

## ELEMENTO FINITO PARA VIGAS DE PARED DELGADA DOBLEMENTE ASIMÉTRICAS CARGADAS AXIALMENTE

Fernanda M. de Borbón<sup>a</sup>, Daniel Ambrosini<sup>a</sup> y Anibal Mirasso<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Área de Dinámica Experimental, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo. CONICET

<sup>b</sup>Área de Modelación Constitutiva, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo.

Centro Universitario, Parque Gral. San Martín, 5500 Mendoza, Argentina. [ferdeborbon@gmail.com](mailto:ferdeborbon@gmail.com),  
[dambrosini@uncu.edu.ar](mailto:dambrosini@uncu.edu.ar), <http://leonardo.uncu.edu.ar:9673/fing/posgrados/estructural>

**Palabras clave:** Vigas de pared delgada, Frecuencias naturales, Carga axial, FEM.

**Resumen.** Las vigas de pared delgada y sección abierta son extensivamente usadas como componentes estructurales en distintos tipos de estructuras en los campos de Ingeniería Mecánica, Aeronáutica y Civil. En el caso de vigas que tienen dos ejes de simetría en su sección transversal, la solución de vibraciones libres es suficientemente conocida y estudiada. Inclusive cuando la sección transversal tiene un eje de simetría, se ha estudiado ampliamente, en general usando la teoría de Bernoulli-Navier. Sin embargo, es bastante limitado el número de estudios para vigas doblemente asimétricas en las cuales existe un triple acoplamiento de vibraciones de flexión en dos direcciones y torsión. En trabajos anteriores se ha desarrollado un modelo teórico-numérico que considera las vibraciones flexotorsionales acopladas. En cuanto al modelo físico, la formulación inicial, basada en las hipótesis de Vlasov, fue modificada permitiendo la inclusión de deformaciones angulares inducidas por el esfuerzo de corte, sección variable en la dirección longitudinal e inercias rotacionales en las ecuaciones de movimiento. En este trabajo se incorpora el efecto de una carga axial a las ecuaciones flexotorsionales. Se desarrolla un elemento finito de barra conteniendo el modelo físico con el objetivo de incorporarlo a un programa de propósito general. Se presenta además una comparación numérico-experimental de las frecuencias naturales axiales de vigas de pared delgada y sección abierta.

## 1. INTRODUCCIÓN

La determinación de frecuencias naturales y modos de vibración de vigas continuas no amortiguadas, se discute en detalle en [Pestel and Leckie \(1963\)](#), donde también se describe el cálculo de la respuesta dinámica a excitación armónica. Por otra parte, [Ebner and Billington \(1968\)](#) usan integración numérica para estudiar las vibraciones estacionarias de vigas de Timoshenko amortiguadas.

En la literatura pueden encontrarse también numerosas aplicaciones de vibración de vigas rectas y curvas, como así también arcos y estructuras de cáscara. Por otra parte, la teoría formulada por [Vlasov \(1963\)](#) ha sido ampliamente usada en el análisis dinámico de vigas de pared delgada y sección abierta, como es ejemplificado en los estudios de [Christiano and Culver \(1969\)](#) y [Yoo and Fehrenbach \(1982\)](#) en los cuales existe gran correlación entre trabajos experimentales y las predicciones teóricas de frecuencias naturales y desplazamientos inducidos en vigas rectas y curvas sometidas a cargas móviles.

Sin embargo, aunque la teoría de Vlasov para vigas de sección abierta ya está firmemente establecida, presenta algunas limitaciones tales como: a) Suponer que las deformaciones por corte, al igual que en la teoría de Bernoulli, no contribuyen a la flexibilidad de la viga. Por lo tanto, pueden encontrarse errores importantes en el caso de vigas poco esbeltas o en los modos altos de vigas esbeltas ([Timoshenko and Young, 1968](#)). b) También se desprecia la influencia de las inercias rotacionales en las resultantes de tensiones. c) Las ecuaciones de cuarto orden de Vlasov son válidas solamente para vigas de sección uniforme. En [Ambrosini et al. \(1995\)](#) y [Ambrosini et al. \(2000\)](#) se propuso una teoría modificada, la cual está basada en la formulación de Vlasov pero que tiene en cuenta los tres efectos mencionados anteriormente. Esta formulación, que utiliza el método de variables de estado en el dominio de la frecuencia, conduce a un tratamiento numérico eficiente, el cual puede ser muy útil en numerosas aplicaciones.

Otras contribuciones en este campo están restringidas a aplicaciones particulares. Por ejemplo, [Aggarwal and Cranch \(1967\)](#) y [Yaman \(1997\)](#) trabajan con secciones tipo canal y [Ali Hasan and Barr \(1974\)](#) con secciones ángulo. [Tanaka and Bercin \(1999\)](#) extendieron el modelo de [Bishop et al. \(1989\)](#) para estudiar el acoplamiento triple de vigas uniformes usando Mathematica. Las ecuaciones diferenciales presentadas por los autores mencionados tienen una confusión del sistema de coordenadas que fue clarificada por [Arpaci and Bozdog \(2002\)](#). En [Ambrosini and Danesi \(2003\)](#) se presentó un estudio numérico comparando los resultados con los obtenidos con [Arpaci and Bozdog \(2002\)](#).

Más recientemente, [Kim and Kim \(2005\)](#) presentaron una matriz de rigidez dinámica / estática para vigas de pared delgada asimétricas considerando deformaciones por corte, alabeo de la sección transversal y el acoplamiento entre ellas como así también, inercias rotacionales. Además desarrollaron un elemento finito usando un elemento de viga isoparamétrico. [Prokić \(2006\)](#) obtuvo un modelo para vigas de pared delgada y sección abierta de cinco ecuaciones diferenciales acopladas teniendo en cuenta el alabeo de la sección transversal, deformaciones por corte e inercias rotacionales. La solución explícita y analítica fue obtenida con Mathcad.

La determinación con precisión de las frecuencias naturales de vibración y de las formas modales, es de suma importancia en el diseño de vigas de pared delgada axialmente cargadas sujetas a cargas dinámicas. Aspas de helicópteros, álabes de turbinas, ejes de automóviles son algunos ejemplos de este tipo de vigas.

[Kim et al. \(2003\)](#) propusieron un método numérico para evaluar en forma exacta la matriz de rigidez estática y dinámica de vigas de pared delgada sujetas a cargas axiales excéntricas. Las ecuaciones son derivadas a partir de la energía potencial total basada en rotaciones y momentos

semitangenciales. Jun et al. (2004) extendieron el modelo de Arpacı and Bozdağ y obtuvieron la matriz de transferencia dinámica para una viga con sección arbitraria pero las deformaciones por corte no fueron incluidas en la formulación. Chen and Hsiao (2007a) estudiaron el caso particular de vigas de pared delgada con sección Z, en las cuales se produce el acoplamiento axial-torsional inducido por las condiciones de borde.

En cuanto a la utilización de métodos numéricos, Kim and Kim (2000) presentaron una formulación para vigas de pared delgada asimétricas en la cual todos los desplazamientos están definidos en un eje arbitrario. Se utilizaron polinomios de Hermite como funciones de forma. Chen and Hsiao (2007b) estudian el acoplamiento de las vibraciones axiales y flexotorsionales debido a las condiciones de borde mediante método de elementos finitos. Mientras que Sarpınç and Mokos (2007) desarrollaron un elemento de contorno para la construcción de la matriz de rigidez y el vector de cargas nodales de un elemento de sección homogénea o compuesta. Tuvieron en cuenta tanto el alabeo como las deformaciones por corte.

Erkmen and Mohareb (2008) presentan un elemento finito que considera deformaciones por corte para el análisis de pandeo en vigas de pared delgada y que predice el efecto de la posición de la carga crítica. Back and Will (2008) desarrollaron un elemento finito para analizar vigas I compuestas, el cual tiene en cuenta deformaciones por corte y alabeo. Se analizaron diferentes tipos de elementos y su convergencia. Además se desarrolló la matriz de rigidez geométrica.

En este trabajo se incorpora el efecto de una carga axial a las ecuaciones flexotorsionales. Se desarrolla un elemento finito de barra conteniendo el modelo físico con el objetivo de incorporarlo a un programa de propósito general. Se presenta además una comparación numérico-experimental de las frecuencias naturales axiales de vigas de pared delgada y sección abierta.

## 2. MODELO FÍSICO

### 2.1. Ecuaciones diferenciales de Movimiento

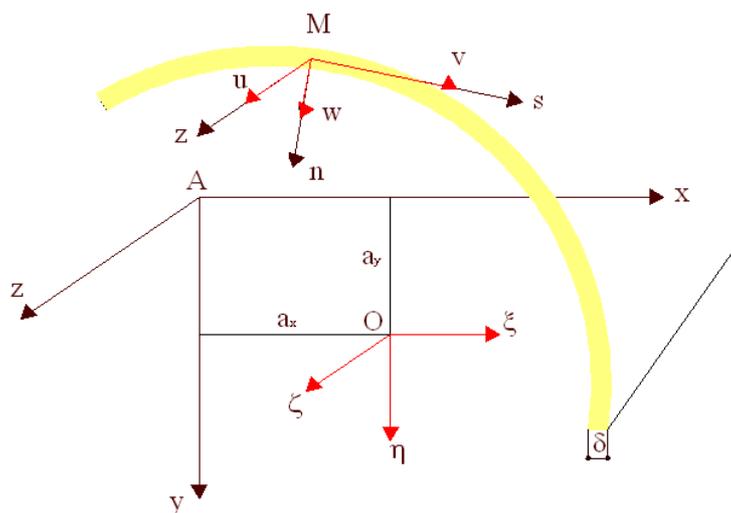


Figura 1: Sistema de ejes coordenados

Siguiendo la convención adoptada por Vlasov, se adopta un sistema rectangular de coordenadas globales  $(x, y, z)$  de manera que conformen una terna izquierda. (Ver figura 1)

Los desplazamientos asociados al sistema coordenado elegido son  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  respectivamente. En la figura,  $O$  representa el centroide de la sección transversal y  $A$  el centro de corte.

Para el caso de sección uniforme, el modelo físico desarrollado por [Ambrosini et al. \(2000\)](#) está formado por las siguientes ecuaciones diferenciales parciales acopladas de cuarto orden:

$$\begin{aligned} EJ_y \left( \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z^3} \right) - \rho J_y \left( \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z \partial t^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a_y \rho F \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= q_x \\ EJ_x \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z^3} \right) - \rho J_x \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z \partial t^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a_x \rho F \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= q_y \\ EJ_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \rho J_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + a_y \rho F \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a_x \rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + r^2 \rho F \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= m \end{aligned} \quad (1)$$

En esas ecuaciones,  $F$  es el área de la sección transversal,  $J_x$  y  $J_y$  son los momentos de inercia de la sección transversal en relación a los ejes principales,  $J_\varphi$  el momento de inercia sectorial,  $J_d$  el módulo de torsión,  $a_x$  y  $a_y$  las coordenadas del centro de corte.  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal,  $G$  es el módulo de elasticidad transversal y  $\rho$  denota la densidad de masa del material de la viga.  $q_x$ ,  $q_y$  y  $m$  son las cargas y momento torsor externos por unidad de longitud. Finalmente,  $\gamma_{mx}$  y  $\gamma_{my}$  representan los valores medios de las deformaciones por corte sobre una sección transversal  $z = \text{constante}$ .

$$\begin{aligned} \gamma_{mx} &= \frac{Q_x}{k_x F G} \\ \gamma_{my} &= \frac{Q_y}{k_y F G} \end{aligned} \quad (2)$$

Donde  $Q_x$  y  $Q_y$  son los esfuerzos de corte en la sección transversal y  $k_x$  y  $k_y$  son los coeficientes de Cowper.

Con el fin de incorporar el efecto de una carga axial a las expresiones (1) se considera una fuerza longitudinal  $P$  aplicada en un punto arbitrario de la sección  $e_x, e_y$ .

Si  $P$  es una fuerza de tracción y  $M_x$  y  $M_y$  son los momentos de flexión producidos por la carga excéntrica de manera que  $M_x = P e_y$  y  $M_y = -P e_x$  (Ver figura 2), se obtiene la tensión normal producida por la carga  $P$

$$\sigma_p = \frac{P}{F} - \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y \quad (3)$$

El desplazamiento de un punto  $M$  ubicado en la sección transversal queda determinado por:

$$\begin{aligned} \xi_M &= \xi - (y - a_y) \theta \\ \eta_M &= \eta + (x - a_x) \theta \end{aligned} \quad (4)$$

Donde  $\theta$  es el giro de la sección transversal alrededor del polo.

Los esfuerzos normales  $\sigma_p \delta ds$  actuando en la sección transversal de una faja elemental, son proyectados en las direcciones de los ejes coordenados  $x$  e  $y$  como resultado de las deformaciones por flexión.

Llamando a las magnitudes de estas proyecciones  $p_x$  y  $p_y$ , y considerando que las tensiones normales no varían a lo largo de la viga obtenemos de la figura 2

$$\begin{aligned} p_x dz ds &= \sigma_p \delta ds \frac{dz}{\rho_x} \\ p_y dz ds &= \sigma_p \delta ds \frac{dz}{\rho_y} \end{aligned} \quad (5)$$

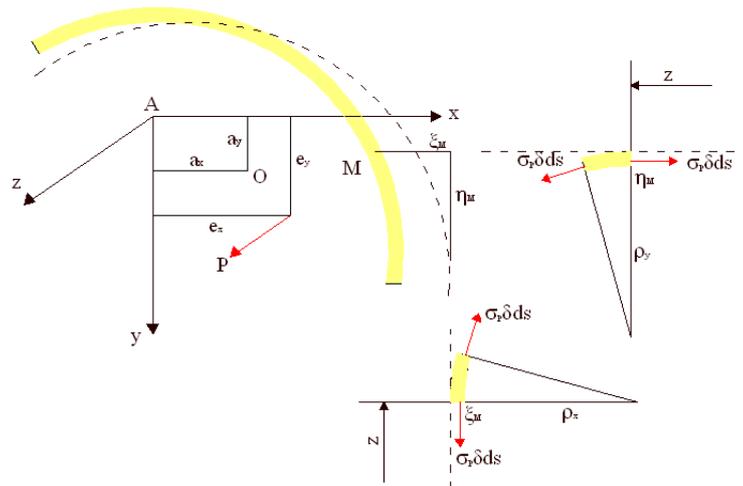


Figura 2: Carga axial y sus proyecciones

donde  $\rho_x$  y  $\rho_y$  son los radios de curvatura de las proyecciones de  $\xi_M$  y  $\eta_M$  en los planos coordenados  $Oxz$  y  $Oyz$  durante el pandeo.

Estas curvaturas pueden ser expresadas como

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{\partial^2 \xi_M}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \tag{6}$$

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{\partial^2 \eta_M}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z}$$

Reemplazando (6) en (5) y simplificando por  $ds dz$

$$p_x = \sigma_p \delta \left[ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - (y - a_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right] \tag{7}$$

$$p_y = \sigma_p \delta \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + (x - a_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right]$$

A partir de las cargas por unidad de superficie, se pueden determinar las cargas por unidad de longitud  $q_{px}$ ,  $q_{yp}$  y  $m_p$  integrando (7) en  $ds$ .

Teniendo en cuenta la expresión de  $\sigma_p$  y considerando que  $\delta ds = dF$ ; y que en ejes principales  $S_x = S_y = J_{xy} = 0$  se obtiene:

$$q_{xp} = P \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} (M_x - P a_y)$$

$$q_{yp} = P \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} (-M_y - P a_x) \tag{8}$$

$$m_p = - \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) (M_x - P a_y) + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) (-M_y - P a_x)$$

$$+ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} (P r^2 - M_y \beta_x + M_x \beta_y)$$

donde  $r$ ,  $\beta_x$  y  $\beta_y$  son características geométricas

$$r^2 = a_x^2 + a_y^2 + \frac{J_x + J_y}{F} \tag{9}$$

$$\beta_x = \frac{U_y}{2J_y} - a_x$$

$$\beta_y = \frac{U_x}{2J_x} - a_y$$
(10)

$$U_x = \int_F y^3 dF + \int_F x^2 y dF$$

$$U_y = \int_F x^3 dF + \int_F y^2 x dF$$
(11)

Los términos de la derecha de la expresión (11) corresponden a los momentos y productos de inercia de tercer orden de la sección considerada. Se ha mantenido la nomenclatura adoptada por Vlasov para las ecuaciones (10) y (11).

Incorporando las (8) en las ecuaciones (1) se obtienen las ecuaciones de movimiento para vibraciones flexotorsionales de vigas de pared delgada cargadas axialmente:

$$EJ_y \left( \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z^3} \right) - P \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) + P (e_y - a_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} +$$

$$+ \rho F \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho J_y \left( \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z \partial t^2} \right) = q_x$$

$$EJ_x \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z^3} \right) - P \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) - P (e_x - a_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} +$$

$$+ \rho F \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho J_x \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z \partial t^2} \right) = q_y$$
(12)

$$EJ_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + P \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) (e_y - a_y) -$$

$$- P \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) (e_x - a_x) - P (r^2 + 2e_x \beta_x + 2e_y \beta_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

$$+ \rho F \left( a_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho J_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} = m$$

El sistema representa un modelo general para vigas que tiene en cuenta el acoplamiento triple entre las vibraciones flexionales y torsionales. Debe tenerse en cuenta que la ecuación de vibración longitudinal relacionada al desplazamiento generalizado  $\zeta$  (Figura 1) está desacoplada del resto del sistema. En el caso que las vibraciones longitudinales sean de interés pueden ser tratadas independientemente.

### 3. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1. Formulación variacional

La ventaja de crear un *elemento viga*, reside en la posibilidad de incorporar en su formulación características propias del modelo de viga desarrollado, haciendo de este elemento una alternativa más poderosa respecto a otros elementos.

Se considera a partir de este punto, el caso particular que no existen cargas externas en el dominio.

Se reemplaza (2) en (12), eliminando las variables de deformaciones por corte  $\gamma_{mx}$  y  $\gamma_{my}$ . Se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales en función de los desplazamientos  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
 & EJ_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - P \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + P(e_y - a_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \rho F \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \frac{P\rho}{k_x G} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \\
 & - \frac{\rho EJ_y}{k_x G} \left( \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + a_y \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} \right) - \rho J_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J_y}{k_x G} \left( \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} + a_y \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4} \right) = 0 \\
 & EJ_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - P \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - P(e_x - a_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \rho F \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \frac{P\rho}{k_y G} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \\
 & - \frac{\rho EJ_x}{k_y G} \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - a_x \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} \right) - \rho J_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 J_x}{k_y G} \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^4} - a_x \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4} \right) = 0 \\
 & EJ_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - [GJ_d + P(r^2 + 2e_x \beta_x + 2e_y \beta_y)] \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + P \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} (e_y - a_y) - P \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} (e_x - a_x) \\
 & - \frac{P\rho}{k_x G} (e_y - a_y) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \frac{P\rho}{k_y G} (e_x - a_x) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) \\
 & - \rho J_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F \left( a_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

El sistema de ecuaciones (13) junto con las condiciones de borde representa la *forma fuerte o diferencial* del problema. Para continuar con el desarrollo del elemento finito, las ecuaciones diferenciales deben ser reemplazadas por una forma integral llamada *forma débil o variacional*, la cual es equivalente. Para ello, se multiplican las ecuaciones anteriores por *funciones de ponderación*  $v_i$  y se integran en el dominio.

A partir del planteo variacional:

$$\begin{aligned}
 & \text{Se busca: } u_i \in \text{Cin} \quad \text{con } i = 1, \dots, 3 \quad \text{tales que} \\
 & \underbrace{B(u_i, v_i)}_{\text{Trabajo Virtual Interno}} = \underbrace{l(v_i)}_{\text{Trabajo Virtual Externo}} \\
 & \forall v_i \in \text{Cin}^* \quad \text{con } i = 1, \dots, 3
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 \text{Cin} &= \{u_i(z) \in L_2(\Omega), \frac{\partial u_i(z)}{\partial z} \in L_2(\Omega) \text{ y } \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} \in L_2(\Omega) \text{ verifica CB esenciales}\} \\
 \text{Cin}^* &= \{v_i(z) \in L_2(\Omega), \frac{\partial v_i(z)}{\partial z} \in L_2(\Omega) \text{ y } \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} \in L_2(\Omega) \text{ verifica CB esenciales homogéneas}\} \\
 L_2(\Omega) &= \{w_i(z) : \int_\omega w_i(z)^2 dz < \infty\}
 \end{aligned}$$

con  $\Omega$  dominio geométrico del problema.

Las *funciones de prueba* elegidas poseen las siguientes características:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \xi(z, t) = \alpha_1(t)\xi(z) \\
 u_2 &= \eta(z, t) = \alpha_2(t)\eta(z) \\
 u_3 &= \theta(z, t) = \alpha_3(t)\theta(z)
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Donde:

$$\alpha_i(t) = e^{i\omega t} \quad i = 1, \dots, 3. \quad (16)$$

Las expresiones correspondientes a los operadores  $B(u_i, v_i)$  permiten identificar los términos asociados a la matriz de masa y a la matriz de rigidez.

$$\begin{aligned} B(u_1, u_3, v_1) &= \alpha \int_0^l \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} E J_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} dz + \alpha \int_0^l \frac{\partial v_1}{\partial z} P \frac{\partial \xi}{\partial z} dz - \alpha \int_0^l \frac{\partial v_1}{\partial z} P (e_y - a_y) \frac{\partial \xi}{\partial z} dz \\ &+ \frac{\partial^2 \alpha(t)}{\partial t^2} \int_0^l \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\rho F E J_y}{k_x F G} \frac{\partial \xi}{\partial z} dz + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\rho F E J_y}{k_x F G} a_y \frac{\partial \theta}{\partial z} dz + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l v_1 \rho F \xi dz \\ &+ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l v_1 \rho F a_y \theta dz + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l v_1 \frac{P \rho F}{k_x F G} \xi dz + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l v_1 \frac{P \rho F}{k_x F G} a_y \theta dz \\ &+ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l \frac{\partial v_1}{\partial z} \rho J_y \frac{\partial \xi}{\partial z} dz - \frac{\partial^4 \alpha}{\partial t^4} \int_0^l v_1 \frac{\rho^2 F J_y}{k_x F G} \xi dz - \frac{\partial^4 \alpha}{\partial t^4} \int_0^l v_1 \frac{\rho^2 F J_y}{k_x F G} a_y \theta dz \\ B(u_2, u_3, v_2) &= \alpha \int_0^l \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} E J_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} dz + \alpha \int_0^l \frac{\partial v_2}{\partial z} P \frac{\partial \eta}{\partial z} dz - \alpha \int_0^l \frac{\partial v_2}{\partial z} P (e_x - a_x) \frac{\partial \eta}{\partial z} dz \\ &+ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l \frac{\partial v_2}{\partial z} \frac{\rho F E J_x}{k_y F G} \frac{\partial \eta}{\partial z} dz + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l \frac{\partial v_2}{\partial z} \frac{\rho F E J_x}{k_y F G} a_x \frac{\partial \theta}{\partial z} dz + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l v_2 \rho F \eta dz \\ &+ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l v_2 \rho F a_x \theta dz + \frac{\partial^2 \alpha(t)}{\partial t^2} \int_0^l v_2 \frac{P \rho F}{k_y F G} \eta dz + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l v_2 \frac{P \rho F}{k_y F G} a_x \theta dz \\ &+ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l \frac{\partial v_2}{\partial z} \rho J_x \frac{\partial \eta}{\partial z} dz - \frac{\partial^4 \alpha}{\partial t^4} \int_0^l v_2 \frac{\rho^2 F J_x}{k_y F G} \xi dz - \frac{\partial^4 \alpha}{\partial t^4} \int_0^l v_2 \frac{\rho^2 F J_x}{k_y F G} a_y \theta dz \\ B(u_1, u_2, u_3, v_3) &= \alpha \int_0^l \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} E J_\varphi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz + \alpha \int_0^l \frac{\partial v_3}{\partial z} G J_d \frac{\partial \theta}{\partial z} dz + \alpha \int_0^l \frac{\partial v_3}{\partial z} P R^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} dz \\ &+ \alpha \int_0^l \frac{\partial v_3}{\partial z} \rho J_\varphi \frac{\partial \theta}{\partial z} dz - \alpha \int_0^l \frac{\partial v_3}{\partial z} P (e_y - a_y) \frac{\partial \eta}{\partial z} dz + \alpha \int_0^l \frac{\partial v_3}{\partial z} P (e_x - a_x) \frac{\partial \eta}{\partial z} dz \\ &- \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l v_3 \frac{P \rho F}{k_x F G} (e_y - a_y) (\xi + a_y \theta) dz + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l v_3 \frac{P \rho F}{k_y F G} (e_x - a_x) (\eta - a_x \theta) dz \\ &+ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \int_0^l v_3 \rho F (a_y \eta - a_x \theta + r^2 \theta) dz \end{aligned} \quad (17)$$

Como no hay términos de carga en el dominio, el operador  $l(v)$  sólo tiene términos en el contorno que deben ser considerados con la condición de borde.

### 3.2. Elemento de viga

Cuando se consideran nulas la carga axial, las deformaciones por corte y las inercias rotacionales, el operador integral  $B(u_i, v_i)$  presente en este trabajo se reduce al caso del operador planteado en Fish and Belytschko (2007) para teoría lineal de vigas.

Para esa teoría se asumen como funciones de interpolación o funciones de forma elementales *polinomios cúbicos de Hermite* (Ver figura 3). Estos polinomios cúbicos son completos y aseguran el cumplimiento de los criterios de convergencia del método de elementos finitos (Bathe, 1996; Zienkiewicz and Taylor, 1994).

Dado que todos los términos del operador  $B(u_i, v_i)$  obtenido poseen una exigencia en el orden de derivación igual o menor a la teoría lineal de vigas, se adoptan las mismas funciones polinómicas para interpolar los desplazamientos de las funciones de prueba y las funciones de ponderación.

Las expresiones de las funciones de forma elegidas para un elemento de longitud  $h_e$ :

$$\begin{aligned} N_1(s) &= (1/4)(2 + s)(1 - s)^2 \\ N_2(s) &= (h_e/8)(1 + s)(1 - s)^2 \\ N_3(s) &= (1/4)(2 - s)(1 + s)^2 \\ N_4(s) &= (h_e/8)(s - 1)(1 + s)^2 \end{aligned} \tag{18}$$

$$s = \frac{2z}{h_e} - 1 \quad \text{entonces} \quad -1 < s < 1 \tag{19}$$

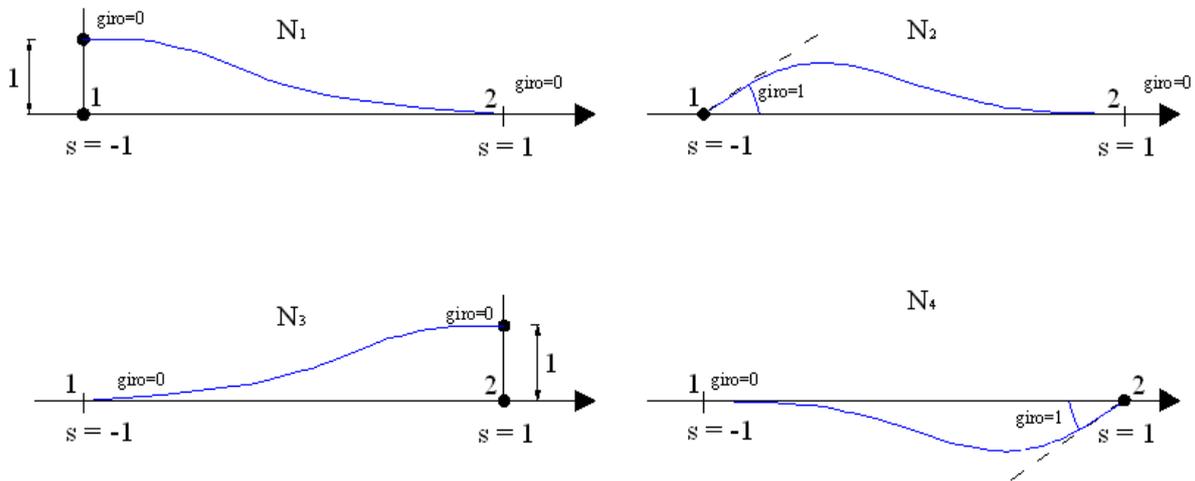


Figura 3: Funciones de forma: Hermite

Los grados de libertad de un elemento de longitud  $h_e$  quedan definidos en la figura 4.

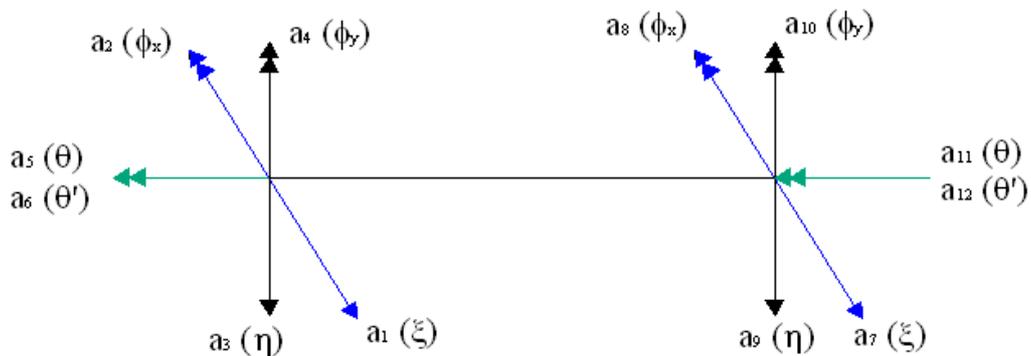


Figura 4: Grados de Libertad del elemento

Entonces, los desplazamientos de un elemento quedan definidos por:

$$u_i = v_i = \mathbb{N}_i^e a_i^e \quad (20)$$

Donde:

$\mathbb{N}_i^e$  = Matriz de Funciones de Forma para un elemento de longitud  $h_e$

$a^e$  = Vector con los Grados de Libertad del elemento

Reemplazando (16) y (20) en (17) y utilizando además la siguiente nomenclatura para indicar derivada segunda y derivada primera de las funciones de forma

$$\begin{aligned} B^e &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 N_1^e(s)}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 N_2^e(s)}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 N_3^e(s)}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 N_4^e(s)}{\partial s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ dz \end{pmatrix}^2 \\ G^e &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1^e(s)}{\partial s} & \frac{\partial N_2^e(s)}{\partial s} & \frac{\partial N_3^e(s)}{\partial s} & \frac{\partial N_4^e(s)}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

se pueden expresar las ecuaciones de equilibrio matricialmente (Zienkiewicz and Taylor, 1994):

$$\sum_{i=1}^{nel} [(\mathbb{K}_{ij}^e - \omega^2 \mathbb{M}_{1ij}^e + \omega^4 \mathbb{M}_{2ij}^e) a^e] = 0 \quad (22)$$

Como el vector de desplazamientos nodales  $a^e$  es igual para todos los elementos y distribuyendo la sumatoria:

$$(\mathbb{K}_{ij} - \omega^2 \mathbb{M}_{1ij} + \omega^4 \mathbb{M}_{2ij}) a = 0 \quad (23)$$

La ecuación (23) es un problema de valores propios.

Se presentan finalmente las expresiones de las matrices de rigidez y masa del elemento finito desarrollado.

La matriz de masa se presenta como suma de tres matrices sólo con el fin de clarificar su contenido. La primera matriz contiene los términos de masa propiamente dichos. La segunda, contiene los términos que afectan a las aceleraciones provenientes de las deformaciones por corte. Por último, la tercera matriz contiene términos que afectan a las aceleraciones provenientes de las deformaciones por corte pero cuyas derivadas respecto al tiempo son de cuarto orden. En vigas esbeltas, esta última matriz puede despreciarse (Clough and Penzien, 1975).

Tanto la matriz de rigidez como las matrices de masa, han sido ordenadas de modo de mostrar los acoplamientos existentes entre la flexión y torsión.

Cabe destacar que, cuando se resuelve numéricamente una aplicación práctica, donde se utiliza más de un elemento, las matrices son reordenadas agrupando todos los grados de libertad

por nodo del elemento, de modo de poder ensamblar las matrices.

$$\mathbb{K}^e = \begin{bmatrix} \int B^T E J_y B dz + \int G^T P G dz & 0 & - \int G^T P (e_y - a_y) G dz \\ 0 & \int B^T E J_x B dz + \int G^T P G dz & \int G^T P (e_x - a_x) G dz \\ - \int G^T P (e_y - a_y) G dz & \int G^T P (e_x - a_x) G dz & \int B^T E J_\varphi B dz + \int G^T G J_d G dz + \int G^T P R^2 G dz \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbb{M}^e = \begin{bmatrix} \int N^T m N dz + \int G^T \rho J_y G dz & 0 & \int N^T m a_y N dz \\ 0 & \int N^T m N dz + \int G^T \rho J_x P G dz & - \int N^T m a_x N dz \\ \int N^T m a_y N dz & - \int N^T m a_x N dz & \int N^T m r^2 N dz + \int G^T \rho J_\varphi G dz \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbb{M}_1^e = \begin{bmatrix} \int G^T \frac{mEJ_y}{k_x FG} G dz + \int N^T \frac{Pm}{k_x FG} N dz & 0 & \int G^T \frac{mEJ_y a_y}{k_x FG} G dz + \int N^T \frac{Pm a_y}{k_x FG} N dz \\ 0 & \int G^T \frac{mEJ_x}{k_y FG} G dz + \int N^T \frac{Pm}{k_y FG} N dz & - \int G^T \frac{mEJ_x a_x}{k_y FG} G dz + \int N^T \frac{Pm a_x}{k_y FG} N dz \\ - \int N^T \frac{Pm(e_y - a_y)}{k_x FG} N dz & \int N^T \frac{Pm(e_x - a_x)}{k_y FG} N dz & - \int N^T \frac{Pm(e_y - a_y)a_y}{k_x FG} N dz + \int N^T \frac{Pm(e_x - a_x)a_x}{k_y FG} N dz \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbb{M}_2^e = \begin{bmatrix} \int N^T \frac{\rho J_y m}{k_x FG} N dz & 0 & \int N^T \frac{\rho J_y m a_y}{k_x FG} N dz \\ 0 & \int N^T \frac{\rho J_x m}{k_y FG} N dz & - \int N^T \frac{\rho J_x m a_x}{k_y FG} N dz \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Para resolver las integrales presentes en las matrices de rigidez y masa se utiliza integración numérica por puntos de Gauss, utilizando la cantidad de puntos necesarios que conducen a una integración exacta del polinomio del orden dado.

### 3.3. Solución del problema de valores propios

El problema de autovalores queda planteado como:

$$(\mathbb{K} - \lambda \mathbb{M}_1 + \lambda^2 \mathbb{M}_2) a = 0 \quad (28)$$

Donde:

$$\lambda = \omega^2 \quad (29)$$

Si llamamos:

$$b = \lambda a \quad (30)$$

Se puede escribir:

$$\mathbb{K} a - \mathbb{M}_1 \lambda a + \mathbb{M}_2 \lambda b = 0 \quad (31)$$

Lo que en forma matricial, queda expresado como:

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_1 & -M_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

Nuevamente, si los términos asociados a la derivada cuarta del tiempo son despreciados, se obtiene:

$$(\mathbb{K} - \lambda \mathbb{M}_1) a = 0 \quad (33)$$

Se obtiene la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\lambda} \quad [rad/s] \quad (34)$$

y frecuencia

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad [Hz] \quad (35)$$

### 3.4. Solución numérica e implementación en MATLAB

Para implementar el elemento de viga, se desarrolló un programa de elementos finitos en entorno MATLAB. Se adoptó como estructura modelo de archivos, la utilizada en [Fish and Belytschko \(2007\)](#) (Ver figura 5).

## 4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se presentan los resultados obtenidos con el programa de elementos finitos desarrollado en el entorno MATLAB. Dada la necesidad de validar este programa, se analizan ejemplos diversos en cuanto a la simetría de la sección transversal como a la condición de carga.

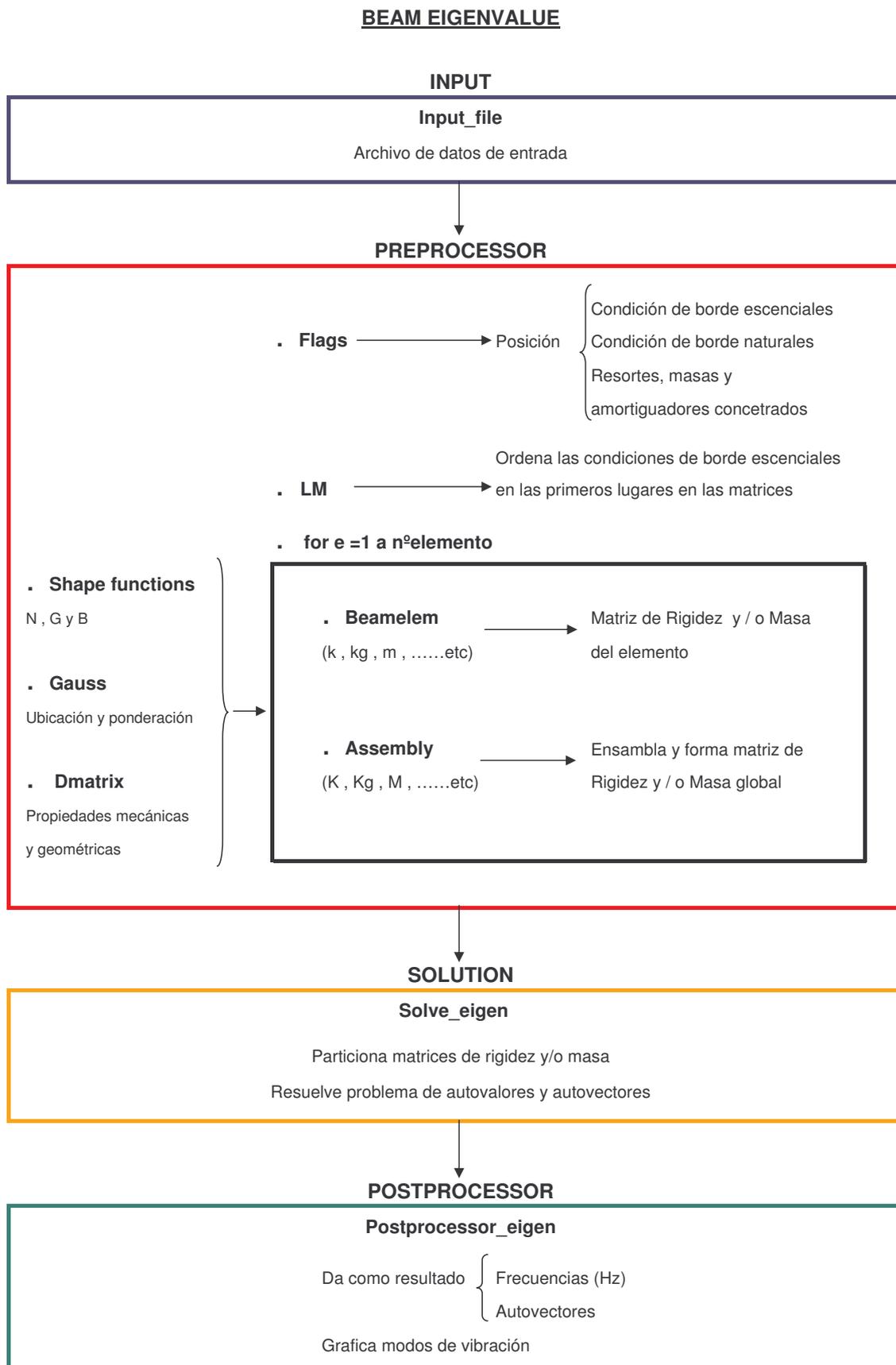


Figura 5: Estructura programa de elementos finitos

#### 4.1. Ejemplo 1

En primer lugar se analiza un ejemplo sin carga axial analizado por Prokić (2006), pero cuya sección es doblemente asimétrica. La sección de la viga (Ver figura 6) posee espesor variable por tramos y se encuentra simplemente apoyada. En su modelación se utilizaron 10 elementos. Los resultados se encuentran en tabla 1, donde se observan los excelentes resultados obtenidos.

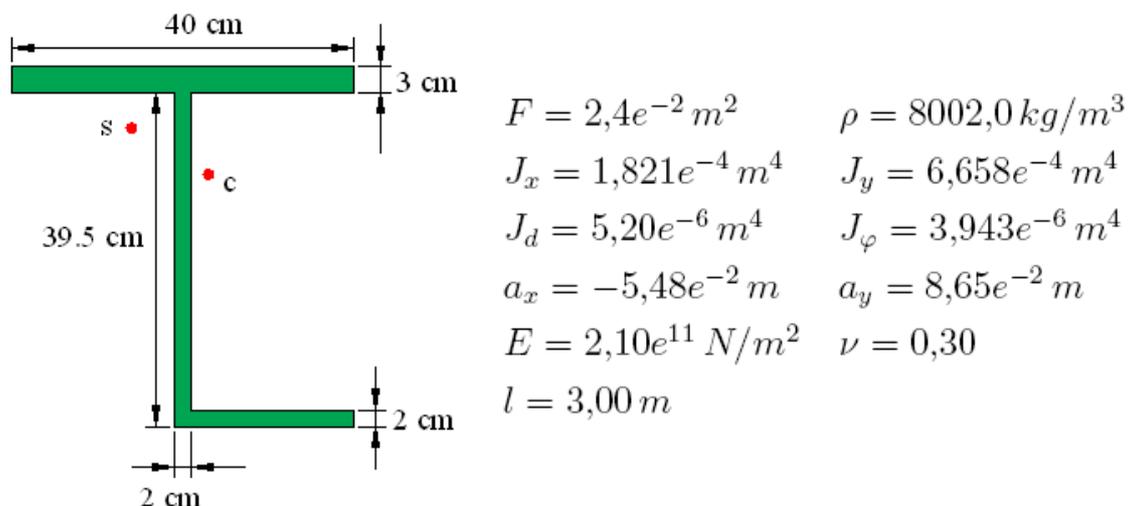


Figura 6: Sección transversal Ejemplo 1

#### Viga Articulada - Articulada

Modo	Frecuencias naturales (Hz)		
	Prokić	MEF	Dif
1	364.23	364.32	0.02 %
2	568.04	567.86	-0.03 %
3	878.10	875.95	-0.25 %
4	1289.79	1289.81	0.00 %
5	2051.21	2051.21	-0.29 %
6	2744.21	2742.35	-0.07 %

Tabla 1: Ejemplo 1: Viga Articulada - Articulada

#### 4.2. Ejemplo 2

Este ejemplo corresponde a ensayos de vigas de aluminio y cuyos resultados se encuentran en Ambrosini and Danesi (2003). En ese trabajo, se compararon los resultados experimentales con los obtenidos con un software propio y con un programa comercial de elementos finitos. En este último se utilizaron 20 elementos de placa en la dirección longitudinal y 3 elementos en la dirección transversal considerando los efectos flexionales y membranales. Posteriormente

se refinó la malla, utilizando 100 elementos en la dirección longitudinal y 9 elementos en la dirección transversal.

Para realizar de algún modo una comparación en la eficiencia numérica del elemento finito formulado, se utilizan 20 elementos de barra en la modelación de la viga y se comparan los resultados con aquellos obtenidos con los elementos de placa del software comercial.

La sección transversal se encuentra en figura 7 y los resultados en tabla 2.

Se analiza una viga doblemente empotrada.

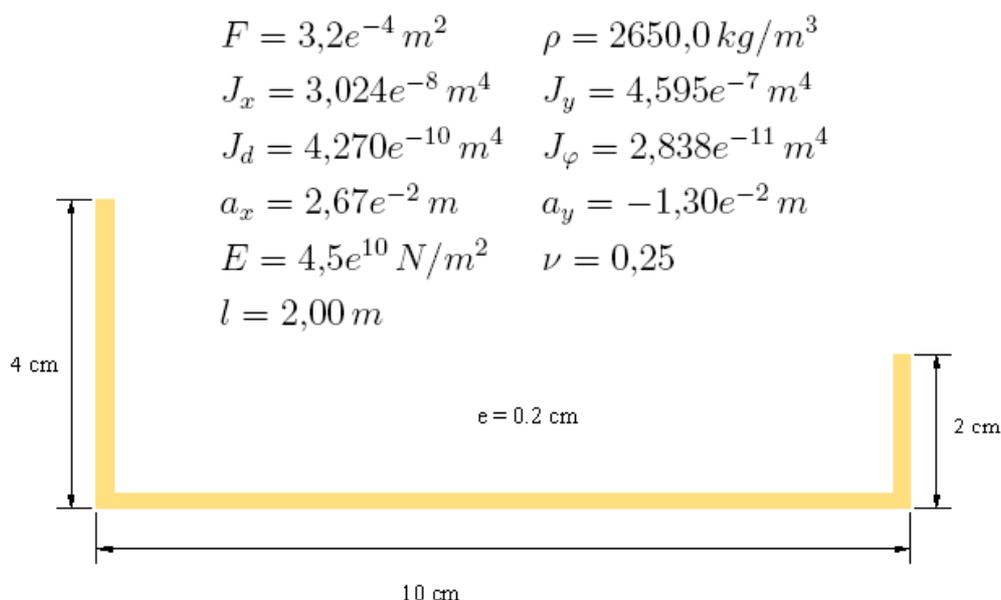


Figura 7: Sección transversal Ejemplo 2

### Viga Empotrada - Empotrada

Modo	Frecuencias naturales (Hz)						
	Ensayo	MEF barra		MEF 20 elem		MEF 100 elem	
		MEF	Dif	MEF	Dif	MEF	Dif
1	24.5	24.8	1.21 %	22.2	-9.4 %	24.7	0.8 %
2	49.1	47.8	-2.72 %	40.5	-17.5 %	44.9	-8.6 %
3	63.5	63.3	-0.32 %	55.2	-13.1 %	61.9	-2.5 %
4	122.5	119.1	-2.85 %	102.8	-16.1 %	114.1	-6.9 %

Tabla 2: Ejemplo 2: Viga Empotrada - Empotrada

Para este ejemplo, se observa que los valores obtenidos con los elementos de viga son sensiblemente mejores que aquellos obtenidos con los elementos de placas, aún refinando la malla. Las frecuencias obtenidas con el modelo de elementos de placas, se acercan a los valores de frecuencias medidos experimentalmente, al incrementar el número de elementos tanto en la dirección longitudinal como transversal de la viga. Se debe destacar que las frecuencias obtenidas

con los modelos de elementos de placas son en general siempre inferiores a las experimentales, y ello puede ser consecuencia del tipo de elemento de masa que utiliza se utiliza en dicho modelo.

### 4.3. Ejemplo 3

Finalmente, para validar el modelo con carga axial, se eligió un problema estudiado por diversos autores en la literatura, de modo que se cuenta con resultados numéricos. El mismo consta de una viga de sección semicircular (Ver figura 8) donde la carga axial está aplicada en el centroide.

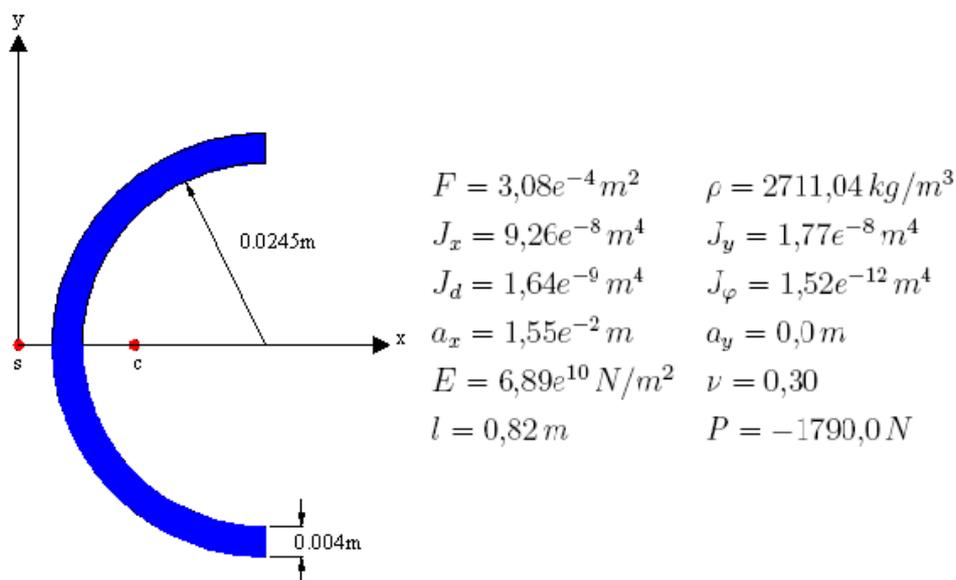


Figura 8: Sección transversal Ejemplo 3

Se analizaron tres condiciones de borde: *Articulado - Articulado*, *Empotrado - Libre* y *Empotrado - Empotrado*. Para las dos primeras condiciones de borde se utilizaron 4 elementos. El caso *empotrado-empotrado* fue analizado con 10 elementos. Los resultados se encuentran en tablas 3, 4 y 5.

**Viga Articulada - Articulada**

Modo	Frecuencias naturales (Hz)					
	P=0			P=-1790 N		
	MEF	Jun et al. (2004)	Dif	MEF	Jun et al. (2004)	Dif
1	89.07	89.27	-0.22 %	84.52	84.69	-0.20 %
2	149.75	150.44	-0.46 %	147.12	147.77	-0.44 %
3	317.81	320.32	-0.79 %	316.60	319.07	-0.78 %
4	354.82	357.11	-0.65 %	350.47	352.62	-0.61 %
5	364.71	365.81	-0.30 %	360.40	361.42	0.28 %
6	605.12	604.13	-0.16 %	599.27	598.16	0.19 %

Tabla 3: Ejemplo 3: Viga Articulada - Articulada

**Viga Empotrada - Libre**

Modo	Frecuencias naturales (Hz)					
	P=0			P=-1790 N		
	MEF	Jun et al. (2004)	Dif	MEF	Jun et al. (2004)	Dif
1	31.77	31.8	-0.09 %	24.99	25.01	-0.08 %
2	63.63	63.79	-0.25 %	61.16	61.31	-0.25 %
3	137.85	137.68	0.12 %	136.33	136.15	0.13 %
4	197.85	199.31	-0.74 %	191.24	192.62	-0.72 %
5	278.34	278.35	0.00 %	275.04	275.03	0.00 %
6	481.52	484.77	-0.67 %	476.29	479.4	-0.65 %

Tabla 4: Ejemplo 3: Viga Empotrada - Libre

**Viga Empotrada - Empotrada**

Modo	Frecuencias naturales (Hz)					
	P=0			P=-1790 N		
	MEF	Jun et al. (2004)	Dif	MEF	Jun et al. (2004)	Dif
1	198.87	198.81	0.03 %	196.64	196.55	0.05 %
2	201.73	202.38	-0.32 %	199.31	199.91	-0.30 %
3	424.57	425.04	-0.11 %	420.46	420.89	-0.10 %
4	551.33	557.87	-1.19 %	548.15	554.53	-1.16 %
5	607.17	618.09	-1.80 %	605.94	616.77	-1.79 %
6	695.27	695.63	-0.05 %	690.18	690.47	-0.04 %

Tabla 5: Ejemplo 3: Viga Empotrada - Empotrada

En todos los ejemplos analizados se ha obtenido una excelente correlación con resultados de otros autores por lo que se considera validado el modelo físico y el elemento finito.

Se desprende de los resultados obtenidos que a excepción de la viga con condición de borde *Empotrado - Empotrado*, la cual presenta una diferencia en la frecuencia natural del primer modo de 1,12 %, la influencia de la carga axial no puede despreciarse.

Se observa además, que dicha influencia es de suma importancia en la primera frecuencia natural de vibración y que disminuye en los modos superiores de vibración.

Es notable, que el hecho de no considerar la carga axial de compresión en el caso de la viga *Empotrada - Libre* conduce a una diferencia en el valor de la frecuencia del 21 %, lo que puede llevar a cometer errores en cálculos posteriores para nada despreciables.

Se puede observar en los resultados obtenidos y considerando solamente el primer modo, que la carga de compresión disminuye el valor de la frecuencia.

## 5. CONCLUSIONES

Se presentan en este trabajo las ecuaciones de movimiento flexotorsionales acopladas para vigas de pared delgada y sección abierta axialmente cargadas. Estas ecuaciones tienen en cuenta las deformaciones por corte e inercias rotacionales. La carga axial puede ser aplicada en un punto arbitrario de la sección transversal.

Se formula un elemento finito de barra incorporando esta formulación, el cual es utilizado para desarrollar un programa de elementos finitos en entorno MATLAB, que resuelve el problema de valores propios.

Se analizan diversos ejemplos numéricos y se observa, que con el elemento desarrollado se obtienen resultados comparables a los de la literatura, utilizando poca cantidad de ellos. En los ejemplos investigados, dadas las esbelteces de las vigas, se resuelve el problema de valores propios clásico.

Además, la proximidad en los valores numéricos obtenidos con la formulación presentada respecto a ensayos experimentales es superior a los obtenidos con elementos de placa, los cuales obviamente pueden ser mejorados utilizando mayor cantidad de elementos en detrimento del costo computacional. Se destaca, por lo tanto, su eficiencia y bajo costo computacional.

Por otra parte, se constata que la fuerza axial no puede despreciarse en la obtención de las frecuencias naturales de vibración para todas las condiciones de borde consideradas. La influencia es fundamental en el primer modo de vibración, obteniéndose valores que difieren para uno de los casos analizados en un 20 % y para los otros, una diferencia nunca menor al 5 %. Dicha influencia disminuye en los modos superiores.

### Agradecimientos

Se agradece el apoyo financiero de CONICET y de la Universidad Nacional de Cuyo.

### REFERENCIAS

- Aggarwal H. and Cranch E. A theory of torsional and coupled bending torsional waves in thin-walled open section beams. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 34:337–343, 1967.
- Ali Hasan S. and Barr A. Linear vibration of thin-walled beams of equal angle-section. *Journal of Sound and Vibration*, 32:3–23, 1974.
- Ambrosini R. and Danesi R. Free vibration of nonsymmetrical thin walled beams. *Mecánica Computacional. Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, ENIEF*, 22:666–677, 2003.
- Ambrosini R., Riera J., and Danesi R. Dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams with shear flexibility. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:2867–2885, 1995.
- Ambrosini R., Riera J., and Danesi R. A modified vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams. *Engineering Structures*, 22:890–900, 2000.
- Arpaci A. and Bozdog E. On free vibration analysis of thin-walled beams with nonsymmetrical open cross-sections. *Computers and Structures*, 80:691–695, 2002.
- Back S. and Will K. Shear-flexible thin-walled element for composite i-beams. *Engineering Structures*, 30:1447–1458, 2008.
- Bathe K. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall Inc., New Jersey, 1996.
- Bishop R., Cannon S., and Miao S. On coupled bending and torsional vibration of uniform beams. *Journal of Sound and Vibration*, 131:457–464, 1989.
- Chen H. and Hsiao K. Coupled axial-torsion vibration of thin-walled z section beam induced by boundary conditions. *Thin Walled Structures*, 45:573–583, 2007a.
- Chen H. and Hsiao K. Quadruply coupled linear free vibrations of thin walled beams with generic open section. *Engineering Structures*, 30:1319–1334, 2007b.
- Christiano P. and Culver C. Horizontally curved bridges subject to moving load. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 1969.
- Clough R. and Penzien J. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, Singapore, 1975.
- Ebner A. and Billington D. Steady state vibrations of damped timoshenko beams. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 1968.
- Erkmen R. and Mohareb M. Buckling analysis of thin walled open members- a finite element formulation. *Thin Walled Structures*, 2008.
- Fish J. and Belytschko T. *A first course in Finite Elements*. John Wiley & Sons Ltd, England, 2007.
- Jun L., Wanyou L., and Rongying S. Honginxing H. Coupled bending an torsional vibration of nonsymmetrical axially loades thin-walled bernoulli-euler beam. *Mechanics Research Communication*, 31:697–711, 2004.
- Kim M., Yun H., and Kim N. Exact dynamic and static element stiffness matrices of nonsym-

- metric thin-walled beam-columns. *Computers and Structures*, 81:1425–1448, 2003.
- Kim N. and Kim M. Exact dynamic/static stiffness matrices of nonsymmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects. *Thin Walled Structures*, 43:701–734, 2005.
- Kim S. and Kim M. Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames. *Engineering Structures*, 22:446–458, 2000.
- Pestel E. and Leckie F. *Matrix Methods in Elastomechanics*. McGraw Hill, 1963.
- Prokić A. On fivefold coupled vibrations of timoshenko thin-walled beams. *Engineering Structures*, 28:54–62, 2006.
- Sapountzakis E. and Mokos V. 3-d beam element of composite cross section including warping and shear deformation effects. *Computers and Structures*, 85:102–116, 2007.
- Tanaka M. and Bercin A. Free vibration solution for uniform beams of nonsymmetrical cross section using mathematica. *Computers and Structures*, 71:1–8, 1999.
- Timoshenko S. and Young D. *Vibration Problems in Engineering*, volume 3. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1968.
- Vlasov V. *Thin-walled Elastic Beams*, volume 2. Israel Program for Scientific Translations, 1963.
- Yaman Y. Vibrations of open-section channels: A coupled flexural and torsional wave analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 204:131–158, 1997.
- Yoo C. and Fehrenbach J. Natural frequencies of curved girders. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 1982.
- Zienkiewicz O. and Taylor R. *The finite element method*, volume I. McGraw Hill, 1994.