete element dynamic response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading. *Communications in Num. Meth. in Eng.*, vol. 11, pp. 417-426, 1995.
- Riera, J.D. e Iturrioz, I., Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 179, pp. 135-144, 1998.
- Rios, R.D. y Riera, J.D., Size effects in the analysis of reinforced concrete structures. *Engineering Structures*, vol. 26, pp. 1115-1125, 2004.
- Rooke, D.P. y Cartwright, D.J., The compendium of stress intensity factors. Her majesty's Stationery Office, 1976.
- Schnaid, F., Spinelli, L., Iturruoz, I., Rocha, M., Fracture mechanics in ground improvement design. *Ground Improvement*, UK, vol. 8, n°, pp 7-15, 2004.
- Spellmeyer, T., Barrios D'Ambra, R., Iturrioz, I., Simulación numérica de la propagación de fisuras en sólidos utilizando el método de los elementos discretos. *Mecánica Computacional Vol. XX*. Pp. 506-513. (ISSN 1666-6070), 2001.
- Tabiei, A. y Wu, J., Development of the DYNA3D simulation code with automated fracture procedure for brick elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, (DOI: 10.1002/nme.742), 2003.
- Timoshenko y Goodier, Teoría de la elasticidad. Ed. URMO, 1968.
- Wen, P.H., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Cracks in three dimensions: A dynamic dual boundary element analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 167, pp. 139-151, 1998.