

COMPARAÇÃO ENTRE OS ALGORITMOS DE MACCORMACK E DE JAMESON E MAVRIPLIS NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EULER E DE NAVIER-STOKES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Edisson Sávio de Góes Maciel *

* Departamento de Energia Nuclear
Universidade Federal de Pernambuco
Av. Prof. Luiz Freire, 1000 – Cidade Universitária – Recife – PE – Brasil – CEP 50.740-540
e-mail: edissonsavio@yahoo.com.br

Palavras-chaves: Algoritmo de MacCormack, Algoritmo de Jameson e Mavriplis, Equações de Euler e de Navier-Stokes, Volumes finitos, Espaço tridimensional.

Resumo. *O presente trabalho compara os algoritmos de MacCormack e de Jameson e Mavriplis aplicados à solução das equações de Euler e de Navier-Stokes no espaço tridimensional, resolvendo problemas aeroespaciais. Uma formulação de volumes finitos é utilizada, numa estrutura de dados centrada na célula e discretização espacial estruturada. Os esquemas possuem segunda ordem de precisão espacial e temporal. A integração temporal utiliza um esquema preditor-corretor com discretização espacial avançada no passo preditor e recuada no passo corretor para o esquema de MacCormack. No caso do esquema de Jameson e Mavriplis, um método tipo Runge-Kutta é usado para realizar a integração temporal. Um operador de dissipação artificial baseado no trabalho de Azevedo é implementado para garantir a estabilidade dos esquemas na presença de choques e da instabilidade de campo. São resolvidos os problemas físicos do escoamento supersônico ao longo de uma rampa e do escoamento hipersônico de “gás frio” ao longo de um difusor. Os resultados demonstraram boa representatividade dos campos de escoamento. No problema da rampa o choque é bem detectado e no problema do difusor a interferência de choques é bem resolvida por ambos os esquemas. Oscilações pré-choque ocorrem nas soluções não viscosas geradas pelo algoritmo de MacCormack. As soluções não viscosas geradas pelo esquema de Jameson e Mavriplis apresentam significativamente menos oscilações no problema da rampa do que o esquema de MacCormack e nenhuma oscilação no problema do difusor. As distribuições de $-C_p$ geradas pelos algoritmos descrevem apropriadamente o choque e o leque de expansão no problema da rampa, para o caso não viscoso, perdendo qualidade na solução viscosa.*

1 INTRODUÇÃO

Para resolver escoamentos mais realísticos é necessário resolver as equações de Navier-Stokes no espaço tridimensional utilizando modelos de turbulência mais precisos, dentro de uma faixa de custos ainda razoável. Simulações diretas ou do tipo de grandes vórtices (do inglês: “Large Eddy Simulation”) são ainda caras e requerem um poder computacional ainda elevado no Brasil. Estudos tridimensionais começam com simulações não viscosas a fim de aferir o algoritmo de solução para problemas típicos e, posteriormente, são aprofundados para a solução das equações de Navier-Stokes laminar e por fim turbulentas.

Pulliam e Steger¹ realizaram estudos com as equações de Navier-Stokes, em sua formulação de camada fina, aplicadas a escoamentos tridimensionais. Um esquema de diferenças finitas implícito foi usado para simulações de escoamentos não estacionários em configurações de geometria arbitrária através do uso de um sistema de coordenadas generalizadas. Uma técnica de fatoração aproximada implícita foi empregada a fim de obter melhores condições de estabilidade. Os autores enfatizaram que o esquema podia ser utilizado para escoamentos não viscosos e viscosos, não estacionários e estacionários.

Long, Khan e Sharp² desenvolveram um método para solução das equações de Euler ou de Navier-Stokes no espaço tridimensional. O método foi desenvolvido segundo um formalismo de volumes finitos e a discretização espacial podia ser estruturada ou não estruturada para malhas de hexaedros ou de tetraedros, respectivamente. A estrutura de dados era baseada na célula e a integração temporal era realizada por um método de Runge-Kutta de três, quatro ou cinco estágios. O esquema podia ser simétrico, com um operador de dissipação artificial para garantir estabilidade numérica, ou assimétrico. No caso do esquema assimétrico, foi utilizado o esquema de Roe³. Testes foram realizados com asas Delta e Lockheed/AFOSR.

No presente trabalho, os esquemas de MacCormack⁴ e de Jameson e Mavriplis⁵ são implementados, no contexto de volumes finitos e utilizando uma discretização espacial estruturada, para resolver as equações de Euler e de Navier-Stokes no espaço tridimensional, aplicadas aos problemas do escoamento supersônico ao longo de uma rampa e do escoamento hipersônico ao longo de um difusor. É necessária a introdução de um operador de dissipação para garantir a estabilidade dos esquemas e o modelo de Azevedo⁶ é implementado. Os resultados demonstraram que os esquemas de Jameson e Mavriplis⁵ e de MacCormack⁴ fornecem resultados satisfatórios, detectando as principais características dos escoamentos.

2 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Neste trabalho serão apresentadas as equações de Navier-Stokes, tendo em vista que as equações de Euler são obtidas diretamente destas equações pelo desprezo dos vetores de fluxo difusivo. O movimento fluido é descrito pelas equações de Navier-Stokes, que expressam a conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia para um meio viscoso, condutor de calor e compressível, na ausência de forças externas. Na forma integral e conservativa, estas equações podem ser representadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \int_S [(E_e - E_v)n_x + (F_e - F_v)n_y + (G_e - G_v)n_z] dS = 0, \quad (1)$$

com Q escrito para um sistema Cartesiano; V é o volume da célula; n_x , n_y e n_z são as componentes do vetor normal à face de fluxo; S é a área de fluxo; E_e , F_e e G_e são as componentes do vetor de fluxo convectivo; e E_v , F_v e G_v são as componentes do vetor de fluxo difusivo. Os vetores Q , E_e , F_e , G_e , E_v , F_v e G_v são representados por:

$$Q = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{Bmatrix}, \quad E_e = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{Bmatrix}, \quad F_e = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{Bmatrix} \quad e \quad G_e = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (e+p)w \end{Bmatrix}; \quad (2)$$

$$E_v = \frac{I}{Re} \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w - q_x \end{Bmatrix}, \quad F_v = \frac{I}{Re} \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w - q_y \end{Bmatrix} \quad e \quad G_v = \frac{I}{Re} \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w - q_z \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Nestas equações, as componentes do tensor de tensões viscosas são definidas como:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad e \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (4)$$

As componentes do vetor de fluxo de calor condutivo são definidas pela lei de Fourier como segue:

$$q_x = -\left(\frac{\gamma\mu}{Pr} \right) \frac{\partial e_i}{\partial x}, \quad q_y = -\left(\frac{\gamma\mu}{Pr} \right) \frac{\partial e_i}{\partial y} \quad e \quad q_z = -\left(\frac{\gamma\mu}{Pr} \right) \frac{\partial e_i}{\partial z}, \quad (5)$$

sendo ρ a densidade do fluido; u , v e w as componentes Cartesianas do vetor velocidade nas direções x , y e z , respectivamente; e a energia total por unidade de volume do meio fluido; p a pressão estática do meio fluido; μ representa a viscosidade molecular do fluido; Prd é o número de Prandtl laminar; e_i é a energia interna do fluido, definida como $e_i = e/\rho - 0,5(u^2 + v^2 + w^2)$; γ é a razão entre calores específicos; e Re é o número de Reynolds do escoamento.

Nos problemas estudados, as equações de Navier-Stokes foram adimensionalizadas em relação à densidade de escoamento não perturbado, ρ_∞ , à velocidade do som de escoamento não perturbado, a_∞ , e à viscosidade molecular de escoamento não perturbado, μ_∞ . O sistema matricial de equações de Navier-Stokes é fechado com a equação de estado

$p = (\gamma - 1) \left[e - 0,5\rho(u^2 + v^2 + w^2) \right]$, admitindo a hipótese de gás ideal.

3 GEOMETRIA DA MALHA ESTRUTURADA

Uma dada célula computacional nesta notação é formada pelos seguintes nós: (i,j,k) , $(i+1,j,k)$, $(i+1,j+1,k)$, $(i,j+1,k)$, $(i,j,k+1)$, $(i+1,j,k+1)$, $(i+1,j+1,k+1)$ e $(i,j+1,k+1)$. Detalhes desta representação estão disponíveis em Maciel^{7,8}. O cálculo do volume das células computacionais é baseado, no caso mais geral, na determinação do volume de um hexaedro deformado no espaço tridimensional. Este volume é determinado pelo somatório dos volumes dos seis tetraedros que compõem o dado hexaedro. A divisão de um hexaedro em seus seis tetraedros componentes, bem como os nós dos vértices que definem cada célula, podem ser encontrados em Maciel^{7,8}. Para detalhes do cálculo do volume de um dado tetraedro ver também Maciel⁷.

A área de fluxo do hexaedro é calculada pela soma de metade das áreas definidas pelos produtos vetoriais $\left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$ e $\left| \vec{c} \times \vec{d} \right|$, em que \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} são vetores formados pelos nós que definem uma dada superfície de fluxo, conforme descrito em Maciel^{7,8}. A grandeza física $0,5 \left(\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| + \left| \vec{c} \times \vec{d} \right| \right)$ determina a área de fluxo de cada face, que nada mais é do que a área de um retângulo deformado. Os versores normais a cada face de fluxo são calculados considerando o seguinte produto vetorial $\vec{r} \times \vec{t} / \left| \vec{r} \times \vec{t} \right|$, em que \vec{r} e \vec{t} são vetores cruzados de superfície (eles são as diagonais da superfície). Um teste adicional é necessário a fim de verificar se o versor está entrando ou saindo do hexaedro. Este teste é baseado no produto escalar $\left[(\vec{r} \times \vec{t}) \cdot \vec{f} / \left| \vec{r} \times \vec{t} \right| \right]$, em que \vec{f} é o vetor formado por um dos nós da face de fluxo e um nó do hexaedro que estiver contido na face imediatamente oposta. O sinal positivo indica que o vetor está entrando no hexaedro, devendo este ser trocado pelo seu oposto.

4 ALGORITMO DE MACCORMACK⁴

Utilizando o teorema de Green na Eq. (1) e adotando uma notação de malhas estruturadas para as grandezas do fluido e do escoamento, é possível escrever que:

$$\frac{\partial Q_{i,j,k}}{\partial t} = - \frac{I}{V_{i,j,k}} \int_{S_{i,j,k}} (\vec{P} \cdot \vec{n})_{i,j,k} dS_{i,j,k} \quad , \quad (6)$$

com $\vec{P} = [(E_e - E_v) \quad (F_e - F_v) \quad (G_e - G_v)]^t$ sendo o vetor de fluxo convectivo e difusivo.

Aplicando a marcha explícita no tempo à Eq. (6), utilizando o esquema de Euler explícito, e realizando a discretização espacial da integral de superfície conduzem à seguinte expressão:

$$Q_{i,j,k}^{n+1} = Q_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{V_{i,j,k}} \left[(\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j-1/2,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i+1/2,j,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j+1/2,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i-1/2,j,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j,k-1/2} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j,k+1/2} \right]^n \quad , \quad (7)$$

em que, por exemplo, $\vec{S}_{i,j-1/2,k}$ tem a direção e sentido de $\vec{n}_{i,j-1/2,k}$ e magnitude igual ao valor da área $S_{i,j-1/2,k}$. Os índices meios indicam fluxos calculados nas respectivas faces ou superfícies das células.

Discretizando espaço e tempo em conjunto, segundo um método tipo Lax-Wendroff, dividindo o algoritmo resultante em dois passos temporais de integração (um preditor e outro corretor) e adotando a discretização espacial avançada no passo preditor e recuada no passo corretor, é possível obter o algoritmo de MacCormack⁴, segundo uma formulação de volumes finitos, como segue abaixo.

- Passo preditor:

$$\Delta Q_{i,j,k}^n = -\frac{\Delta t}{V_{i,j,k}} \left\{ \begin{aligned} & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i,j-1/2,k}} + (F_e - F_v)n_{y_{i,j-1/2,k}} + (G_e - G_v)n_{z_{i,j-1/2,k}} \right]_{i,j,k} S_{i,j-1/2,k} + \\ & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i+1/2,j,k}} + (F_e - F_v)n_{y_{i+1/2,j,k}} + (G_e - G_v)n_{z_{i+1/2,j,k}} \right]_{i+1,j,k} S_{i+1/2,j,k} + \\ & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i,j+1/2,k}} + (F_e - F_v)n_{y_{i,j+1/2,k}} + (G_e - G_v)n_{z_{i,j+1/2,k}} \right]_{i,j+1,k} S_{i,j+1/2,k} + \\ & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i-1/2,j,k}} + (F_e - F_v)n_{y_{i-1/2,j,k}} + (G_e - G_v)n_{z_{i-1/2,j,k}} \right]_{i-1,j,k} S_{i-1/2,j,k} + \\ & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i,j,k-1/2}} + (F_e - F_v)n_{y_{i,j,k-1/2}} + (G_e - G_v)n_{z_{i,j,k-1/2}} \right]_{i,j,k-1} S_{i,j,k-1/2} + \\ & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i,j,k+1/2}} + (F_e - F_v)n_{y_{i,j,k+1/2}} + (G_e - G_v)n_{z_{i,j,k+1/2}} \right]_{i,j,k+1} S_{i,j,k+1/2} \end{aligned} \right\}$$

$$Q_{p,i,j,k}^{n+1} = Q_{i,j,k}^n + \Delta Q_{i,j,k}^n. \quad (8)$$

- Passo corretor:

$$\Delta Q_{c,i,j,k}^n = -\frac{\Delta t}{V_{i,j,k}} \left\{ \begin{aligned} & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i,j-1/2,k}} + (F_e - F_v)n_{y_{i,j-1/2,k}} + (G_e - G_v)n_{z_{i,j-1/2,k}} \right]_{i,j-1,k}^p S_{i,j-1/2,k} + \\ & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i+1/2,j,k}} + (F_e - F_v)n_{y_{i+1/2,j,k}} + (G_e - G_v)n_{z_{i+1/2,j,k}} \right]_{i,j,k}^p S_{i+1/2,j,k} + \\ & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i,j+1/2,k}} + (F_e - F_v)n_{y_{i,j+1/2,k}} + (G_e - G_v)n_{z_{i,j+1/2,k}} \right]_{i,j,k}^p S_{i,j+1/2,k} + \\ & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i-1/2,j,k}} + (F_e - F_v)n_{y_{i-1/2,j,k}} + (G_e - G_v)n_{z_{i-1/2,j,k}} \right]_{i-1,j,k}^p S_{i-1/2,j,k} + \\ & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i,j,k-1/2}} + (F_e - F_v)n_{y_{i,j,k-1/2}} + (G_e - G_v)n_{z_{i,j,k-1/2}} \right]_{i,j,k-1}^p S_{i,j,k-1/2} + \\ & \left[(E_e - E_v)n_{x_{i,j,k+1/2}} + (F_e - F_v)n_{y_{i,j,k+1/2}} + (G_e - G_v)n_{z_{i,j,k+1/2}} \right]_{i,j,k}^p S_{i,j,k+1/2} \end{aligned} \right\},$$

$$Q_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(Q_{i,j,k}^n + Q_{p,i,j,k}^{n+1} + \Delta Q_{c,i,j,k}^{n+1} \right). \quad (9)$$

Para o cálculo dos vetores de fluxo viscoso, as derivadas presentes nas Eqs. (4) e (5) são consideradas constantes para um dado volume e calculadas em termos da integral de superfície da propriedade ao longo das faces do volume de controle (Teorema de Green):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial u}{\partial x} dV = \frac{1}{V} \int_S u (\vec{n}_x \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{V} \int_S u dS_x \cong \frac{1}{V} \sum_{l=1}^6 u_{i,j,k_l} S_{x_{i,j,k_l}}, \quad (10)$$

em que u_{i,j,k_l} é a média aritmética entre o volume (i,j,k) e seu vizinho “ l ”, por exemplo. O valor da derivada $\partial u/\partial x$ na interface de fluxo $(i,j-1/2,k)$, por exemplo, é adotado como sendo $\partial u/\partial x$ do volume (i,j,k) no passo predictor e como sendo $\partial u/\partial x$ do volume $(i,j-1,k)$ no passo corretor.

Tal como nos estudos de escoamentos bidimensionais, um operador de dissipação artificial de diferenças segunda e quarta (Maciel e Azevedo⁹) é subtraído dos termos de fluxo do RHS no passo corretor, a fim de proporcionar estabilidade ao esquema.

5 ALGORITMO DE JAMESON E MAVRIPLIS⁵

A Equação (7) pode ser reescrita como:

$$\frac{d(Q_{i,j,k})}{dt} + \frac{1}{V_{i,j,k}} \left[(\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j-1/2,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i+1/2,j,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j+1/2,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i-1/2,j,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j,k-1/2} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j,k+1/2} \right]^n = 0, \quad (11)$$

com $(\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j-1/2,k} = \left[(E_e - E_v)_{i,j-1/2,k} S_{x_{i,j-1/2,k}} + (F_e - F_v)_{i,j-1/2,k} S_{y_{i,j-1/2,k}} + (G_e - G_v)_{i,j-1/2,k} S_{z_{i,j-1/2,k}} \right]$ representando o fluxo na interface $(i,j-1/2,k)$, por exemplo. Os vetores de fluxo convectivo e difusivo em cada interface de fluxo são implementados tomando médias das variáveis primitivas em cada face; ou seja, para a face de fluxo $(i,j-1/2,k)$ é possível determinar as variáveis primitivas na interface por média aritmética entre os valores das variáveis primitivas dos volumes $(i,j-1,k)$ e (i,j,k) .

A discretização espacial proposta equivale a uma discretização simétrica sob o contexto da técnica de diferenças finitas. Desta forma, a fim de evitar desacoplamento de soluções do tipo par-ímpar, instabilidades de natureza não linear (ondas de choque), etc., é introduzido explicitamente um operador de dissipação artificial “ D ” para prover estabilidade ao esquema. No presente código foi implementado o modelo de Azevedo⁶. A Eq. (11) é reescrita como:

$$\frac{d(Q_{i,j,k})}{dt} + \frac{1}{V_{i,j,k}} \left[C(Q_{i,j,k}) - D(Q_{i,j,k}) \right] = 0, \quad (12)$$

em que $C(Q_{i,j,k}) = \left[(\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j-1/2,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i+1/2,j,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j+1/2,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i-1/2,j,k} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j,k-1/2} + (\vec{P} \cdot \vec{S})_{i,j,k+1/2} \right]^n$ é a integral de fluxo para a célula (i,j,k) .

A discretização no “pseudotempo” é feita utilizando um método explícito híbrido de Runge-Kutta com segunda ordem de precisão. A forma geral deste método é apresentada a seguir, em que os valores dos coeficientes α 's são escolhidos de modo a prover segunda ordem de precisão temporal.

$$\begin{aligned}
 Q_{i,j,k}^{(0)} &= Q_{i,j,k}^n \quad , \\
 Q_{i,j,k}^{(l)} &= Q_{i,j,k}^{(0)} - \alpha_l \frac{\Delta t_{i,j,k}}{V_{i,j,k}} [C(Q_{i,j,k}^{(l-1)}) - D(Q_{i,j,k}^{(m)})] \quad , \\
 Q_{i,j,k}^{n+1} &= Q_{i,j,k}^{(l)} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

em que “ l ” varia de 1 até no máximo 5; “ m ” varia dependendo do tipo de escoamento em estudo (não viscoso ou viscoso). Swanson e Radespiel¹⁰ sugerem que a dissipação artificial seja atualizada em estágios ímpares para a resolução das equações de Navier-Stokes. Na solução das equações de Euler, estes autores sugerem que a dissipação artificial seja atualizada nos dois primeiros estágios do método de Runge-Kutta. Para o método de Runge-Kutta com cinco estágios, os valores de α são definidos por: $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 1/6$, $\alpha_3 = 3/8$, $\alpha_4 = 1/2$ e $\alpha_5 = 1,0$. Para o cálculo dos vetores de fluxo viscoso, a derivada $\partial u/\partial x$ na interface de fluxo $(i,j-1/2,k)$, por exemplo, é determinado pela média aritmética das derivadas $\partial u/\partial x$ dos volumes $(i,j-1,k)$ e (i,j,k) .

6 OPERADOR DE DISSIPACÃO ARTIFICIAL

O operador de dissipação artificial implementado nos códigos de MacCormack⁴ e de Jameson e Mavriplis⁵ segue a estrutura abaixo:

$$D(Q_{i,j,k}) = d^{(2)}(Q_{i,j,k}) - d^{(4)}(Q_{i,j,k}) \quad ,
 \tag{14}$$

em que:

$$\begin{aligned}
 d^{(2)}(Q_{i,j,k}) &= \varepsilon_{i,j,k,1}^{(2)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i,j-1,k})}{2} (Q_{i,j-1,k} - Q_{i,j,k}) + \varepsilon_{i,j,k,2}^{(2)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i+1,j,k})}{2} (Q_{i+1,j,k} - Q_{i,j,k}) + \\
 &+ \varepsilon_{i,j,k,3}^{(2)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i,j+1,k})}{2} (Q_{i,j+1,k} - Q_{i,j,k}) + \varepsilon_{i,j,k,4}^{(2)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i-1,j,k})}{2} (Q_{i-1,j,k} - Q_{i,j,k}) + \\
 &+ \varepsilon_{i,j,k,5}^{(2)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i,j,k-1})}{2} (Q_{i,j,k-1} - Q_{i,j,k}) + \varepsilon_{i,j,k,6}^{(2)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i,j,k+1})}{2} (Q_{i,j,k+1} - Q_{i,j,k}) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

denominado operador Laplaciano não dividido, é responsável pela estabilidade numérica na presença de ondas de choque;

$$\begin{aligned}
 d^{(4)}(Q_{i,j,k}) &= \varepsilon_{i,j,k,1}^{(4)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i,j-1,k})}{2} (\nabla^2 Q_{i,j-1,k} - \nabla^2 Q_{i,j,k}) + \varepsilon_{i,j,k,2}^{(4)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i+1,j,k})}{2} (\nabla^2 Q_{i+1,j,k} - \nabla^2 Q_{i,j,k}) \\
 &+ \varepsilon_{i,j,k,3}^{(4)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i,j+1,k})}{2} (\nabla^2 Q_{i,j+1,k} - \nabla^2 Q_{i,j,k}) + \varepsilon_{i,j,k,4}^{(4)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i-1,j,k})}{2} (\nabla^2 Q_{i-1,j,k} - \nabla^2 Q_{i,j,k}) \\
 &+ \varepsilon_{i,j,k,5}^{(4)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i,j,k-1})}{2} (\nabla^2 Q_{i,j,k-1} - \nabla^2 Q_{i,j,k}) + \varepsilon_{i,j,k,6}^{(4)} \frac{(A_{i,j,k} + A_{i,j,k+1})}{2} (\nabla^2 Q_{i,j,k+1} - \nabla^2 Q_{i,j,k}) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

denominado operador bi-harmônico, é responsável pela estabilidade de campo.

O termo $\nabla^2 Q_{i,j,k} = [(Q_{i,j-1,k} - Q_{i,j,k}) + (Q_{i,j+1,k} - Q_{i,j,k}) + (Q_{i,j,k-1} - Q_{i,j,k}) + (Q_{i,j,k+1} - Q_{i,j,k}) + (Q_{i,j,k-1} - Q_{i,j,k}) + (Q_{i,j,k+1} - Q_{i,j,k})]$ é denominado Laplaciano de $Q_{i,j,k}$. No operador $d^{(4)}$, $\nabla^2 Q_{i,j,k}$ é extrapolado de seu vizinho real sempre que representar uma célula especial de contorno, referenciada na literatura como célula “fantasma”. Os termos ε 's são definidos como segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j,k,1}^{(2)} &= K^{(2)} \text{MAX}(v_{i,j,k}, v_{i,j-1,k}), \quad \varepsilon_{i,j,k,2}^{(2)} = K^{(2)} \text{MAX}(v_{i,j,k}, v_{i,j+1,k}), \quad \varepsilon_{i,j,k,3}^{(2)} = K^{(2)} \text{MAX}(v_{i,j,k}, v_{i,j+1,k}), \\ \varepsilon_{i,j,k,4}^{(2)} &= K^{(2)} \text{MAX}(v_{i,j,k}, v_{i-1,j,k}), \quad \varepsilon_{i,j,k,5}^{(2)} = K^{(2)} \text{MAX}(v_{i,j,k}, v_{i,j,k-1}) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{i,j,k,6}^{(2)} = K^{(2)} \text{MAX}(v_{i,j,k}, v_{i,j,k+1}); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j,k,1}^{(4)} &= \text{MAX}[0, (K^{(4)} - \varepsilon_{i,j,k,1}^{(2)})], \quad \varepsilon_{i,j,k,2}^{(4)} = \text{MAX}[0, (K^{(4)} - \varepsilon_{i,j,k,2}^{(2)})], \quad \varepsilon_{i,j,k,3}^{(4)} = \text{MAX}[0, (K^{(4)} - \varepsilon_{i,j,k,3}^{(2)})], \\ \varepsilon_{i,j,k,4}^{(4)} &= \text{MAX}[0, (K^{(4)} - \varepsilon_{i,j,k,4}^{(2)})], \quad \varepsilon_{i,j,k,5}^{(4)} = \text{MAX}[0, (K^{(4)} - \varepsilon_{i,j,k,5}^{(2)})] \quad \text{e} \quad \varepsilon_{i,j,k,6}^{(4)} = \text{MAX}[0, (K^{(4)} - \varepsilon_{i,j,k,6}^{(2)})], \end{aligned} \quad (18)$$

em que:

$$v_{i,j,k} = \frac{|p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}| + |p_{i,j+1,k} - p_{i,j,k}| + |p_{i-1,j,k} - p_{i,j,k}| + |p_{i,j,k-1} - p_{i,j,k}| + |p_{i,j-1,k} - p_{i,j,k}| + |p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k}|}{p_{i,j-1,k} + p_{i+1,j,k} + p_{i,j+1,k} + p_{i-1,j,k} + p_{i,j,k-1} + p_{i,j,k+1} + 6p_{i,j,k}} \quad (19)$$

representa o sensor de pressão, responsável pela identificação de regiões de gradientes elevados. As constantes $K^{(2)}$ e $K^{(4)}$ têm valores típicos de 1/4 e 3/256, respectivamente. Sempre que o vizinho representar uma célula fantasma é assumido que, por exemplo, $v_{i,j-1,k} = v_{i,j,k}$. O coeficiente $A_{i,j,k}$ foi implementado conforme proposto por Azevedo⁶ e é definido como segue:

$$A_{i,j,k} = V_{i,j,k} / \Delta t_{i,j,k} \quad (20)$$

7 PASSO NO TEMPO VARIÁVEL ESPACIALMENTE

Para problemas de estado estacionário é feito uso de um passo no tempo variável espacialmente para cada hexaedro (i,j,k) a fim de acelerar o processo de convergência. A idéia do passo no tempo variável espacialmente consiste em manter um número de CFL constante no domínio de cálculo e, com isso, garantir passos de tempo adequados para cada região da malha durante o processo de convergência. Detalhes desta implementação são encontradas em Maciel^{7,8}.

8 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNOS

8.1 Condições Iniciais

A condição inicial adotada para os problemas é a de escoamento não perturbado para todo o domínio de cálculo (Jameson e Mavriplis⁵ e Maciel⁷). O vetor de variáveis conservadas é expresso como segue:

$$Q_\infty = \left\{ 1 \quad M_\infty \cos \theta \quad M_\infty \sin \theta \cos \psi \quad M_\infty \sin \theta \sin \psi \quad \left[\frac{1}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{M_\infty^2}{2} \right]^t \right\}, \quad (21)$$

em que M_∞ representa o número de Mach de escoamento não perturbado, θ é o ângulo de incidência do escoamento à montante da configuração em análise e ψ é o ângulo no plano longitudinal da configuração.

8.2 Condições de Contornos

Os diferentes tipos de condições de contornos implementadas são descritas a seguir.

a) Parede - O caso Euler requer a condição de tangência de fluxo. No contexto de volumes finitos, esta imposição é feita considerando que o componente de velocidade tangente à parede da célula fantasma seja igual ao componente de velocidade tangente à parede de sua célula real vizinha. Ao mesmo tempo, o componente de velocidade normal à parede da célula fantasma deve ser igual ao negativo do componente de velocidade normal à parede de sua célula real vizinha. Batina¹¹ sugere que estes procedimentos conduzem às seguintes expressões para as componentes de velocidade u , v e w dos volumes fantasmas:

$$u_f = (1 - 2n_x n_y)u_{real} + (-2n_x n_y)v_{real} + (-2n_x n_z)w_{real}, \quad (22)$$

$$v_f = (-2n_y n_x)u_{real} + (1 - 2n_y n_y)v_{real} + (-2n_y n_z)w_{real}, \quad (23)$$

$$w_f = (-2n_z n_x)u_{real} + (-2n_z n_y)v_{real} + (1 - 2n_z n_z)w_{real}, \quad (24)$$

em que n_x , n_y e n_z são as componentes do versor normal à face apontando para fora do volume real vizinho. Para o caso das equações de Navier-Stokes, as componentes de velocidade u , v e w dos volumes fantasmas são igualadas aos respectivos valores de u , v e w do volume real vizinho, com sinal trocado.

O gradiente de pressão ao qual o fluido é submetido na direção normal à parede é igual a zero tanto no caso não viscoso como no caso viscoso. O gradiente de temperatura é nulo ao longo de toda a parede, sendo esta última situação em acordo com os resultados físicos, sem impor, no entanto, a condição de parede adiabática. Com estas duas condições, uma extrapolação de ordem zero é efetuada para a pressão do fluido, bem como para a temperatura. É possível concluir, assim, que a densidade do fluido também será obtida por extrapolação. A energia total é obtida pela equação de estado do gás perfeito.

b) Contorno Distante (do inglês: “far field”) - Na implementação das condições de contorno na região externa limitante da malha para problemas físicos de escoamento externo, convém diferenciar quatro situações físicas possíveis: entrada com escoamento subsônico, entrada com escoamento supersônico, saída com escoamento subsônico e saída com escoamento supersônico. Estas situações são descritas a seguir.

b.1) Entrada com escoamento subsônico – Considerando o conceito de relações características unidimensionais na direção normal de penetração do escoamento, a entrada com escoamento subsônico apresenta quatro velocidades características de propagação de informações que têm direção e sentido para dentro do domínio de cálculo, não podendo ser

extrapoladas (Maciel^{7,8} e Maciel e Azevedo^{12,13}). Para estas quatro informações, são necessárias as especificações de quatro condições. Jameson e Mavriplis⁵ indicam como grandezas adequadas para especificação a densidade de escoamento não perturbado e as componentes Cartesianas u , v e w do vetor velocidade do escoamento não perturbado. Apenas a última característica, “ (q_n-a) ”, que traz informações de dentro para fora do domínio de cálculo, não pode ser especificada e terá de ser determinada por informações interiores do domínio de cálculo. No presente trabalho, uma extrapolação de ordem zero é efetuada para a pressão, sendo a energia total definida pela equação de estado dos gases perfeitos.

b.2) Entrada com escoamento supersônico - Todas as variáveis são especificadas no contorno de entrada do domínio de cálculo em termos dos valores de escoamento não perturbado.

b.3) Saída com escoamento subsônico - Quatro características que regem as equações de Euler vêm da região interna do domínio de cálculo. Logo, densidade e componentes Cartesianas de velocidade são extrapoladas do domínio interior. Uma condição deve ser especificada para o contorno. Neste caso, a pressão é fixada na saída do domínio de cálculo, permanecendo com o seu respectivo valor de escoamento não perturbado.

b.4) Saída com escoamento supersônico - As cinco características que regem as equações de Euler vêm da região interna do domínio de cálculo, não sendo possível assim especificar valores de variáveis na saída. A extrapolação de ordem zero é aplicada à densidade, componentes de velocidade e pressão.

c) Entrada e Saída – Os contornos de entrada e saída são aplicados para os dois problemas. Condições de contorno que envolve entrada do escoamento no domínio computacional tiveram as propriedades do escoamento fixadas com valores de escoamento não perturbado. Condições de contorno que envolve saída do domínio computacional utilizaram simplificada a extrapolação de ordem zero.

9 RESULTADOS

Testes foram realizados em um microcomputador ATHLON-2,6GHz e 64 Mbytes de memória RAM. Resultados convergidos ocorreram para 4 ordens de redução no valor do resíduo máximo. O valor usado para γ foi 1,4 e para o número de Prandtl foi 0,72. Para os dois problemas, o ângulo à montante da configuração foi adotado igual a $0,0^\circ$, bem como o ângulo no plano longitudinal da configuração.

9.1 Resultados Não Viscosos

9.1.1 Problema Físico da Rampa

Para o problema da rampa, a malha possui 31.860 volumes reais e 36.600 nós para a discretização estruturada do domínio de cálculo. Isto equivale a uma malha com 61 pontos na direção ξ , 60 pontos na direção η e 10 pontos na direção ζ . Para este problema físico, rampa com 20° de inclinação, foi adotado o número de Mach de escoamento não perturbado igual a 5,0, como condição inicial.

O CFL utilizado com o esquema de MacCormack⁴ nesta simulação foi de 0,5 e a

convergência para a solução de estado estacionário ocorreu em 421 iterações. As Figuras 1, 2 e 3 exibem os contornos de densidade, de pressão e de número de Mach obtidos. Os contornos de número de Mach apresentam uma oscilação pré-choque no começo da rampa. Os contornos de densidade e de pressão apresentam bom comportamento, sem oscilações.

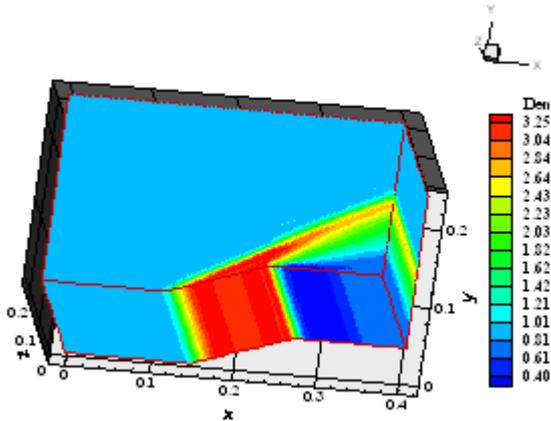


Figura 1 – Contornos de densidade.

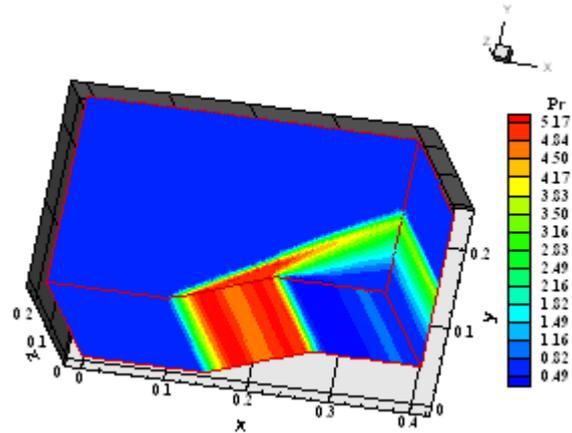


Figura 2 – Contornos de pressão.

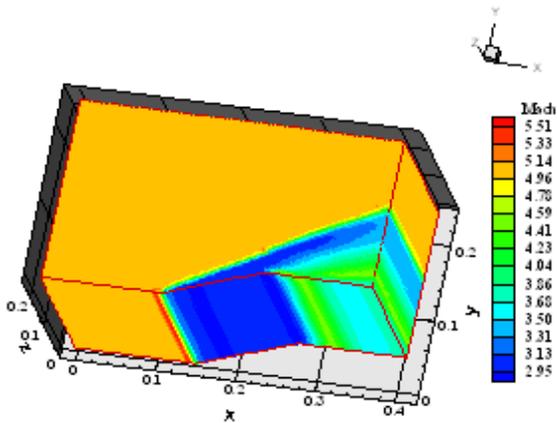


Figura 3. Contornos de Mach.

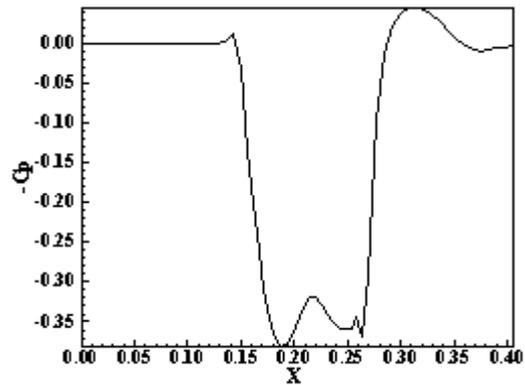


Figura 4. Distribuição de $-C_p$.

A Figura 4 exibe a distribuição do negativo do coeficiente de pressão, $-C_p$, ao longo da rampa, para a seção $k = k_{max}/2$, em que “ k_{max} ” representa o máximo número de pontos na direção z . O pico de pressão no choque atinge o valor de $C_p = 0,38$. O leque de expansão que se forma no final da rampa é suave, aparecendo uma oscilação de pressão ao seu término correspondente a um valor de $C_p \cong -0,05$. O custo computacional do algoritmo de MacCormack⁴ é de 0,0000309s.

As Figuras 5, 6 e 7 exibem os contornos de densidade, de pressão e de número de Mach, respectivamente, para a simulação não viscosa do escoamento supersônico ao longo da rampa em estudo, obtidos pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁵. Os contornos de número de Mach não apresentam oscilações pré-choque significativas. Ocorrem algumas oscilações ao longo

do choque, mas desprezíveis em comparação com as ocorridas com o método de MacCormack⁴. Os contornos de densidade e de pressão não apresentam homogeneidade nos respectivos valores de pico. Isso fica demonstrado pela perda razoável da região vermelha próxima da rampa, para ambos os contornos. Uma leve oscilação pré-choque é percebida nos contornos de densidade no começo da rampa.

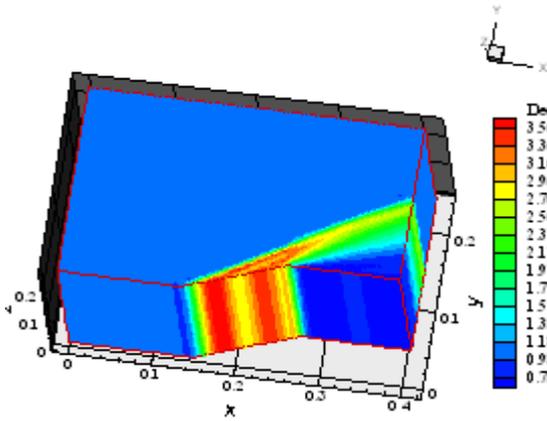


Figura 5 – Contornos de densidade.

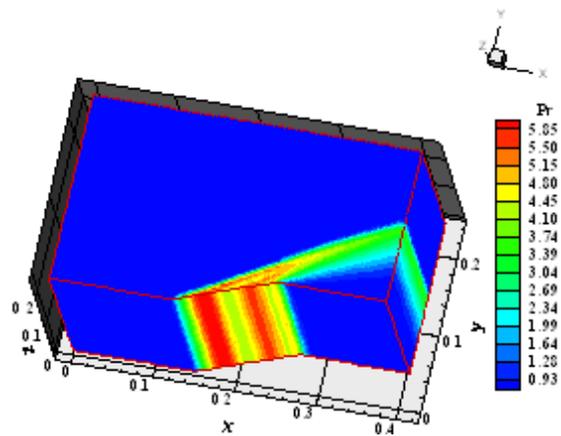


Figura 6 – Contornos de pressão.

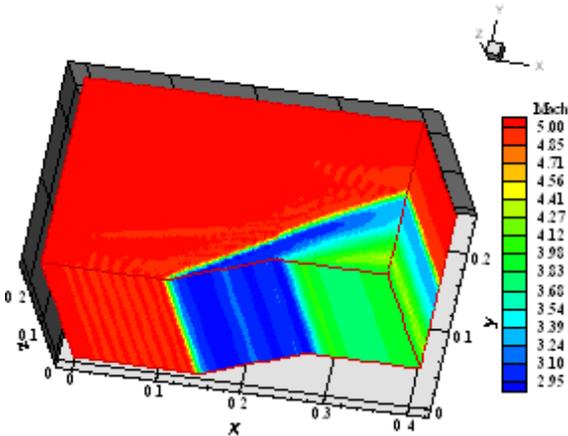


Figura 7. Contornos de Mach.

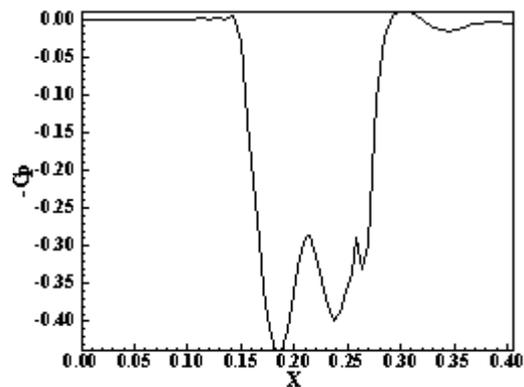


Figura 8. Distribuição de $-C_p$.

A Figura 8 exibe a distribuição de $-C_p$ ao longo da rampa obtida pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁵, para a seção $k = k_{max}/2$. O pico de pressão no choque implica em um valor de coeficiente de pressão em torno de 0,45, significativamente maior do que o obtido com o esquema de MacCormack⁴. Logo, o choque simulado com o esquema de Jameson e Mavriplis⁵ é mais forte do que o observado na solução gerada pelo esquema de MacCormack⁴. O leque de expansão próximo ao término da rampa apresenta oscilação em torno de $x = 0,26$ e uma queda no valor de C_p é identificada ao final da rampa, atingindo um valor de $C_p \cong -0,01$. O número de CFL utilizado pelo método de Jameson e Mavriplis⁵ para

esta simulação foi 1,1, convergindo em 318 iterações. O custo computacional deste algoritmo é 0,0000468s.

9.1.2 Problema Físico do Difusor

Para o problema do difusor, a malha possui 21.600 volumes reais e 25.010 nós para a discretização estruturada do domínio de cálculo. Isto equivale a uma malha com 61 pontos na direção ξ , 41 pontos na direção η e 10 pontos na direção ζ . A condição inicial do problema físico do escoamento hipersônico de “gás frio” ao longo de um difusor com 20° de inclinação adotou um valor de número de Mach de escoamento à montante igual a 10,0.

As Figuras 9, 10 e 11 exibem os contornos de densidade, de pressão e de número de Mach, respectivamente, obtidos pelo esquema numérico de MacCormack⁴. A Figura 11 exhibe oscilação pré-choque no início da rampa do difusor. Os contornos de densidade, de pressão e de número de Mach apresentam boa simetria e a interferência entre os choques da parede superior e de parede inferior está bem destacada.

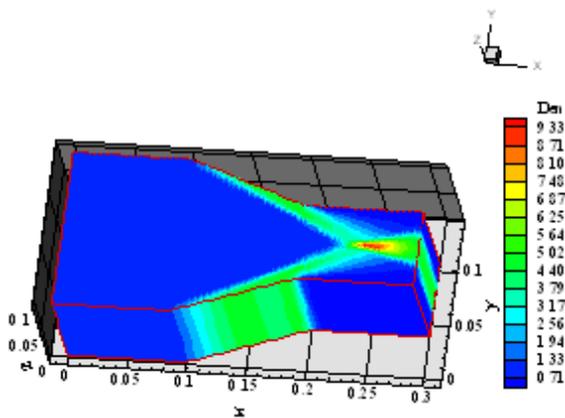


Figura 9. Contornos de densidade.

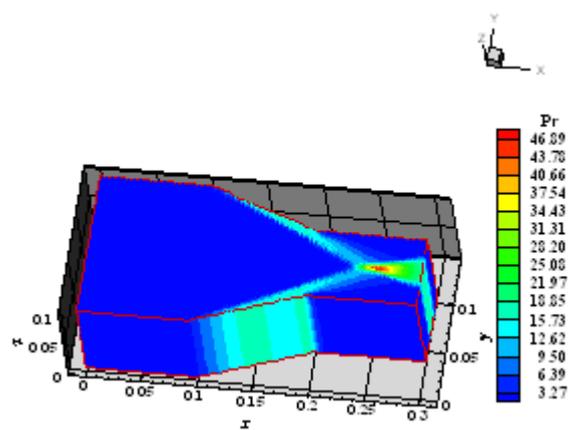


Figura 10. Contornos de pressão.

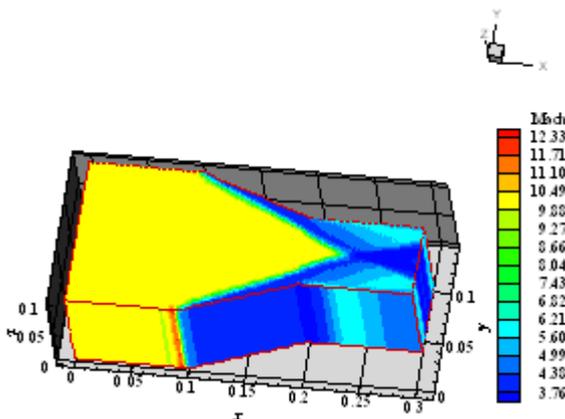


Figura 11. Contornos de Mach.

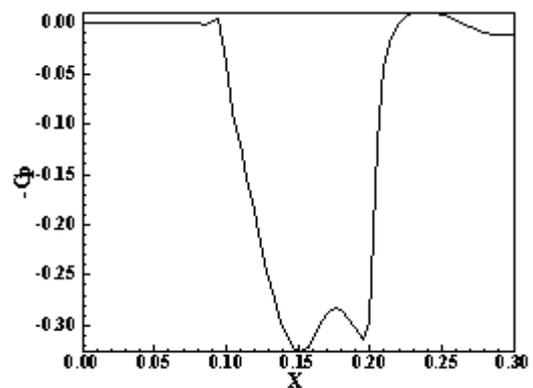


Figura 12. Distribuição de $-C_p$.

A Figura 12 exibe a distribuição de $-C_p$ ao longo da parede inferior do difusor, para a seção $k = k_{max}/2$. O pico de C_p no choque atinge um valor de 0,33. O leque de expansão na proximidade de término da rampa da parede inferior é suave, apresentando uma redução no valor de C_p para aproximadamente -0,01. O CFL utilizado pelo esquema nesta simulação foi de 0,4 e a convergência ocorreu em 598 iterações.

As Figuras 13, 14 e 15 exibem os contornos de densidade, de pressão e de número de Mach, respectivamente, obtidos pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁵ para esta simulação não viscosa do escoamento hipersônico de “gás frio” ao longo de um difusor. Os contornos de número de Mach são livres de oscilações pré-choque. Não aparecem problemas de falta de homogeneidade da solução representada pelos contornos de densidade e de pressão, como visto no problema da rampa. A simetria da solução nos contornos de densidade, de pressão e de número de Mach está bem destacada. A interferência entre o choque da parede inferior com o da parede superior também está bem detectada.

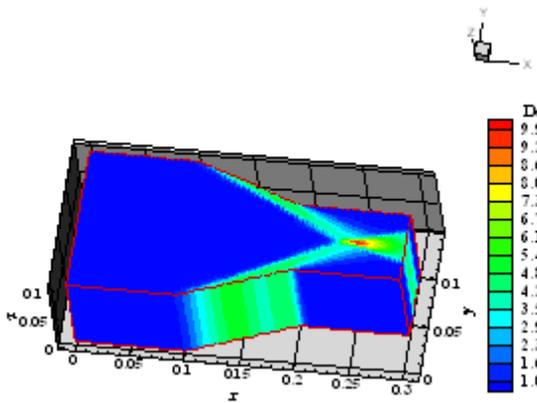


Figura 13. Contornos de densidade.

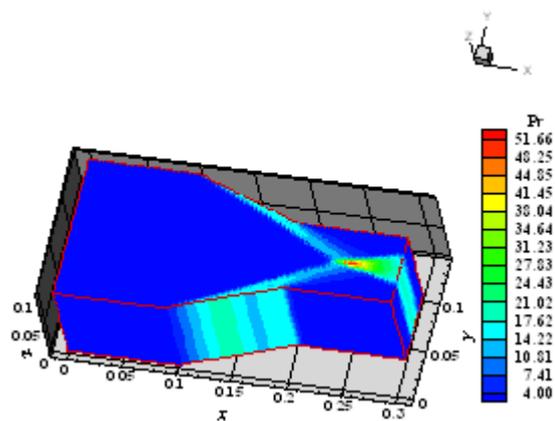


Figura 14. Contornos de pressão.

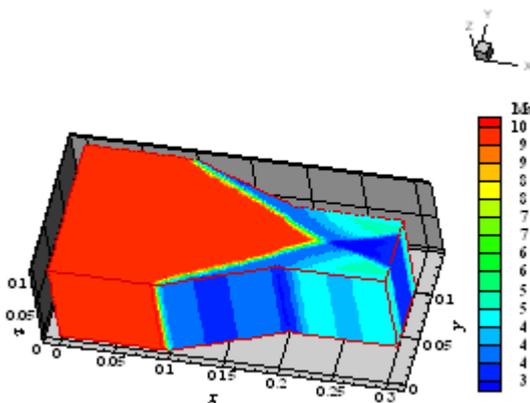


Figura 15. Contornos de Mach.

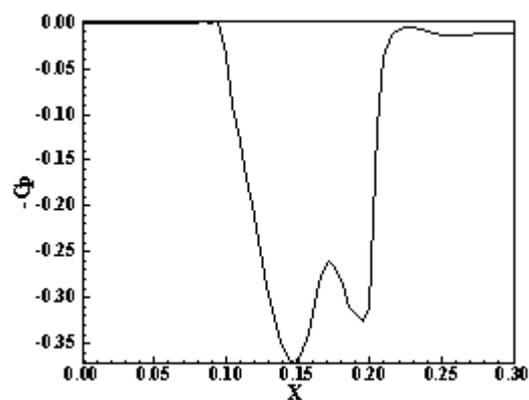


Figura 16. Distribuição de $-C_p$.

A Figura 16 exibe a distribuição de $-C_p$ ao longo da parede inferior do difusor, para a

secção $k = k_{max}/2$. O pico de pressão ocorre para um valor de C_p igual a 0,37, próximo ao valor obtido com o esquema de MacCormack⁴, e o leque de expansão consegue recuperar bem a pressão ao término da rampa.

O CFL utilizado pelo esquema numérico de Jameson e Mavriplis⁵ para a simulação do escoamento hipersônico de “gás frio” ao longo do difusor foi igual a 1,0 e o esquema convergiu para a solução de estado estacionário em 248 iterações, menos da metade do número de iterações que o método de MacCormack⁴ necessitou para obter convergência.

9.2 Resultados Viscosos

9.2.1 Problema Físico da Rampa

Para o problema da rampa, a malha possui 53.460 volumes reais e 61.000 nós para a discretização estruturada do domínio de cálculo. Isto equivale a uma malha com 61 pontos na direção ξ , 100 pontos na direção η e 10 pontos na direção ζ . Para este problema físico foi adotado o número de Mach de escoamento não perturbado igual a 5,0, como condição inicial. Foi considerada uma altitude de vôo de 30.000 metros e o comprimento de adimensionalização da rampa assumiu valor 0,044 metro. Com a altitude é possível obter os valores da densidade, da pressão e da viscosidade de adimensionalização e com isso é possível calcular o número de Reynolds desta simulação viscosa que foi de 35.965,17.

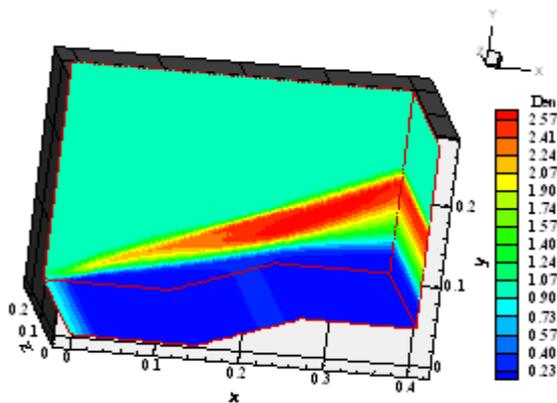


Figura 17 – Contornos de densidade.

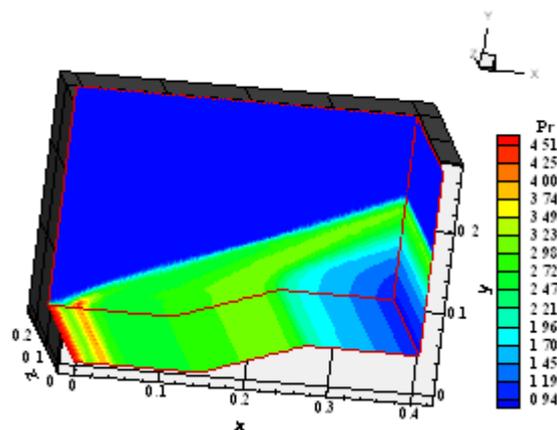


Figura 18 – Contornos de pressão.

As Figuras 17, 18 e 19 exibem os contornos de densidade, de pressão e de número de Mach, respectivamente, obtidos para esta configuração com o esquema de MacCormack⁴. Não são observadas oscilações pré-choque; contudo, o pico de pressão apresentado nos contornos de pressão encontra-se limitado a uma faixa estreita, vermelha, ao longo das seções de “ k ”. Claramente, a distribuição de pressão está prejudicada nesta simulação, descrevendo um choque fraco bem antes da rampa.

A Figura 20 exhibe a distribuição de $-C_p$ obtida ao longo da rampa, na secção $k = k_{max}/2$. Aparecem dois choques ao longo da parede inferior: um no começo da parede e o outro na

rampa propriamente dita. O primeiro choque é fraco e é decorrente dos efeitos viscosos que tendem a retardar o escoamento. O segundo choque, o choque esperado, está descaracterizado, assim como o leque de expansão.

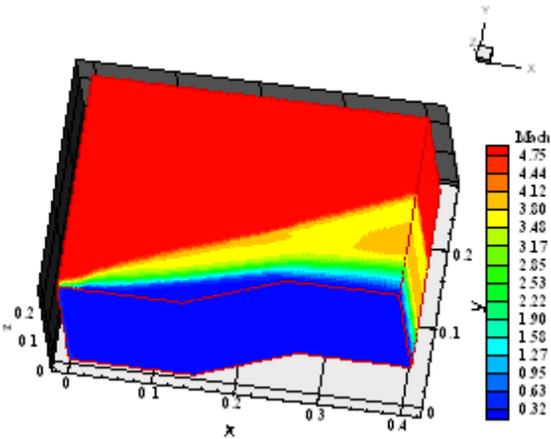


Figura 19. Contornos de Mach.

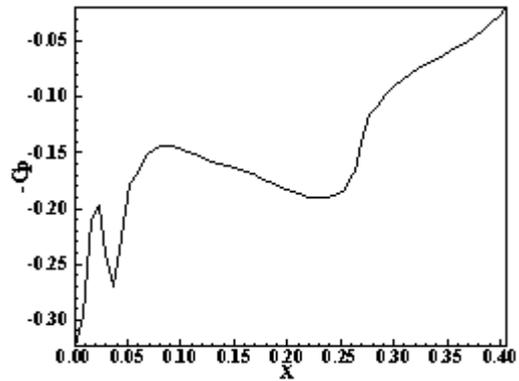


Figura 20. Distribuição de $-C_p$.

O CFL utilizado nesta simulação viscosa da rampa, com o esquema de MacCormack⁴, foi de 0,2 e o número de iterações para a convergência foi de 5.464. O custo computacional do algoritmo de MacCormack⁴ é de 0,0000858s.

As Figuras 21, 22 e 23 apresentam os contornos de densidade, de pressão e de número de Mach, respectivamente, obtidos pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁵ para este problema da rampa. A Figura 23 é livre de oscilações pré-choque. Os contornos de pressão apresentam regiões de máximo ao longo da rampa como era esperado.

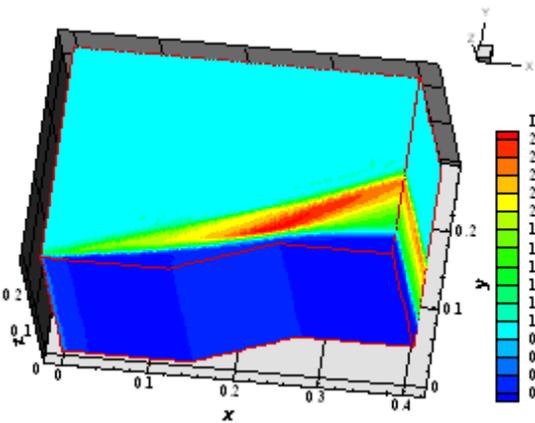


Figura 21 – Contornos de densidade.

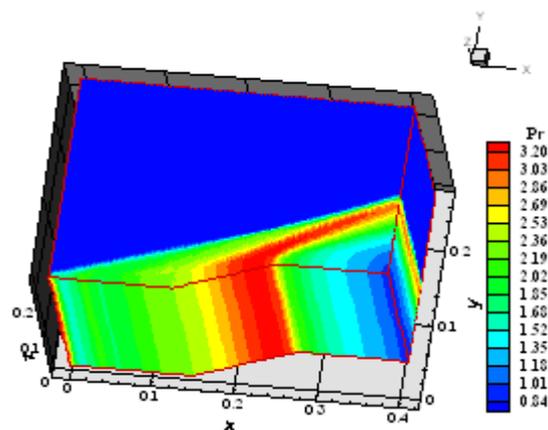


Figura 22 – Contornos de pressão.

A Figura 24 apresenta a distribuição de $-C_p$ ao longo da rampa obtida pelo esquema numérico de Jameson e Mavriplis⁵, na seção $k = k_{max}/2$. Como pode ser observado, nem o choque nem o leque de expansão estão caracterizados, ocorrendo um choque bem fraco no

começo da parede inferior, como na solução obtida com o esquema de MacCormack⁴.

O CFL utilizado pelo esquema foi de 0,7 e a convergência ocorreu em 1.687 iterações. O custo computacional do algoritmo de Jameson e Mavriplis⁵ é de 0,0002538s.

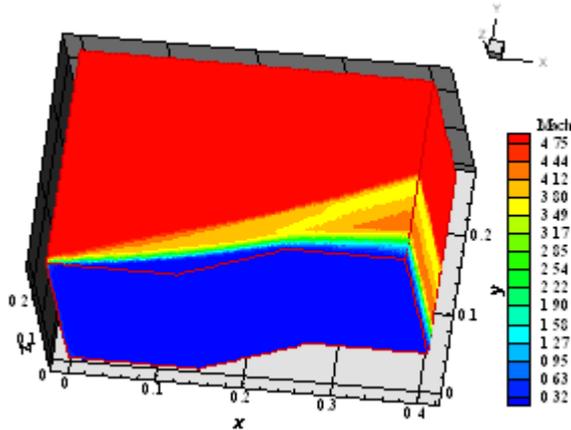


Figura 23. Contornos de Mach.

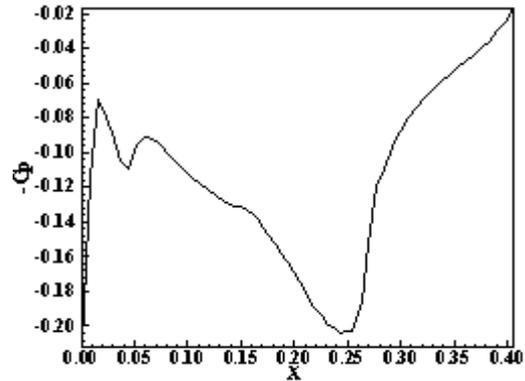


Figura 24. Distribuição de $-C_p$.

9.2.2 Problema Físico do Difusor

As Figuras 25, 26 e 27 apresentam os contornos de densidade, de pressão e de número de Mach, respectivamente, obtidas pelo esquema numérico de MacCormack⁴ para esta simulação viscosa. As Figuras 25 e 26 apresentam boa simetria e a intersecção dos choques da parede inferior com o da parede superior está bem destacada. Os contornos de número de Mach na Fig. 27 não apresentam oscilação pré-choque.

A Figura 28 exibe a distribuição de $-C_p$ ao longo da parede inferior do difusor, na secção $k = k_{max}/2$. Nesta figura, a região de início do difusor apresenta uma distribuição de $-C_p$ atenuada, logo depois aparece o que deveria ser o choque e por fim, ao final da rampa, aparece o leque de expansão. O choque e o leque de expansão estão descritos significativamente suavizados.

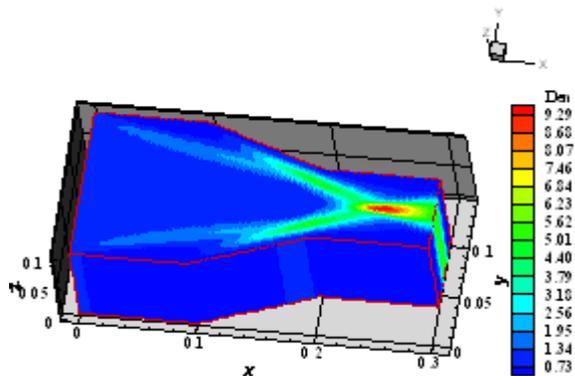


Figura 25. Contornos de densidade.

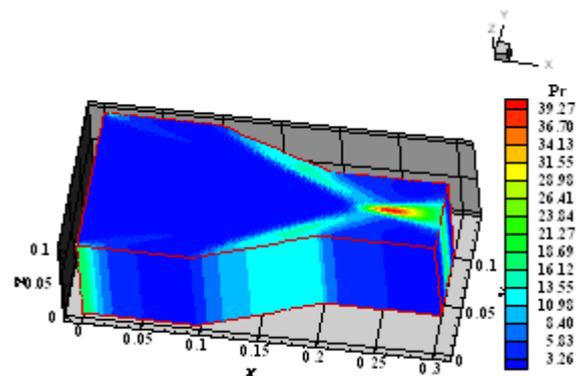


Figura 26. Contornos de pressão.

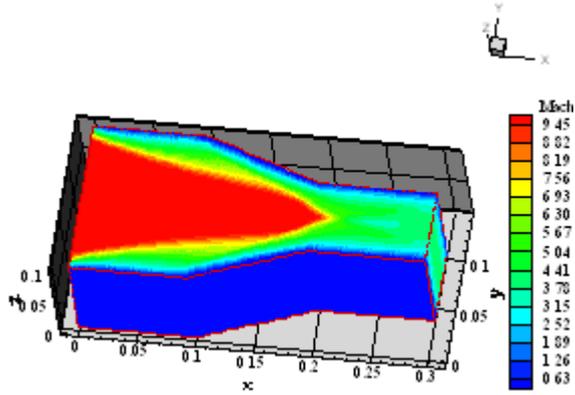


Figura 27. Contornos de Mach.

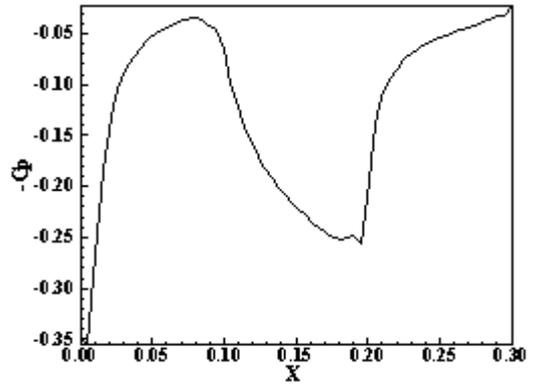


Figura 28. Distribuição de $-C_p$.

O CFL utilizado na simulação foi de 0,1 e o número de iterações para a convergência de estado estacionário foi de 14.311.

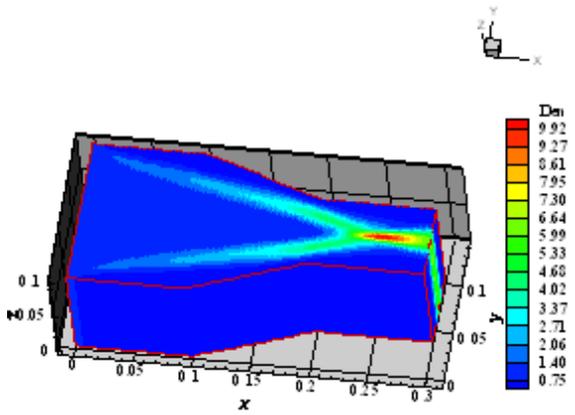


Figura 29. Contornos de densidade.

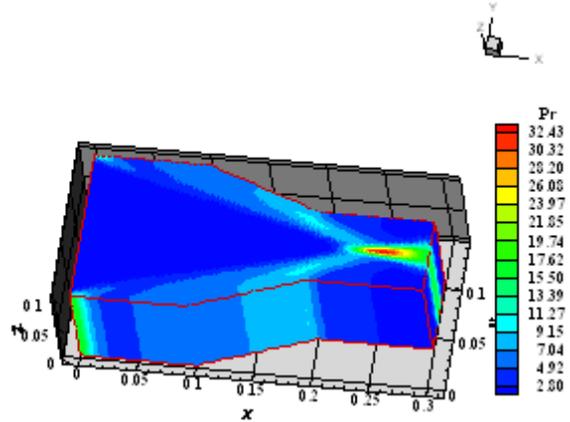


Figura 30. Contornos de pressão.

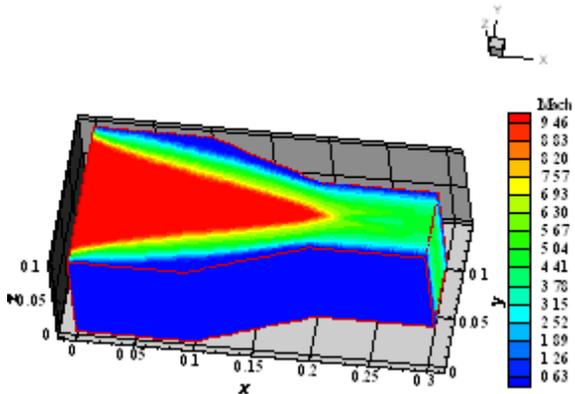


Figura 31. Contornos de Mach.

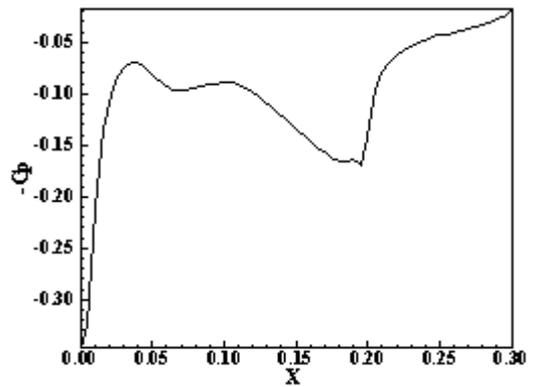


Figura 32. Distribuição de $-C_p$.

As Figuras 29, 30 e 31 apresentam os contornos de densidade, de pressão e de número de Mach, respectivamente, obtidos pelo esquema numérico de Jameson e Mavriplis⁵. Os contornos de densidade e de pressão apresentam boa simetria e a interferência entre choques é bem detectada. Os contornos de número de Mach estão livres de oscilações pré-choque.

A Figura 32 exhibe a distribuição de $-C_p$ ao longo da parede inferior do difusor, na secção $k = k_{max}/2$. Nem o choque e nem o leque de expansão estão descritos corretamente nesta figura. O número de CFL utilizado nesta simulação foi de 0,2 e a convergência para a solução de estado estacionário ocorreu em 9.245 iterações.

10 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou os algoritmos de MacCormack⁴ e de Jameson e Mavriplis⁵ implementados em suas versões para três dimensões. Os algoritmos são explícitos, com segunda ordem de precisão espacial e no tempo. A integração no tempo pelo método de MacCormack⁴ é realizada em dois passos: um preditor, com discretização espacial avançada, e um corretor, com discretização espacial recuada. No caso do esquema de Jameson e Mavriplis⁵, um método tipo Runge-Kutta de cinco estágios foi responsável pela integração temporal. Foram resolvidas as equações de Euler e de Navier-Stokes, utilizando uma formulação de volumes finitos, com base de dados centrada na célula e discretização estruturada. Foram resolvidos os problemas físicos do escoamento supersônico ao longo de uma rampa e do escoamento hipersônico ao longo de um difusor. Um passo no tempo variável espacialmente foi utilizado a fim de acelerar o processo de convergência para a condição de estado estacionário.

Os resultados obtidos foram de melhor qualidade para o esquema de Jameson e Mavriplis⁵, não ocorrendo significativas oscilações pré-choque nos contornos de número de Mach, tanto no caso não viscoso como no viscoso. Os campos de densidade e de pressão apresentaram bom comportamento evidenciando bem o choque no problema da rampa e detectando apropriadamente a interferência de choques no problema do difusor, em ambos os casos não viscoso e viscoso. As distribuições de $-C_p$ evidenciaram bem o choque e o leque de expansão em ambos os problemas para o caso não viscoso, perdendo qualidade na solução viscosa. O algoritmo de MacCormack⁴ apresentou a dificuldade da oscilação pré-choque nos problemas da rampa e do difusor, no caso não viscoso; contudo, o choque na rampa é bem capturado e a intersecção entre choques no problema do difusor é bem detectada, tanto no caso não viscoso como no caso viscoso. As distribuições de $-C_p$ geradas pelo esquema de MacCormack⁴ também evidenciaram bem o choque e o leque de expansão em ambos os problemas para o caso não viscoso, perdendo também em qualidade na solução viscosa; contudo a perda de qualidade foi menor do que a ocorrida com o esquema de Jameson e Mavriplis⁵ no problema do difusor.

11 REFERÊNCIAS

- [1] T. H. Pulliam e J. L. Steger, “Implicit Finite-Difference Simulations of three-Dimensional Compressible Flow”, *AIAA Journal*, Vol. 18, No. 2, pp. 159-166 (1980).
- [2] L. N. Long, M. M. S. Khan e H. T. Sharp, “Massively Parallel Three-Dimensional Euler

/

- Navier-Stokes Method”, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 3, pp. 657-666 (1991).
- [3] P. L. Roe, “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372 (1981).
- [4] R. W. MacCormack, “The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering”, *AIAA Paper 69-354* (1969).
- [5] A. Jameson e D. J. Mavriplis, “Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh”, *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 4, pp. 611-618 (1986).
- [6] J. L. F. Azevedo, “On the Development of Unstructured Grid Finite Volume Solvers for High Speed Flows”, *NT-075-ASE-N, IAE, CTA*, São José dos Campos, SP (1992).
- [7] E. S. G. Maciel, “Simulação Numérica de Escoamentos Supersônicos e Hipersônicos Utilizando Técnicas de Dinâmica dos Fluidos Computacional”, *Tese de Doutorado*, ITA, CTA, São José dos Campos, SP, Brasil, 258 p (2002).
- [8] E. S. G. Maciel, “Relatório ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento Tecnológico (CNPq) sobre as Atividades de Pesquisa Desenvolvidas no Primeiro Ano de Vigência da Bolsa de Estudos para Nível DCR-IF Referente ao Processo nº 304318/2003-5”, *Relatório técnico ao CNPq*, Novembro, 37 p (2004).
- [9] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Comparação entre Vários Modelos de Dissipação Artificial na Solução das Equações de Navier-Stokes”, *Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste (V CEM-NNE)*, Vol. 3, Fortaleza, CE, pp. 604-611 (1998).
- [10] R. C. Swanson e R. Radespiel, “Cell Centered and Cell Vertex Multigrid Schemes for the Navier-Stokes Equations”, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 5, pp. 697-703 (1991).
- [11] J. T. Batina, “Implicit Upwind Solution Algorithms for Three-Dimensional Unstructured Meshes”, *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 5, pp. 801-805 (1993).
- [12] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Comparação entre Vários Algoritmos de Fatoração Aproximada na Solução das Equações de Navier-Stokes”, *Anais do 14th Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica* (disponível em CD-ROM), Bauru, SP, Brasil (1997).
- [13] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Comparação entre Vários Esquemas Implícitos de Fatoração Aproximada na Solução das Equações de Navier-Stokes”, *RBCM- Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Vol. XX, No. 3, pp. 353-380 (1998).

12 AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro concedido na forma de bolsa de estudos sob o no. de processo 304318/2003-5, DCR/1F.