

RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA MEDIANTE MAXIMIZACIÓN DE LA ENTROPÍA CON INFORMACIÓN A PRIORI

R. Barbuzza^a, P. Lotito^{a,b}, A. Clausse^{a,b,c}

^a*Pladema, Universidad Nacional del Centro, Pinto 399, Tandil (7000), Argentina,
pladema@exa.unicen.edu.ar, <http://www.pladema.gov.ar>*

^b *investigador del CONICET*

^c *CNEA, Libertador 8250, 1249 Buenos Aires*

Palabras Clave: Reconstrucción tomográfica, Máxima Entropía.

Resumen. Las propiedades del algoritmo de maximización de la entropía (MENT) aplicado a la reconstrucción tomográfica se basan en minimizar la información extrínseca a las proyecciones radiográficas, lo cual es una forma consistente de seleccionar una imagen entre todas las posibles soluciones que explican las proyecciones. En este trabajo se incorpora conocimiento *a priori* a la técnica MENT, mediante un modelo del objeto, lo cual es aprovechado para mejorar la calidad de la reconstrucción. La información *a priori* se agrega a la ecuación de la entropía mediante una función cuadrática para el filtrado de ruido local de las imágenes. Los resultados experimentales obtenidos con este método son satisfactorios para la reconstrucción tomográfica a partir de proyecciones.

1 INTRODUCCIÓN

La tomografía computada (CT) es una imagen de la estructura interna de un objeto reconstruida a partir de un conjunto finito de proyecciones del mismo capturadas en distintas direcciones. Las aplicaciones más frecuentes de la CT son bien conocidas e incluyen una variedad de aplicaciones como diagnóstico por imágenes médicas y ensayo no destructivo de materiales. Formalmente, el problema de reconstrucción tomográfica consiste en encontrar la antitransformada de la ecuación de Radon (Herman, 1980). El método MENT (Jaynes, 1957) fue utilizado para resolver el problema de reconstrucción de CT por varios autores (Minerbo, 1979; Dusaussouy y Abdou, 1991), el cual es una alternativa a otros métodos de reconstrucción convencionales como las técnicas de reconstrucción algebraicas (ART), Filtered Backprojection (FBP), y Convolution Backprojection (CBP), entre muchas otras variantes de estas técnicas (Herman, 1980; Herman, 1999).

Aplicado al problema de reconstrucción tomográfica, MENT provee una forma adecuada para seleccionar una única imagen de un conjunto de varias imágenes que son consistentes con datos incompletos, determinando la solución que introduce la información extrínseca mínima a los datos disponibles. La antitransformada mediante MENT puede ser resuelta utilizando algoritmos iterativos, mostrando flexibilidad para adaptarse al ruido de las proyecciones más fácilmente que otros métodos. Otra de las ventajas de este método es que permite incorporar información *a priori* sobre las características del objeto que se quiere reconstruir, la cual se agrega a la información contenida en los datos de las proyecciones. Particularmente en el ensayo de piezas industriales es usual disponer de información sobre los objetos a partir del proceso de diseño o fabricación (e.g. la forma de componentes, fallas habituales, textura interna). Este conocimiento es una referencia muy valiosa que puede ayudar en el procedimiento de reconstrucción a eliminar características indeseadas de los objetos y de esta manera mejorar sustancialmente la calidad de las imágenes reconstruidas.

Una vez que se define el modelo del objeto, se procede a encontrar la reconstrucción que maximiza un criterio que combina linealmente la entropía y la información *a priori*. De esta manera, en situaciones donde los datos son insuficientes para eliminar toda la incertidumbre, el principio de máxima entropía puede ser usado para que la información disponible compense la descripción incompleta, incorporando en el proceso sólo la información *a priori*.

2 RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA

Supongamos un vector n -dimensional f que representa a los coeficientes de atenuación de un objeto bidimensional que es atravesado por un haz de radiación que emite una fuente, registrando una función proyección g detrás del cuerpo (Figura 1). Si la medición no tiene ruido, la proyección g se refiere como la transformada Radon de f y se calcula como la integral de línea a lo largo de cada rayo de los coeficientes de atenuación de f :

$$g = R f \quad (1)$$

donde R una matriz de dimensión $m \times n$, cuyo componente r_{ij} es el coeficiente de contribución del píxel j al i -ésimo rayo, y g es un vector m -dimensional de m rayos proyectados (Figura 1).

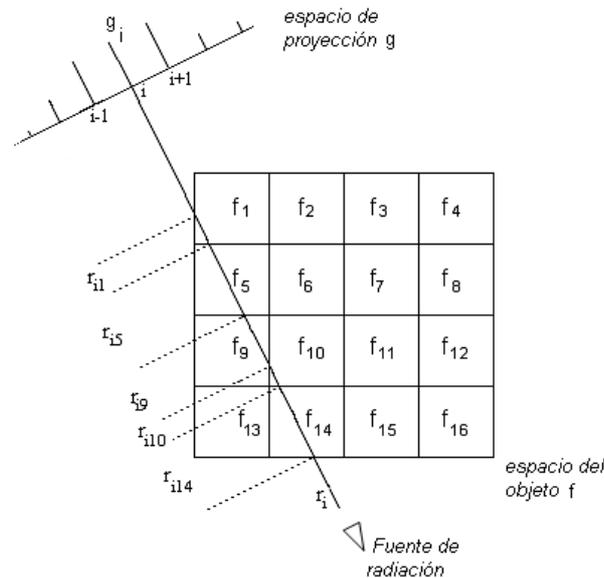


Figura 1. Proyección g de una imagen f

El problema de reconstrucción tomográfica consiste en encontrar el vector f conocidos R y g . La solución MENT para este problema consiste en determinar una función f para la cual la entropía de Shannon:

$$H(f) = -\sum_{j=1}^N f_j \log f_j \tag{2}$$

sea máxima entre todas las posibles soluciones consistentes con la Ec (1). En este trabajo se propone incluir en el procedimiento MENT la minimización de una función de energía $U(f)$ que incluye información *a priori* sobre el objeto, es decir:

$$\begin{aligned} \min_f & -H(f) + \beta U(f) \\ & \left\{ \begin{array}{l} f \geq 0 \\ Rf = g \end{array} \right. \end{aligned} \tag{3}$$

$U(f)$ se entiende como una penalización del desvío con respecto a la información *a priori*. El coeficiente β mide la importancia relativa entre entropía e información *a priori*.

Si se supone que la imagen es de textura suave y homogénea, esta información puede modelarse por medio de interacciones entre píxeles vecinos. En el presente trabajo se estudiaron dos funciones cuadráticas: el error cuadrático y la varianza de las tonalidades en diferentes bloques C_j de 3x3 píxeles vecinos:

$$E_1(C_j) = \sum_{v \in N_j} (f_v - f_j)^2 \tag{4}$$

$$E_2(C_j) = \sum_{v \in N_j} (f_v - \langle C_j \rangle)^2 \quad (5)$$

donde $\langle C_j \rangle$ es la intensidad promedio en el bloque C_j .

$E_1(C_j)$ y $E_2(C_j)$ son indicadores aceptables del ruido local (*i.e.* ambos se anulan en el caso de bloques homogéneos). La función de suavizado se define entonces como:

$$U(f) = \sum_j E(C_j) \quad (6)$$

donde la sumatoria en (6) se realiza para todos los bloques de la imagen f . $U(f)$ queda definida en forma matricial como:

$$U(f) = f^T M f \quad (7)$$

siendo M una matriz de dimensión $n \times n$ cuyos elementos m_{ij} se definen por la forma de la función de energía local $E(C_j)$ seleccionada (ver Apéndice).

En este modelo, el nuevo término $U(f)$ garantiza la suavidad local de la imagen eliminando el ruido local. Las restricciones del problema de reconstrucción tomográfica garantizan que los valores de f sean positivos y satisfagan además la ecuación de Radon en donde las proyecciones de esta imagen deben ajustarse a los datos de proyección g . Combinando las Ec. (3) y (7), el problema de optimización puede definirse como:

$$\min_f f^T \log f + \beta f^T M f \quad (8)$$

$$\begin{cases} f > 0 \\ Rf = g \end{cases}$$

donde $\log f$ es el logaritmo tomado componente a componente del vector f .

El Lagrangiano $L(f, \lambda)$ se calcula como:

$$L(f, \lambda) = f^T \log f + \beta f^T M f + \lambda^T (Rf - g) \quad (9)$$

Luego, igualando a cero la derivada de $L(f, \lambda)$ se obtiene el siguiente sistema $S(f)$:

$$S(f) = \begin{cases} \nabla_f L(f, \lambda) = \bar{I} + \log f + R^T \lambda + 2 \beta M f = 0 \\ Rf = g \end{cases} \quad (10)$$

El sistema no lineal $S(f)=0$ puede resolverse numéricamente aplicando algún método de optimización. En el presente trabajo, se utilizó el método de Newton (Fletcher, 1980). Inicialmente el método comienza con una aproximación f_0 y λ_0 y sucesivamente se calculan aproximaciones f_n y λ_n agregando un término de corrección δ calculado según:

$$\begin{pmatrix} \text{diag}(1/f_n) + 2\beta M & R^T \\ R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_f \\ \delta_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I - \log(f_n) - R^T \lambda - 2\beta M f_n \\ -R f_n + g \end{pmatrix} \quad (11)$$

Para tener en cuenta la condición de positividad de f , en el caso de no satisfacer esta condición se asignan pequeños valores positivos de f después de cada iteración.

3 RESULTADOS

Se implementó el algoritmo MENT con información *a priori* para aplicarlo a imágenes bidimensionales. En la Figura 2 (izquierda) se muestra una imagen original de 20×20 píxeles la cual fue proyectada en 8 ángulos diferentes 0, 30, 60, 75, 90, 105, 120, 150 grados, con 20 rayos paralelos en cada dirección. En las Figuras 2 y 3 se muestran las imágenes reconstruidas a partir de distintos valores β . En la Figura 2 la matriz M se construyó usando la función de interacción E_1 (Ec. 4), mientras que en la Figura 3 la función de suavizado U se definió usando la función de energía local E_2 (Ec. 5).

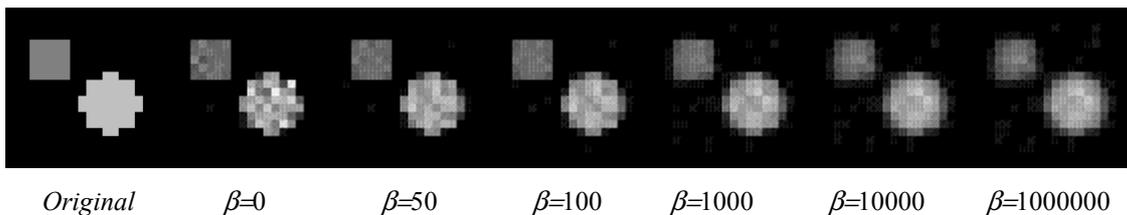


Figura 2. Reconstrucción con diferentes valores de β y matriz M obtenida de Ec. (4)

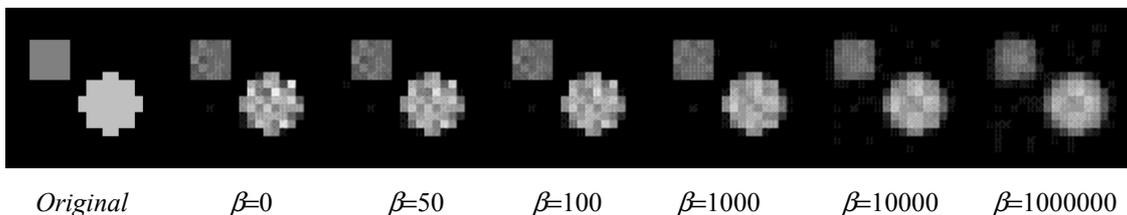


Figura 3. Reconstrucción con diferentes valores de β y matriz M obtenida de Ec. (5)

Cuando β es cero, el algoritmo se reduce al algoritmo de MENT clásico (Jaynes, 1980). A medida que se incrementa β se puede observar un suavizado progresivo de la imagen. El término U penaliza grandes diferencias de tonalidad entre píxeles vecinos, forzándolos a tomar valores similares. Para valores altos de β comienza a apreciarse un esfumado de los bordes de los objetos.

La Figura 4 muestra la dependencia del error cuadrático σ entre la imagen original y la reconstruida con distintos valores β . Se puede observar un valor mínimo de σ , lo cual sugiere que existe un valor óptimo de β . Este resultado se corresponde con la obtención de reconstrucciones ruidosas o muy suavizadas para valores pequeños o altos de β , respectivamente (Figuras 2 y 3). La Figura 5 muestra el error cuadrático ε entre proyecciones de la imagen original y las proyecciones de la imagen reconstruida. Se puede ver un valor mínimo de ε en la Figura 5, aunque el óptimo β es algo diferente del anterior, lo cual no resulta inesperado ya que se analizan informaciones diferentes.

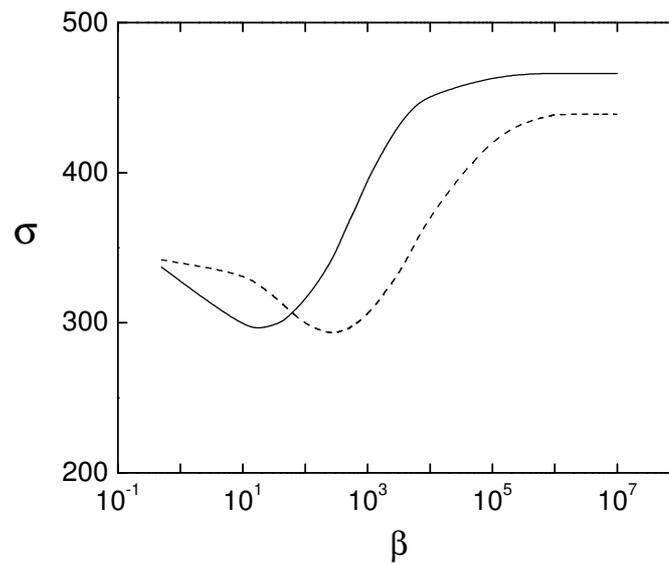


Figura 4. Error entre la imagen original y reconstruida con distintos β , usando Ec. 4 (sólida) y Ec. 5 (punteada).

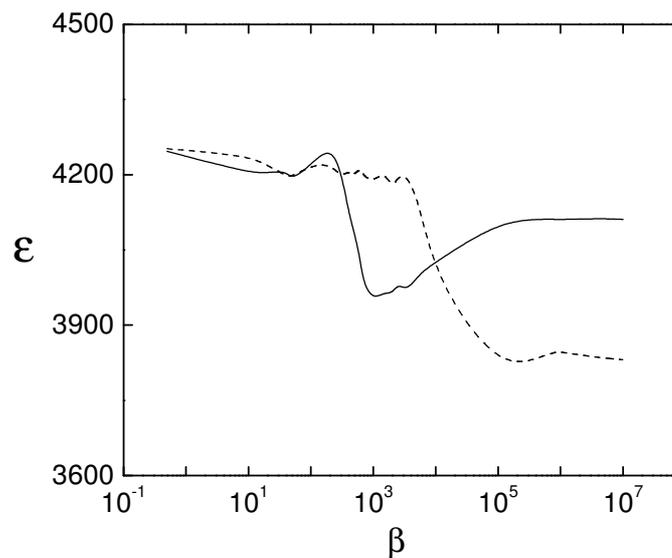


Figura 5. Error entre las proyecciones de la imagen reconstruida con distintos β y las proyecciones dato, usando la Ec. 4 (sólida) y Ec. 5 (punteada).

Las Figuras 6 y 7 muestran la reconstrucción de una imagen de 64×64 píxeles con tres círculos internos, a partir de 16 proyecciones y 64 rayos por proyección. Las Figuras 8 y 9 muestran la dependencia entre los errores ε y σ en función de β . En forma similar a las Figuras 2 y 3, se puede observar que a medida que se incrementa el valor de β se puede mejorar la calidad de la reconstrucción por el filtrado de ruido, aunque a partir de cierto β es mucho más notorio el esfumado de la imagen. El error σ (Figura 8) muestra un valor mínimo similar a la Figura 4, sin embargo ε en el rango estudiado muestra un comportamiento asintótico para grandes valores de β . Esta diferencia de entre ε y σ no es ilógica, ya que refleja que la información contenida en las proyecciones no es suficiente para indicar la

calidad de la imagen.

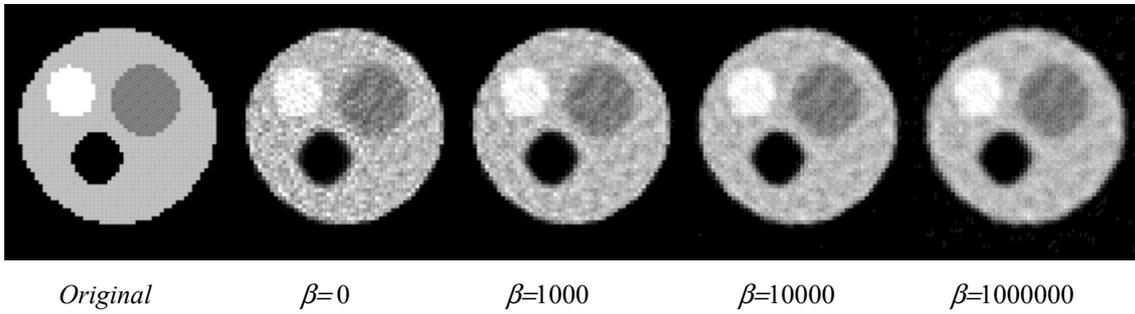


Figura 6. Reconstrucciones con diferentes β usando Ec. (4)

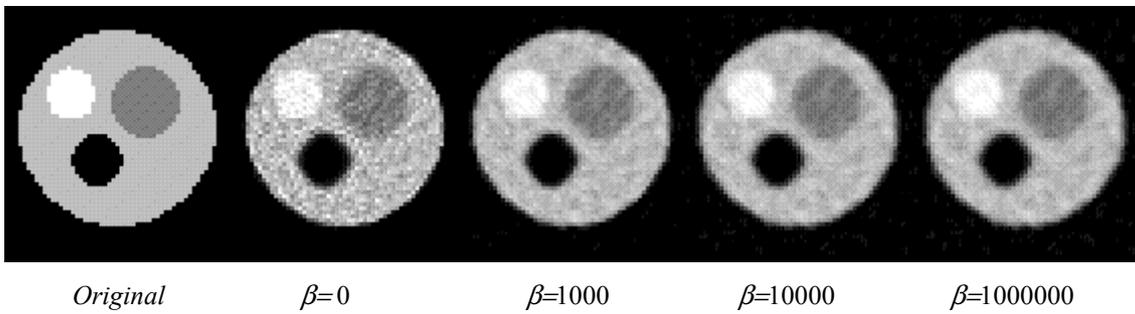


Figura 7. Reconstrucciones con diferentes β usando Ec. (5)

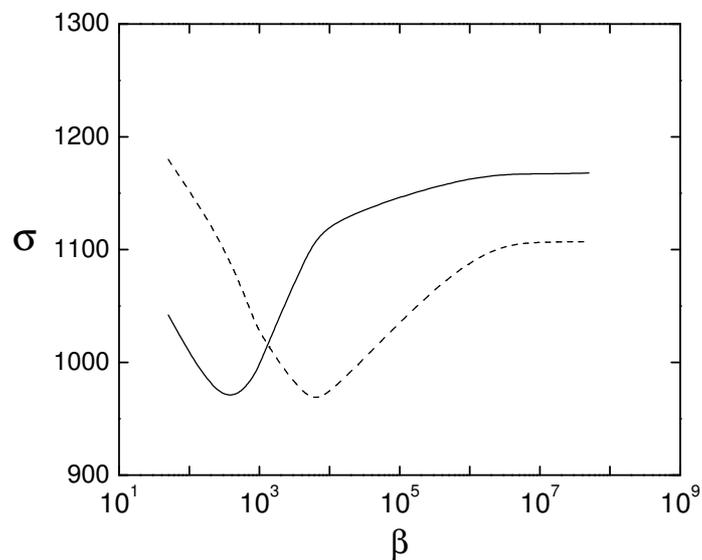


Figura 8. Error entre la imagen original y reconstruida con distintos β , usando Ec. 4 (sólida) y Ec. 5 (punteada)

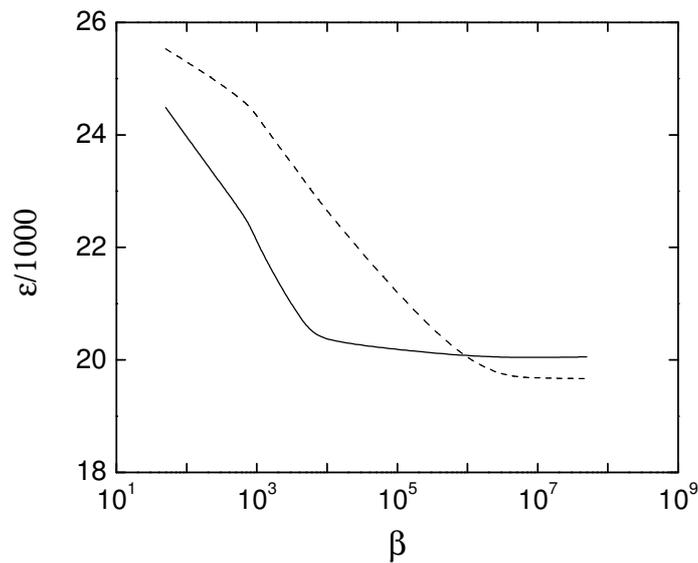


Figura 9. Error entre las proyecciones de la imagen reconstruida con distintos β y las proyecciones dato, usando la Ec. 4 (sólida) y Ec. 5 (punteada).

4 CONCLUSIONES

Se presentó un método de reconstrucción tomográfica basado en el concepto de máxima entropía al cual se le incorporó información *a priori* acerca de las características del objeto a reconstruir. Este conocimiento se agrega a la información que aportan las proyecciones dato, y se considera muy importante para evitar soluciones no esperadas como por ejemplo imágenes distorsionadas o ruidosas. Particularmente en el caso de tomografías industriales, esta información está disponible desde el proceso del diseño o de fabricación del producto. En este trabajo, se utilizaron dos filtros de suavizado que se agregan a la función de entropía clásica para obtener imágenes acordes a la suposición sobre características de los objetos consideradas previamente, que mejoran en ambos casos el indicador de calidad de la imagen reconstruida. Para las imágenes procesadas la constante β óptima es positiva y el valor depende fundamentalmente de las características de cada imagen.

APÉNDICE

La celda m_{jv} de la matriz M cuando se utiliza la Ec. 4 queda definida como:

$$m_{jv} = \begin{cases} 2 |C_j| & \text{si } v = j \\ -2 & \text{si } v \in C_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (12)$$

C_j se define en bloques de 3x3 píxeles vecinos al j -ésimo píxel, y $|C_j|$ es la cardinalidad.

Cuando se usa la Ec. 5 la celda m_{jv} de la matriz M se define como:

$$m_{jv} = \begin{cases} 1 + \sum_{v \in C_j} |C_v|^{-2} & \text{si } v = j \\ -2/|C_j| + \sum_{k \in C_j \cap C_v} |C_v|^{-2} & \text{si } v \in C_j \\ \sum_{k \in C_j \cap C_v} |C_v|^{-2} & \text{si } v \notin C_j \text{ y } C_j \cap C_v \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (13)$$

C_j y C_v son bloques de 3x3 píxeles vecinos a los píxeles j o v respectivamente.

REFERENCIAS

- Dusaussoy, N.J., and Abdou, I.E., *The extended MENT algorithm: a maximum entropy type algorithm using prior knowledge for computerized tomography*, IEEE Transactions on Signal Processing, pp. 1164-1180, (1991).
- Fletcher R., *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, (1980).
- Herman, G.T., *Image Reconstruction from Projections. The Fundamental of Computerized Tomography*, Academic Press, London, (1980).
- Herman, G.T. and A. Kuba, *Discrete Tomography, Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhäuser Boston, (1999).
- Jaynes, E.T., *Information theory and statistical mechanics*, Physical Review, Vol 106, 4, pp 620-630, (1957).
- Minerbo, G., *MENT: A maximum entropy algorithm for reconstruction a source from projection data*, Comp. Graph. Image Processing, Vol 10, pp. 48-68, (1979).