

OPTIMIZACIÓN GEOMÉTRICA DE COMPONENTES FLUIDODINÁMICOS UTILIZANDO EL MÉTODO DE LA DERIVADA TOPOLÓGICA.

L. Ruspini^a, E. Dari^{a,b,c} y C. Padra^{b,c}

^aInstituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, R8402AGP, Bariloche, Argentina, <http://ib.edu.ar>

^bCentro Atómico Bariloche, CNEA, R8402AGP, Bariloche, Argentina

^cCONICET, Argentina

email: ruspinil@ib.cnea.gov.ar

Palabras clave: Derivada Topológica, Análisis de sensibilidad, Optimización, Componentes fluido-dinámicos, Topología.

Resumen. La utilización de métodos de optimización de diseño por simulación computacional ha sido en los últimos años materia de gran desarrollo, principalmente debido al aumento de la capacidad de procesamiento de datos. En este contexto, un gran número de trabajos se han dedicado a la aplicación del método de *Análisis de sensibilidad Topológica* en problemas de optimización, mayormente, relacionados al modelado de componentes mecánicos, problemas térmicos y propagación de fisuras. Si bien existen trabajos matemáticos relacionados a las ecuaciones de Stokes y Navier Stokes incompresibles, no existe en la literatura ningún desarrollo de herramientas computacionales complejas para la optimización de componentes fluidodinámicos. El propósito de este trabajo es justamente desarrollar este tipo de herramientas de cálculo, a través del método de la discretización de elementos finitos.

La idea principal del método de optimización es la de modificar la topología (creación de agujeros en el dominio) de acuerdo al valor de una función escalar, llamada *Derivada Topológica*, producto de la minimización de una función costo que caracteriza cuantitativamente la optimización del problema. Las principales ventajas de esta forma de optimización son tanto la facilidad en la modificación de la topología inicial así como también el bajo costo computacional respecto de los métodos tradicionales de optimización, ya que sólo es necesaria la resolución de dos sistemas similares para obtener la variación en el dominio que minimiza la función costo en cuestión. La problemática de la implementación computacional de este método radica tanto en la estabilización de los sistemas como en el método utilizado para la generación de huecos. Para este último realizamos la comparación, mediante varios ejemplos, de los dos principales métodos utilizados comúnmente y presentamos una modificación que brinda al método de una mayor robustez y permite obtener dominio de mayor suavidad.

Por último, presentamos algunos ejemplos de optimización en componentes bidimensionales y tridimensionales, utilizando las herramientas desarrolladas en este trabajo. Donde también presentamos un nuevo método combinado para la flexibilización de las funciones costos utilizadas.

1. INTRODUCCIÓN

De manera general diremos que cualquier tipo de optimización puede caracterizarse a través de la búsqueda de un mínimo en un dado parámetro o, como se designa comúnmente, *función costo*. Una optimización geométrica corresponde entonces a la minimización de dicho parámetro respecto a un cambio del dominio en el que se define el sistema. De esta manera podemos expresar el problema de optimización geométrica como

$$\min \mathcal{J}(\Omega, \mathbf{u}_\Omega) \quad \Omega \in \Theta, \quad (1)$$

donde

- \mathcal{J} corresponde a la función costo a minimizar.
- Θ es el conjunto de todos los dominios admisibles.
- \mathbf{u}_Ω es la solución a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, PDE, en Ω .

Son varios los diferentes métodos utilizados en la actualidad para optimizar dominios geoméricamente. Entre ellos podemos mencionar:

- Optimización de forma clásica: Se supone un cambio en la frontera del dominio y luego se evalúan las cualidades de este nuevo dominio, permitiendo un cambio sólo si este nuevo sistema incrementa la eficiencia. Son muy costosos y permiten sólo una topología.
- Algoritmos genéticos: Similares a los anteriores, pero los cambios se realizan en base a una probabilidad que depende de la función costo. Son los únicos que permiten encontrar mínimos globales, pero resultan computacionalmente muy costosos.
- Método de Level Set: Se utiliza como forma de obtener cambios topológicos. Representando el dominio como una superficie de nivel de una función de Level-Set, siendo necesaria la evolución de la función en un espacio de mayor dimensión. Resultan muy costosos y complejos computacionalmente, pero permiten cambios topológicos.
- Gradiente Topológico: Supone una modificación infinitesimal en el dominio y mediante el desarrollo asintótico de la función costo en ese punto se obtiene una función escalar, *Derivada topológica*, que permite conocer el camino de mayor decremento de la función costo. Son los más baratos computacionalmente, pero linealizan el sistema y la obtención de la derivada topológica resulta, matemáticamente, muy compleja.

Esta última forma de optimización es aquella en la que nos concentraremos en este trabajo. Para ello es necesario introducir un dominio perturbado $\Omega_\varrho \subset \mathbb{R}^N$, tal que $\Omega_\varrho = \Omega - \overline{B_\varrho}$, cuya superficie llamaremos $\Gamma_\varrho = \Gamma \cup \partial B_\varrho$ Lipschitz-continua, donde $\overline{B} = B_\varrho \cup \partial B_\varrho$ es una bola de radio ϱ y centro $\vec{x} \in \Omega$, que se aproxima a un conjunto de medida nula cuando el valor de ϱ tiende a 0 (un punto), es decir que cuando $\varrho = 0$ el dominio perturbado corresponde al dominio inicial, en el que se plantea el problema.

2. MÉTODO DE LA DERIVADA TOPOLÓGICA

Consideramos una función costo arbitraria, dependiente del tamaño de la perturbación del dominio ϱ , a la que denominamos como $j(\varrho)$. El problema se resume en obtener una expresión que caracterice el comportamiento de $j(\varrho) - j(0)$. Para ello resulta necesario desarrollar asintóticamente dicha expresión, obteniendo

$$j(\varrho) - j(0) = f(\varrho)D_T(\vec{x}) + \mathcal{R}(f(\varrho)), \tag{2}$$

donde llamamos $f(\varrho)$ a una función positiva monótonamente decreciente que tiende a cero cuando ρ tiende a cero. En la práctica, varios ejemplos numéricos (ver Pommier (2002), Mader (2002)) han demostrado que en general el valor de esta función $f(\varrho)$, depende del tipo de condición y de la dimensión del dominio, como se muestra en la Tabla (1).

	2D	3D
Dirichlet	$\frac{-1}{\ln \varrho}$	ϱ
Neumann	ϱ^2	ϱ^3

Tabla 1: Forma funcional de $f(\varrho)$.

Llamaremos derivada topológica a la función $D_T(\vec{x})$. Como se puede ver es posible emplear dicha función como dirección de decrecimiento de la función costo. Se debe remarcar que la función $\mathcal{R}(f(\varrho))$ es utilizada para denominar los términos de ordenes superiores de $f(\varrho)$, cumpliéndose que

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{R}(f(\varrho))}{f(\varrho)} = 0. \tag{3}$$

2.1. Método Lagrangeano

Sea $\mathcal{U}_\varrho = \{\mathbf{u}_\varrho \in H^1(\Omega_\varrho)\}$, un espacio de funciones continuas, definido en el dominio perturbado Ω_ϱ . Consideramos un problema general expresado en su formulación variacional como:

Encontrar $\mathbf{u}_\varrho \in \mathcal{U}_\varrho$, tal que

$$a(\mathbf{u}_\varrho, \mathbf{v}_\varrho) = l(\mathbf{v}_\varrho) \quad \forall \mathbf{v}_\varrho \in \mathcal{V}_\varrho, \tag{4}$$

donde $\mathcal{V}_\varrho = \{\mathbf{u}_\varrho \in H^1(\Omega_\varrho), \mathbf{u}_\varrho = 0 \text{ en } \Gamma\}$ y las formas lineal $l(\cdot)$ y bilineal $a(\cdot, \cdot)$ cumplen, respectivamente, con las condiciones enunciadas en el teorema de Lax-Milgram.

El método Lagrangeano consiste en construir un funcional que sea equivalente a la función costo empleada. Imponiendo al sistema las ecuaciones de estado, Ec.(4), mediante la aplicación de multiplicadores de Lagrange generales. El funcional Langrangeano asociado al dominio perturbado Ω_ϱ , queda entonces definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_\varrho(\mathbf{u}_\varrho, \mathbf{v}_\varrho) = \mathcal{J}_\varrho(\mathbf{u}_\varrho) + a(\mathbf{u}_\varrho, \mathbf{v}_\varrho) - l(\mathbf{v}_\varrho). \tag{5}$$

donde las funciones de prueba \mathbf{v} hacen las veces de los conocidos multiplicadores de Lagrange.

Si la ecuación de estado, Ec.(4), es satisfecha para cualquier ϱ , entonces sólo basta calcular la derivada total del funcional *Lagrangeano* respecto a ϱ para obtener la *derivada topológica*, es decir:

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\varrho} = \frac{d\mathcal{J}_\varrho(\mathbf{u}_\varrho)}{d\varrho} = \frac{\partial\mathcal{L}_\varrho}{\partial\varrho} + \left\langle \frac{\partial\mathcal{L}_\varrho}{\partial\mathbf{u}_\varrho}, \frac{d\mathbf{u}_\varrho}{d\varrho} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\mathcal{L}_\varrho}{\partial\mathbf{v}_\varrho}, \frac{d\mathbf{v}_\varrho}{d\varrho} \right\rangle. \quad (6)$$

Como se puede ver el segundo término del lado derecho corresponde a la ecuación de estado, Ec.(4), anulándose para todo $\frac{d\mathbf{u}_\varrho}{d\varrho} \in \mathcal{V}_\varrho$. Luego impondremos que el último término del lado derecho se anule, obteniendo la ecuación adjunta asociada al problema, de manera que la derivada parcial coincida con la derivada total.

Finalmente, cumpliendo con las condiciones de la ecuación de estado y adjunta, se puede expresar la función $D_T(\vec{x})$, ver [Garreu et al. \(1998b\)](#), como

$$D_T = \left. \frac{dJ_\varrho(\mathbf{u}_\varrho)}{d\varrho} \right|_{\varrho \rightarrow 0} = \left. \frac{\partial}{\partial\varrho} \mathcal{L}_\varrho(\mathbf{u}_\varrho, \mathbf{v}_\varrho) \right|_{\varrho \rightarrow 0} \quad (7)$$

La forma tradicional de obtener una expresión analítica para la D_T , corresponde al desarrollo asintótico por el método de truncamiento del dominio.

2.2. Truncamiento del dominio

Este método consiste en separar el problema directo, Ec.(4), en dos problemas; el primero en todo el dominio excepto en una bola de radio mayor que ϱ y el segundo dentro de esta bola. Esto permite, mediante varias operaciones algebraicas, resolver analíticamente el segundo problema utilizando simplemente el método de separación de variables. Pudiéndose luego realizar un análisis del comportamiento asintótico con respecto a ϱ . Los detalles de los desarrollos matemáticos referidos a este método, pueden ser encontrados en el trabajo de [Garreu et al. \(1998b\)](#).

3. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

3.1. Problema inicial

Sea el dominio inicial Ω , podemos describir el problema a través de las ecuaciones de Navier-Stokes como

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - 2\mu \operatorname{div}(\nabla^s \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = U_0 & \text{en } \Gamma_D, \end{cases} \quad (8)$$

imponiendo condiciones de borde de Dirichlet a lo largo de toda la frontera del dominio Γ_D .

3.2. Problema perturbado

Sea el dominio perturbado Ω_ϱ , introducido en la sección anterior, podemos describir el problema perturbado como

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u}_\varrho \cdot \nabla)\mathbf{u}_\varrho - 2\mu \operatorname{div}(\nabla^s \mathbf{u}_\varrho) + \nabla p_\varrho = \mathbf{f} & \text{en } \Omega_\varrho \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\varrho = 0 & \text{en } \Omega_\varrho \\ \mathbf{u}_\varrho = U_0 & \text{en } \Gamma_D \\ \mathbf{u}_\varrho = 0 & \text{en } \partial B_\varrho, \end{cases} \quad (9)$$

imponiendo las mismas condiciones de borde que en el problema inicial sobre Γ_D y tomando como condición de Dirichlet sobre la frontera de la bola B_ρ una velocidad nula, que corresponde a la introducción de un obstáculo en el campo de velocidades del fluido.

3.3. Formulación variacional

Sean los subespacios de funciones continuas,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\rho &= \{ \mathbf{u}_\rho \in H^1(\Omega_\rho) \}, \\ \mathcal{V}_\rho &= \{ \mathbf{u}_\rho \in H^1(\Omega_\rho), \mathbf{u}_\rho|_\Gamma = 0 \}, \\ \mathcal{Q}_\rho &= \{ p \in L_0^2(\Omega_\rho) \}. \end{aligned}$$

La forma variacional de las ecuaciones de Navier-Stokes corresponde al problema:

Encontrar $(\mathbf{u}_\rho, p_\rho) \in \mathcal{U}_\rho \times \mathcal{Q}_\rho$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1(\mathbf{u}_\rho; \mathbf{u}_\rho, \mathbf{w}) - \langle p_\rho, \mathbf{div} \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle & \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_\rho \\ \langle g, \mathbf{div} \mathbf{u}_\rho \rangle = 0 & \forall g \in \mathcal{Q}_\rho \\ \mathbf{u}_\rho = U_0 & \text{en } \Gamma_D \\ \mathbf{u}_\rho = 0 & \text{en } \partial B_\rho, \end{array} \right. \quad (10)$$

donde la expresión para la forma trilineal $a_1(\cdot; \cdot, \cdot)$ esta dada por

$$a_1(\mathbf{u}_\rho; \mathbf{u}_\rho, \mathbf{w}) = \rho \langle (\mathbf{u}_\rho \cdot \nabla) \mathbf{u}_\rho, \mathbf{w} \rangle + 2\mu \langle \nabla^s \mathbf{u}_\rho, \nabla^s \mathbf{w} \rangle. \quad (11)$$

Esta nueva forma de escribir el problema debe cumplir una serie de requisitos, generalizando las propiedades del teorema de Lax-Milgram, para poder asegurar la existencia y unicidad de la solución del sistema, ver [Girault and Raviart \(1986\)](#).

3.4. Funciones costo

Las funciones costo, asociadas al problema fluido-dinámico, que utilizamos en este trabajo corresponden a:

- **Campo de velocidades de referencia**

Sea el funcional $\mathcal{J}_\rho(\mathbf{u}_\rho)$ dependiente solamente de \mathbf{u}_ρ y definido en una región fija cualquiera Λ del dominio Ω_ρ . Consideramos entonces la diferencia respecto de un campo de velocidades de referencia a través de la función costo:

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \int_\Lambda |\mathbf{u} - \mathbf{u}_d|^2 \partial\Lambda. \quad (12)$$

Esta función costo nos permite imponer al diseño un comportamiento deseado a través de la velocidad de referencia \mathbf{u}_d , en una región característica del dominio, Λ .

■ Energía Interna

Consideramos ahora el caso en que el parámetro a minimizar corresponde a la energía perdida en el sistema fluidodinámico, también conocida como función disipación viscosa, ver [White \(1979\)](#). Es decir,

$$\mathcal{J}_\rho(\mathbf{u}_\rho) = \nu \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{u} : \nabla^s \mathbf{u} \, \partial\Omega, \quad (13)$$

3.5. Problema adjunto

Generalizando los conceptos del estado adjunto para la forma trilineal $a_1(\cdot, \cdot)$, vemos que la ecuación adjunta general asociada a las ecuaciones de Navier-Stokes esta dada por,

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_\rho}{\partial \mathbf{u}_\rho}, \dot{\mathbf{u}}_\rho \right\rangle = \left\langle \frac{\partial a_1(\mathbf{u}_\rho; \mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}_\rho)}{\partial \mathbf{u}_\rho}, \dot{\mathbf{u}}_\rho \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}_\rho}{\partial \mathbf{u}_\rho}, \dot{\mathbf{u}}_\rho \right\rangle = 0 \quad \forall \dot{\mathbf{u}}_\rho \in \mathcal{V}_\rho.$$

pudiéndose expresar la formulación variacional de este problema adjunto como:

Encontrar el par $(\mathbf{v}_\rho, q_\rho) \in \mathcal{V}_\rho \times \mathcal{Q}_\rho$, tal que para todo par $(\mathbf{w}, g) \in \mathcal{V}_\rho \times \mathcal{Q}_\rho$, se verifique que

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\rho \mathbf{v}_\rho + \rho(\mathbf{u}_\rho \cdot \nabla) \mathbf{w} \mathbf{v}_\rho \\ + 2\mu \nabla^s \mathbf{v}_\rho \nabla^s \mathbf{w} - \langle q_\rho, \mathbf{div} \mathbf{w} \rangle = - \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}_\rho}{\partial \mathbf{u}_\rho}, \mathbf{w} \right\rangle \quad \text{en } \Omega_\rho \\ \langle g, \mathbf{div} \mathbf{v}_\rho \rangle = 0 \quad \text{en } \Omega_\rho \\ \mathbf{v}_\rho|_{\Gamma_D} = 0 \quad \text{en } \Gamma_D. \end{array} \right. \quad (14)$$

3.6. Expresiones para la derivada topológica

Para la obtención de las expresiones de la derivada topológica asociada a cada función costo utilizamos los resultados generales obtenidos en [Guillaume and Iris \(2004\)](#), donde se describe la aplicación del método de truncamiento del dominio para la ecuación de Stokes, suponiendo la inserción de un obstáculo circular para el caso bidimensional y esférico para el caso tridimensional. En el trabajo [Amstutz \(2003\)](#) se demuestra que la influencia de los términos no-lineales en la expresión de la derivada topológica es de segundo orden. Por lo tanto, para ambas funciones costo las expresiones de la Derivada Topológica se corresponden a las de las ecuaciones de Stokes. Estas son:

Velocidad de referencia:

- Caso 2D

$$D_T(\vec{x}) = 4 \pi \nu \mathbf{u}_0(\vec{x}) \mathbf{v}_0(\vec{x})$$

- Caso 3D

$$D_T(\vec{x}) = 6 \pi \nu \mathbf{u}_0(\vec{x}) \mathbf{v}_0(\vec{x})$$

Energía interna

- Caso 2D

$$D_T(\vec{x}) = 4 \nu \mathbf{u}_0(\vec{x}) \mathbf{v}_0(\vec{x}) + 2 \mathbf{u}_0^2(\vec{x})$$

■ Caso 3D

$$D_T(\vec{x}) = 6 \nu \mathbf{u}_0(\vec{x}) \mathbf{v}_0(\vec{x}) + 3 \mathbf{u}_0^2(\vec{x})$$

Donde podemos ver que las expresiones de la derivada topológica sólo dependen del campo de velocidades y su adjunto para el dominio sin perturbar, cuando $\varrho \rightarrow 0$.

Es importante remarcar también la importancia de la relación entre los dos términos para el caso de la energía interna. Ya que siendo el segundo término del lado derecho siempre positivo, la zona de mínima derivada topológica dependerá exclusivamente del valor del adjunto en dicho punto. En particular, cuando los signos entre la velocidad y el adjunto difieran, el primer término se hará negativo. Entonces, la influencia del primer término sobre el segundo queda restringida por los valores de la viscosidad cinemática, siendo éstos, para fluidos tradicionales, del orden de $(10^{-4} - 10^{-5})$. Por lo tanto los valores de la derivada topológica serán negativos sólo en aquellas regiones en que el campo de velocidades sea cercano a cero.

4. ASPECTOS NUMÉRICOS

4.1. Resolución de los sistemas

Para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes y su problema adjunto utilizamos el método de Galerkin linelizado, introduciendo algunos términos de estabilización como forma de eliminar los modos espúreos, conocidos como *wiggles*, producto de la aproximación de igual orden en el campo de presión y de la velocidad. Estos términos corresponden al método introducido en Codina (2001).

4.2. Generación de huecos en el dominio

Existen en la literatura varias formas diferentes de manejar el cambio de topología en dominios discretos:

- El primer método es el denominado *hard-kill method*, ver Garreu et al. (1998a) y Cúa et al. (2000), que consiste en extraer del dominio aquel elemento cuya $D_T(\vec{x}_m)$ sea mínima, tomando como \vec{x}_m el valor del centro geométrico del elemento, como se muestra en la Fig.(1(a)). La principal ventaja de este método es que al sacar sólo un elemento por paso es posible trabajar con mallas de menor tamaño.
- El segundo método, ver Novotny (1998), corresponde a extraer todos los elementos que contengan aquel nodo cuya $D_T(\vec{x}_i)$ resulte mínima, como se muestra en la Fig.(1(b)). La principal ventaja de este método es que la forma de la célula a extraer, resulta más uniforme, trayendo menos problemas de oscilaciones. A éste método lo llamaremos como *método de extracción nodal*.

4.3. Modificación al método elemental

Como sabemos en cualquier problema resuelto numéricamente es posible que las soluciones con las que trabajemos posean errores y perturbaciones. Debido a este problema presentamos en este trabajo una modificación al método elemental, donde al igual que en el método elemental tradicional, utilizamos como tamaño de extracción un elemento. La principal diferencia respecto al método elemental radica en la elección del valor que caracteriza a cada elemento. Donde en lugar de extraer aquel elemento cuya derivada topológica evaluada en el centro geométrico, resulte menor; será extraído el elemento cuyo supremo sea menor. Entendiendo por supremo

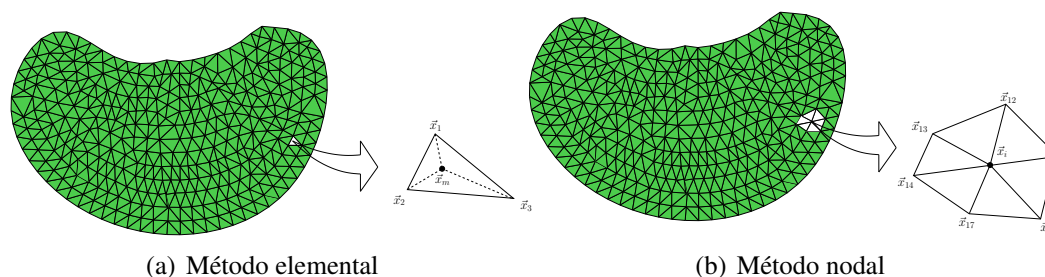


Figura 1: Métodos de generación de huecos en el dominio discreto.

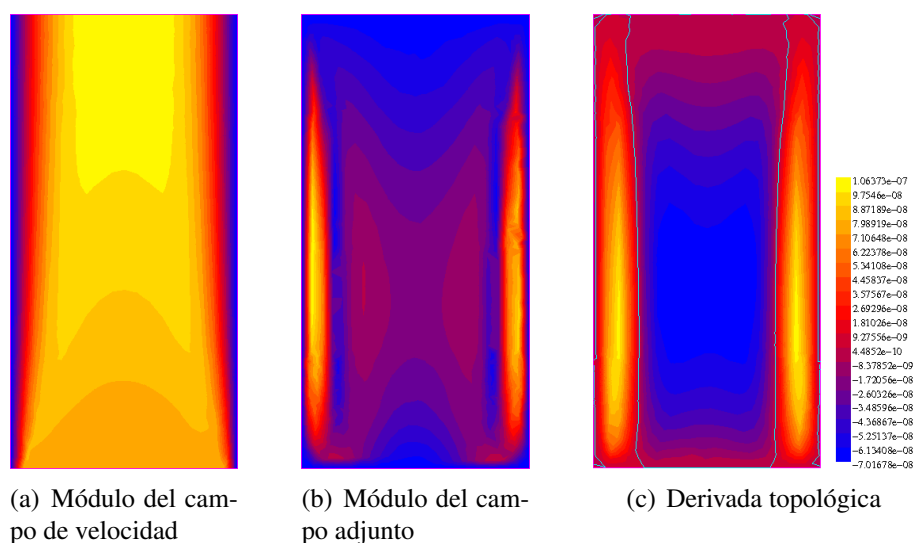


Figura 2: Soluciones en el estado inicial para el problema de la barrera niveladora. $Re \approx 200$.

de un elemento al mayor valor entre los valores de sus nodos, es decir, el máximo valor nodal. De este modo, si bien los valores de la derivada topológica efectiva aumentan, los extremos relativos de la función se mantienen en el mismo lugar. Logrando como resultado una función de mayor suavidad que la original y confiriendo al método de extracción una amplia estabilidad frente a oscilaciones numéricas de longitud de onda comparables al tamaño de los elementos.

5. EJEMPLOS

5.1. Barrera niveladora

Este problema corresponde a la sección recta de un conducto, por donde pasa un fluido. Una interpretación posible del problema, es la de suponer un canal profundo, de manera que los efectos del fondo sean despreciables, y pueda considerarse como un problema bidimensional. Discretizamos el dominio en un arreglo de 6956 elementos (2×4 cm), con la particularidad de refinar mucho más la zona comprendida entre $0,6 < y < 0,9$. La idea de tomar este mayor refinamiento es la de restringir la zona de extracción de elementos (introducción de obstáculos) sólo a esta región.

Aplicando la optimización por referencia y tomando como referencia un campo de velocidades plano, igual a la velocidad de entrada. Entonces es posible obtener, en esta zona de restricción, una barrera niveladora de flujo. Las condiciones de contorno impuestas en este pro-

blema corresponden a una velocidad unitaria en el lado inferior del domino y condiciones de velocidad nula en los laterales. El campo de velocidades iniciales se muestra en la Fig.(2(a)). Como podemos ver, éste constituye un problema en el que el fluido se encuentra desarrollándose hidrodinámicamente y la longitud total resulta un poco menor que la longitud de desarrollo. Por esta razón el mínimo de la derivada topológica no se encuentra en el medio del domino sino que se producen dos mínimos locales simétricos respecto del eje central, como se expone en la Fig.(2(c)). De esta manera, por cuestiones numéricas, el primer obstáculo es posicionado a uno de los dos lados, introduciendo una asimetría al nuevo problema. Sin embargo, esta asimetría incide sobre la solución del segundo paso y se corrige sucesivamente a medida que se avanzan los pasos de la optimización.

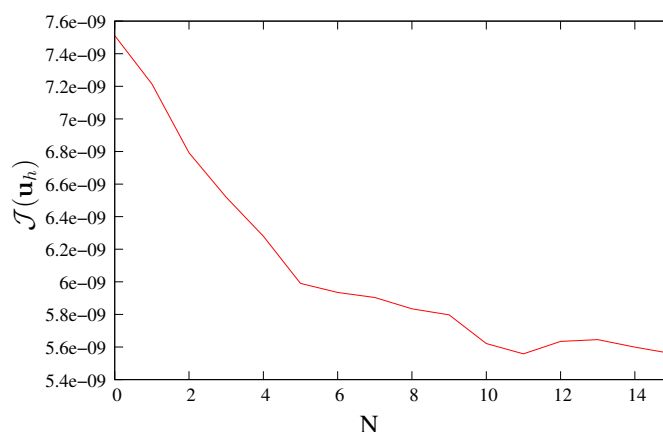


Figura 3: Evaluación de la función costo.

En la Fig.(3) se exhibe el comportamiento de la función costo para cada uno de los pasos de iteración. Destacándose en la misma: un decrecimiento monótono hasta el paso 11; luego un pequeño incremento; y finalmente un descenso hasta el paso número 15, en que finaliza la simulación. El hecho de que se produzca ese incremento se debe a que el algoritmo implementado detecta mínimos de la derivada topológica, independientemente del signo de esta función en dicho punto.

En la Fig.(4), se puede ver la solución para este último paso, en la que se observa la configuración final de la barrera niveladora de flujo, tras quince pasos de iteración.

5.2. Curva potencial

En este ejemplo presentamos un caso de optimización por energía interna, en el que es forzado un fluido por uno de los laterales de un cuadrado, fluyendo hacia la parte superior, donde se lo deja salir, Fig.(6(a)). La malla utilizada para la discretización del problema está constituida por 47750 elementos triangulares. El número de Reynolds correspondiente al problema, es de aproximadamente 500, con lo cual los efectos no-lineales producen cambios significativos respecto a las soluciones del problema de Stokes.

5.2.1. Extracción elemental

Para este caso quitamos un número de 100 elementos por paso, sin ninguna restricción en el dominio de extracción. En la Fig.(6) mostramos la secuencia de extracciones, en la que es posible apreciar que el tipo de optimización está caracterizada principalmente por el cambio

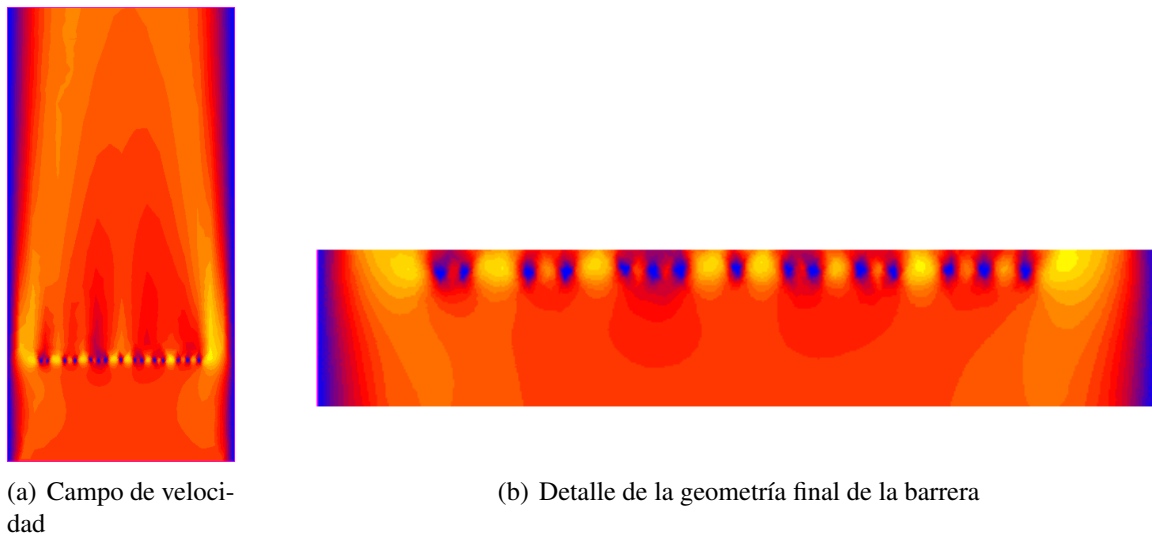


Figura 4: Campo de velocidades para el último paso de la optimización topológica, $Re \approx 200$.

de forma; registrándose cambios de topología tan sólo en unos pocos pasos. Aún siendo de este modo vemos que estos pocos pasos, en que se modifica la topología (paso 60, ≈ 200), se corresponden con puntos de inflexión en el comportamiento de la energía interna (función costo), ver Fig.(5).

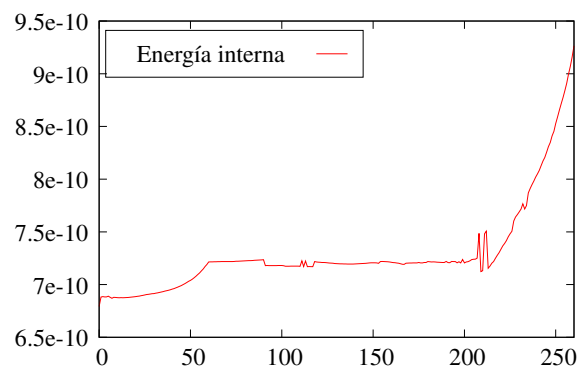


Figura 5: Evaluación de la función costo.

Es notable como, si bien en ciertos puntos la energía interna aumenta, sólo a partir del paso 200 aproximadamente, ésta comienza a incrementarse drásticamente marcando un cambio de comportamiento. Como ha de suponerse, este cambio es debido al incremento del factor de pico del flujo, ya que al estrecharse el área de pasaje del fluido los cambios en las derivadas de la velocidad comienzan a acentuarse y con ellos las pérdidas por disipación viscosa.

5.2.2. Extracción elemental por supremo

En la Fig.(7) exhibimos la secuencia de optimización utilizando el método de optimización por supremo. Donde claramente se puede notar que los dominios obtenidos resultan ser de mayor suavidad que para el caso elemental. A su vez se debe notar que se extraen una cantidad mayor de elementos por paso (500 elementos), siendo ésta una condición ampliamente

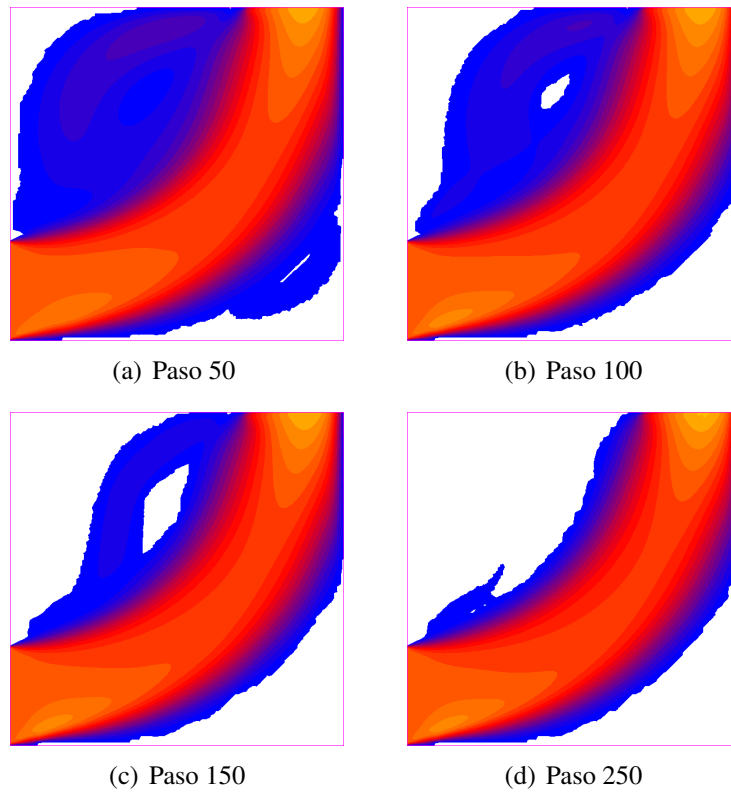


Figura 6: Campo de velocidad y dominio, utilizando el método de extracción elemental. Extrayendo 100 elementos por paso ($\approx 0.2\%$).

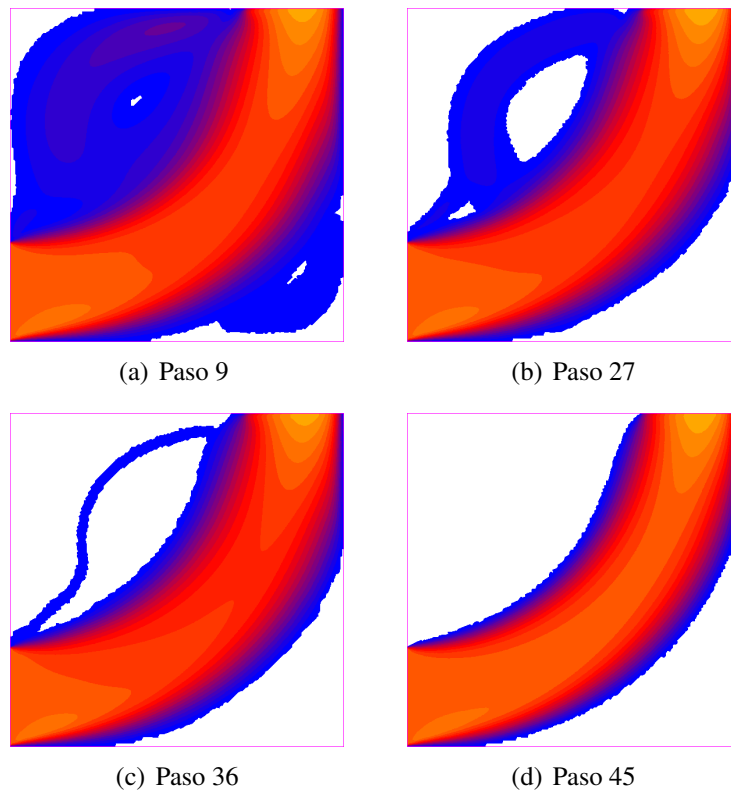


Figura 7: Campo de velocidad y dominio, utilizando el método de extracción elemental supremo. Extrayendo 500 elementos por paso ($\approx 1.0\%$).
 Copyright © 2008 Asociación Argentina de Mecánica Computacional <http://www.amcaonline.org.ar>

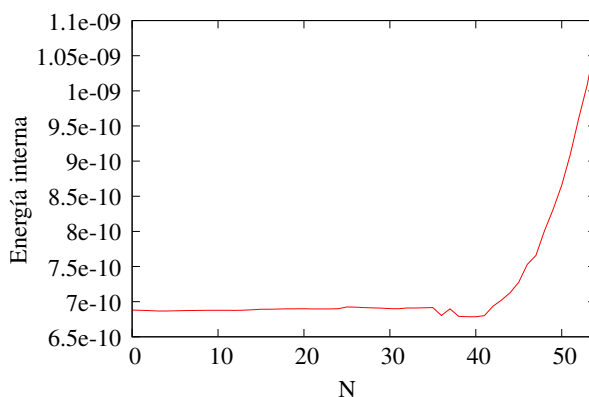


Figura 8: Evolución de la energía interna, para el método de supremos.

desfavorable para el método.

Otra cuestión destacable, surge al analizar la curva de evolución de la función costo de la Fig.(8). Donde se puede ver que hacia el paso 40 se produce un mínimo absoluto de la función costo. Es decir, que la suavidad que nos proporciona el método permite, en este caso, encontrar un dominio cuya evaluación de la función costo resulta más favorable que la inicial. Recordemos que con los otros métodos la función costo sólo crecía monótonamente al utilizar la energía interna.

La utilización del método de extracción nodal sólo puede ser considerada para el caso de dominios bidimensionales, ya que en dominios tridimensionales se debe refinar demasiado las mallas para obtener resultados satisfactorios. Aún así el método provoca soluciones deficientes en cuanto a la suavidad de los dominios, viéndose muy afectado por las perturbaciones que puedan existir en la solución, como se muestra en [Ruspini \(2008\)](#). Por estas razones decidimos no introducir ningún ejemplo de su utilización, ya que consideramos que su uso no produce ninguna mejora respecto a los demás métodos.

5.3. Múltiple de admisión

Continuamos esta serie de ejemplos con el diseño de un múltiple de admisión igual a cualquiera de los que se encuentran, hoy en día, debajo del capó de un automóvil. Utilizamos un número de Reynolds de aproximadamente 200 y el número de elementos extraídos por paso corresponde a 2000. Es necesario comentar que al utilizar el método de extracción elemental se obtienen dominios degenerados, ver ([Ruspini, 2008](#), chap. 6), probablemente debido al tamaño de los elementos, por esta razón sólo presentamos los resultados obtenidos con el método elemental por supremo.

En la Fig.(9) presentamos el campo de velocidad inicial utilizado en este problema, viendo que claramente el comportamiento difiere del problema de la sección anterior. Donde se exhibe la malla superficial coloreada de acuerdo al campo de velocidad y algunas líneas de corriente que indican el comportamiento del fluido dentro del dominio.

5.4. Múltiple de admisión, método elemental por supremo

Presentamos a través de la Fig.(10) algunos de los pasos de avance de la optimización de este componente. Es posible apreciar, desde los primeros pasos de la simulación, las singulares características que el comportamiento del fluido en este régimen produce sobre la morfología del diseño. Como podemos ver, a través de las líneas de corriente, este comportamiento hace que

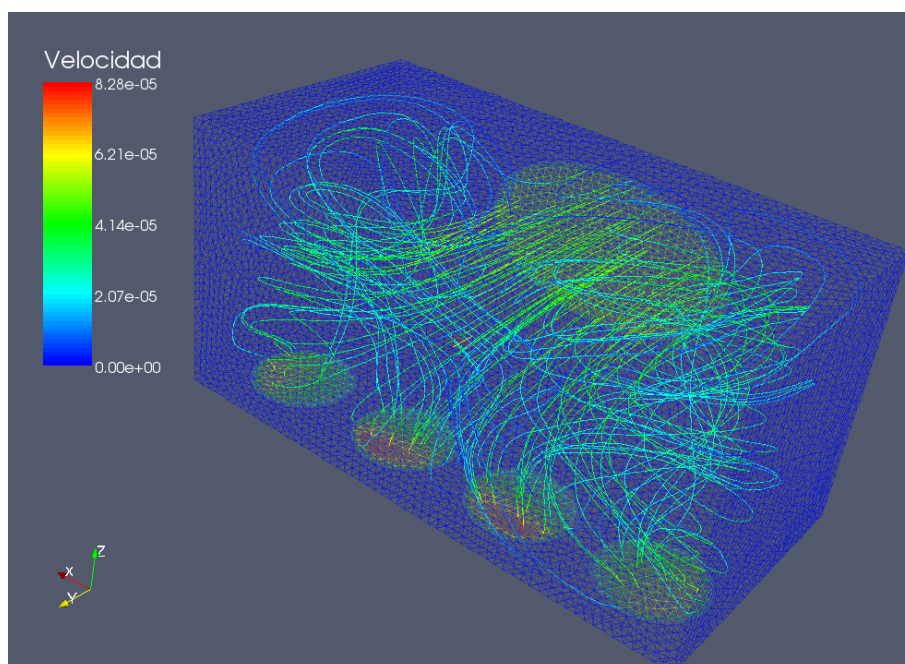


Figura 9: Malla superficial del múltiple tridimensional coloreada según el campo de velocidades y líneas de corriente correspondientes al campo de velocidad inicial. $Re \approx 200$.

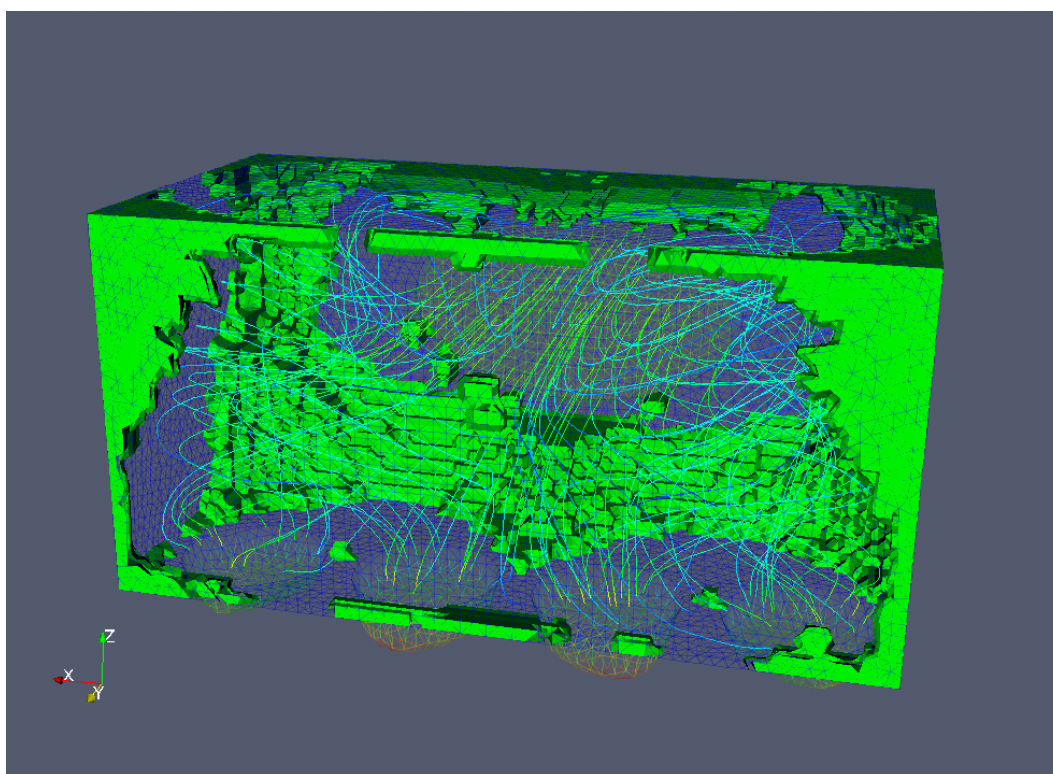
energéticamente sea conveniente que el fluido no recorra el camino directo entre la entrada y las salidas, sino que se generan cavidades o pulmones, donde el fluido circula antes de abandonar el dominio.

En la Fig.(10(b)) exponemos el contorno del frente de extracción de elementos para el paso número 60 de esta secuencia de optimización. Donde vemos que poco a poco el diseño va tomando una forma asimilable a la de un múltiple estándar. Debemos señalar que la discontinuidad de este contorno se debe a la naturaleza digital del campo escalar que representa la evolución del dominio [0:1]. Por lo tanto, para obtener un dominio suave, asociamos dicho campo escalar con una función de Level-Set, ver [Ruspini \(2007\)](#), y definimos el contorno del componente como la superficie de nivel 0.5 de dicha función. La forma que utilizamos para imponer suavidad al contorno, resulta de evolucionar la función de Level-Set en un sistema Laplaciano (difusivo). De este modo las discontinuidades desaparecen y el contorno resulta suave, como se puede ver en los gráficos correspondientes.

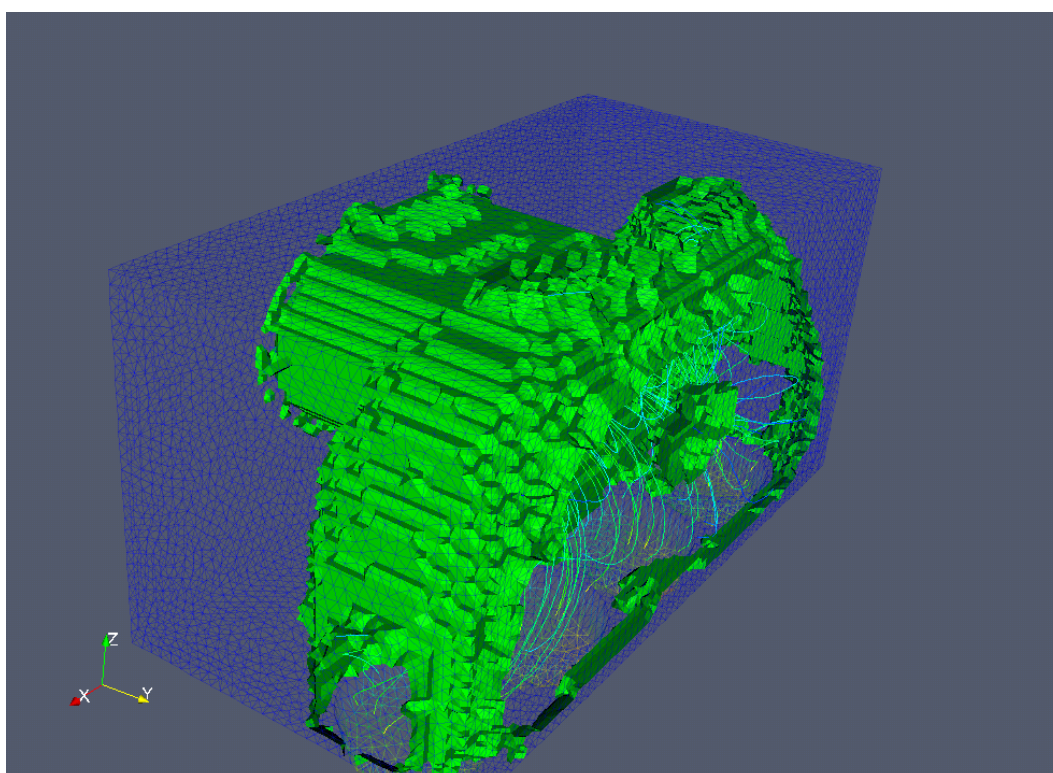
Claramente el posible diseño final presentado en las Figs. (11(a)) - (12) habla por sí mismo de las virtudes del método de optimización en conjunto. Y si bien se podría realizar un análisis profundo acerca de las causas de la morfología final, creemos que el objetivo de la implementación de estos métodos en un ejemplo tridimensional de aplicación real quedan más que satisfechos.

6. CONCLUSIONES

En primer lugar queremos destacar, como principal aporte de este trabajo, el desarrollo de las herramientas computacionales necesarias para la implementación del método de la *derivada topológica* a las ecuaciones de Stokes y Navier-Stokes en dominios bidimensionales y tridimensionales. En las cuales implementamos como *funciones costo* la diferencia respecto a un campo de velocidad de referencia, impuesto por el diseñador, y la energía interna del sistema

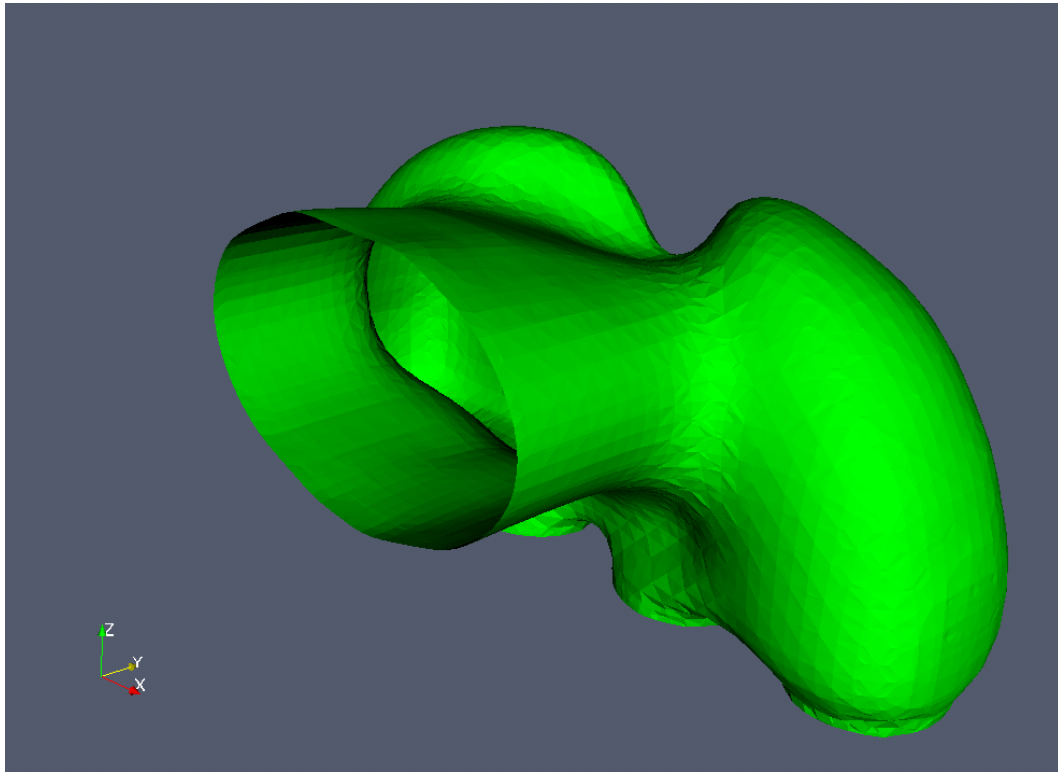


(a) Paso 10, 6 %

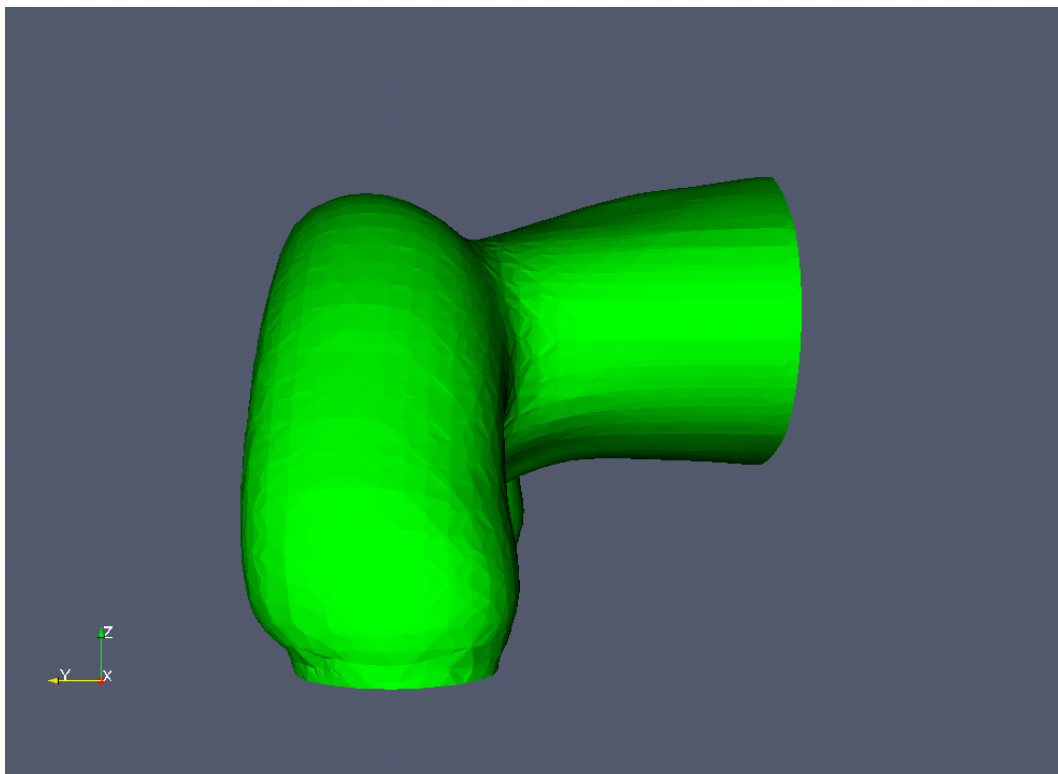


(b) Paso 60, 40 %. Contorno.

Figura 10: Secuencia de optimización del múltiple de admisión por el método de extracción *elemental por supremo*. $Re \approx 200$.



(a) Vista panorámica



(b) Vista lateral

Figura 11: Vistas de otro posible diseño final. Paso 80 (52 %). Múltiple de admisión, $Re \approx 200$.

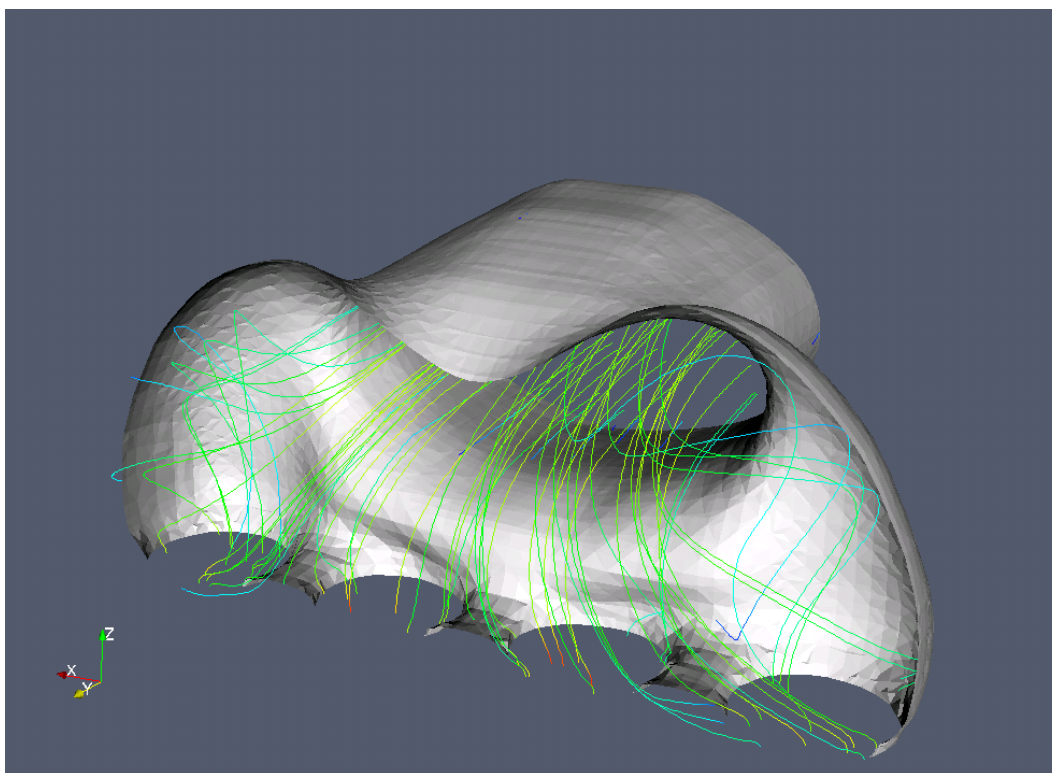


Figura 12: Vista posterior del corte para un posible diseño final, paso 80 (52 %), mostrando las líneas de corriente. Múltiple de admisión $Re \approx 200$.

fluidodinámico, es decir, la energía que se pierde por disipación en el sistema. Verificando en todos los casos mediante ejemplos sencillos el correcto desempeño del método.

En cuanto a la implementación de estas herramientas, y del método en general, existen muchos aspectos a los que se debe prestar especial atención. El primero de ellos sin dudas corresponde al tamaño de los elementos a extraer, ya que la teoría desarrollada supone una perturbación infinitesimal al dominio. Por lo que al extraer un elemento de tamaño finito el nuevo sistema difiere de aquel supuesto en la teoría, decreciendo el error a medida que el tamaño de los elementos disminuye.

Otro parámetro fundamental es la cantidad de elementos a extraer por paso. Aquí es importante identificar el tipo de comportamiento que caracteriza la transformación. Estos son: el cambio de topología, donde, al extraer un elemento, se produce un cambio abrupto en el comportamiento del sistema; y el cambio de forma, en el que el comportamiento del sistema se modifica continuamente al extraer un elemento. Diremos entonces que resulta conveniente extraer más de un elemento sólo para casos de cambio de forma, ya que la continuidad de la modificación del sistema nos permite suponer que al crear un hueco la solución de la derivada topológica sólo se modifica localmente y que una nueva solución resultaría similar a la ya calculada.

Como mostramos en varios de los ejemplos, otra importante característica que modifica totalmente el comportamiento de la optimización, es la forma de extracción de elementos o creación de huecos. Siendo los métodos que utilizan como tamaño de extracción un solo elemento, los más flexibles y con mejores prestaciones en todos los sentidos. Luego, de entre estos, desta-

camos el buen comportamiento del método al que llamamos como método de extracción *elemental por supremo*, introducido en este trabajo. Siendo sus principales ventajas la robustez frente a perturbaciones y errores numéricos en la solución de la derivada topológica, la suavidad de los dominios obtenidos y el buen comportamiento en dominios de elementos de tamaño no despreciable como sucede con los casos tridimensionales.

Entonces, para la aplicación de estas herramientas, debe llegarse a una solución de compromiso entre el tamaño de los elementos de la malla, la cantidad de elementos a extraer y el tiempo de procesamiento del diseño completo. Y será en este ajuste donde, como sucede con cualquier herramienta, entran en juego las habilidades de cada diseñador.

REFERENCIAS

- Amstutz S. *Aspects théoriques et numériques en optimisation de forme topologique*. Ph.D. thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, France, 2003.
- Céa J., Garreau S., Guillaume P., and Masmoudi M. The shape and topological optimizations connection. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, 188:713–726, 2000.
- Codina R. A stabilized finite element method for generalizad stationary incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:2681–2706, 2001.
- Garreu S., Guillaume P., and Masmoudi M. The topological asymptotic for pde systems. the elasticity case. *SIAM Journal on control and optimization*, 39:1756–1778, 1998a.
- Garreu S., Guillaume P., and Masmoudi M. The topological gradient. *Relatório de Pesquisa, UFR MIG, Université Paul Sabatier, Toulouse, Francia*, 1998b.
- Girault V. and Raviart P.A. *The Finite Element Method for Navier Stokes Equations*. Springer-Verlag, 1986.
- Guillaume P. and Iris S. Topological sensivity and shape optimization for the stokes equations. *SIAM J. Control Optim.*, 43:1–31, 2004.
- Mader P. *Optimisation topologique pour la conception de composants guidés*. Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, França, 2002.
- Novotny A. *Adaptividade h na Optimização Topológica e Projeto Ótimo de Mahlas hp Adaptativas*, *Disertação de Mestrado*. Master's thesis, GRANTE-EMC-UFSC, Florianópolis, Brasil, 1998.
- Pommier J. *L'asymptotique topologique en électromagnétisme*. Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, França, 2002.
- Ruspini L. *Estudio comparativo de esquemas de volúmenes finitos para el seguimiento de interfaces mediante el método de Level-Set*. Instituto Balseiro, 2007.
- Ruspini L. *Optimización de componentes fluido-dinámicos utilizando el método de la derivada topológica*. Master's thesis, Instituto Balseiro, 2008.
- White F.M. *Mecánica de Fluidos*. McGRAW-HILL, 1979.