

CALIFICACIÓN Y SATURACIÓN DE MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN: RESULTADOS RECÍPROCOS Y APLICACIONES A PROBLEMAS DE RESTAURACIÓN DE IMÁGENES

Gisela L. Mazzieri^a, Rubén D. Spies^{a,b} and Karina G. Temperini^{a,c}

^a*Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, IMAL, CONICET-UNL, Güemes 3450, S3000GLN, Santa Fe, Argentina, imal@ceride.gov.ar, <http://www.imal.santafe-conicet.gov.ar/>*

^b*Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, <http://www.fiq.unl.edu.ar/depto-mate>*

^c*Departamento de Matemática, Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, <http://www.fhuc.unl.edu.ar/>*

Palabras Clave. Problema inverso, mal condicionamiento, método de regularización, calificación, saturación.

Resumen.

En este trabajo se presentan algunos resultados recíprocos derivados de la teoría de saturación de métodos de regularización para problemas inversos mal condicionados como así también varios resultados numéricos que permiten visualizar los conceptos de calificación fuerte y óptima en problemas inversos asociados a la restauración de imágenes degradadas.

1 INTRODUCCIÓN

En 1994 A. Neubauer ([Neubauer \(1994\)](#)) demostró que ciertos métodos de regularización espectrales para problemas inversos mal condicionados “saturan”, es decir, a partir del conocimiento de un cierto grado de regularidad sobre la solución exacta del problema, son incapaces de continuar extrayendo información sobre la misma, independientemente de las hipótesis adicionales que se conozcan o se impongan. Neubauer introdujo entonces por primera vez la idea del concepto de “saturación” para métodos de regularización. En esencia esta idea refiere al mejor orden de convergencia del error total que un método puede alcanzar independientemente de los supuestos de regularidad sobre la solución exacta y de la selección de la regla de elección de parámetros. En 2007 Spies y Temperini ([Spies and Temperini \(2008\)](#)) desarrollaron una teoría general de saturación global para métodos de regularización arbitrarios, dentro de la cual fue posible definir adecuadamente el concepto de saturación de un método de regularización formalizando la idea original e intuitiva del mismo como la máxima eficiencia que puede alcanzar dicho método, cualquiera sea la información de la que se disponga sobre la solución del problema. Relacionado de una manera dual al concepto de saturación está el concepto de calificación de un método de regularización. Inicialmente introducido por Mathé y Pereverzev en el año 2003 ([Mathé and Pereverzev \(2003\)](#)), este concepto está fuertemente asociado al orden de convergencia óptimo del error de regularización bajo ciertos supuestos “a-priori” acerca de la solución exacta. En 2008, Herdman et al. ([Herdman et al. \(2008\)](#)) generalizaron el concepto de calificación e introdujeron tres niveles jerárquicos de este concepto: débil, fuerte y óptimo. En este trabajo se presentan algunos resultados recíprocos derivados de la teoría de saturación de métodos de regularización para problemas inversos mal condicionados como así también varios resultados numéricos que permiten visualizar los conceptos de calificación fuerte y óptima en problemas inversos asociados a la restauración de imágenes degradadas.

2 PRELIMINARES

Recordamos en primer lugar el concepto de calificación clásica para métodos de regularización espectral (ver [Engl et al. \(1996\)](#)).

Definición 2.1. Sea $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ una familia paramétrica de funciones $g_\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ para $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Diremos que $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ es un “método de regularización espectral” (MRE), si satisface las siguientes hipótesis:

(H1) Para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $g_\alpha(\lambda)$ es continua por tramos para $\lambda \in [0, +\infty)$ y continua por derecha en los puntos de discontinuidad.

(H2) Existe una constante $C > 0$ (independiente de α) tal que $|\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq C$ para todo $\lambda \in [0, +\infty)$, para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$.

(H3) Para todo $\lambda \in (0, +\infty)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Si $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ es un MRE, entonces la familia de operadores $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$, donde $R_\alpha \doteq \int_0^{\|T\|^2} g_\alpha(\lambda) dE_\lambda T^* = g_\alpha(T^*T)T^*$, con $\{E_\lambda\}$ la familia espectral asociada al operador T^*T es una familia de operadores de regularización (en el sentido de la Definición 3.1 de [Engl et al. \(1996\)](#)) del problema $Tx = y$.

Definición 2.2. Sea $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ un MRE y $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$. Denotemos con $\mathcal{I}(g_\alpha)$ al conjunto

$$\mathcal{I}(g_\alpha) \doteq \{\mu \geq 0 : \forall \lambda \in [0, +\infty), \exists k > 0 \text{ tal que } \lambda^\mu |r_\alpha(\lambda)| \leq k \alpha^\mu, \forall \alpha \in (0, \alpha_0)\}$$

y sea $\mu_0 \doteq \sup_{\mu \in \mathcal{I}(g_\alpha)} \mu$. Si $0 < \mu_0 < +\infty$, se dice que $\{g_\alpha\}$ posee “calificación clásica de orden μ_0 ”.

El concepto de calificación clásica fue posteriormente generalizado por Mathé y Pereverzev.

Definición 2.3. (Mathé and Pereverzev (2003), Mathé (2004)) Sean $a > 0$ y $\rho : (0, a] \rightarrow (0, \infty)$ una función creciente. Se dice que el MRE $\{g_\alpha\}$ posee calificación ρ si existe una constante $\gamma \in (0, \infty)$ tal que

$$\sup_{\lambda \in (0, a]} |r_\alpha(\lambda)| \rho(\lambda) \leq \gamma \rho(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, a]. \tag{1}$$

Si además, para cada $\lambda \in (0, \|T\|^2]$ existe una constante $c \doteq c(\lambda) > 0$ tal que

$$\inf_{\alpha \in (0, a]} \frac{|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq c, \tag{2}$$

se dice que ρ es calificación máxima de $\{g_\alpha\}$.

No obstante estas definiciones de calificación, un análisis cuidadoso de este concepto permite observar que existe una cierta relación de dualidad entre el orden de convergencia del error de regularización de un método y el conjunto sobre el cual se alcanza dicho orden, en el sentido que cuanto más fuerte sea el orden de convergencia más reducido será el conjunto de puntos sobre el cual el método alcanza dicho orden, y viceversa. Recientemente (Herdman et al. (2008)) el concepto de calificación fue extendido con el objeto de capturar esta relación de dualidad y se introdujeron tres niveles del mismo: débil, fuerte y óptimo. Para introducir las definiciones correspondientes denotemos con \mathcal{O} al conjunto de las funciones $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ no decrecientes tales que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) = 0$, y con \mathcal{S} al conjunto de las funciones $s : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ continuas con $s(0) = 0$ y tales que $s(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$.

Definición 2.4. Sean $\{g_\alpha\}$ un MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$, $\rho \in \mathcal{O}$ y $s \in \mathcal{S}$.

i) Decimos que (s, ρ) es un “par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ ” si satisface

$$\frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = O(1) \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0^+, \forall \lambda > 0. \tag{3}$$

ii) Decimos que (s, ρ) es un “par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ ” si es un par débil fuente-orden y no existe $\lambda > 0$ para el cual en (3), $O(1)$ pueda reemplazarse por $o(1)$. Es decir, si vale (3) y además

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} > 0 \quad \forall \lambda > 0. \tag{4}$$

iii) Decimos que (ρ, s) es un “par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$ ” si existen una constante $\gamma > 0$ y una función $h : (0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} h(\alpha) = 0$, tales que

$$\frac{s(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq \gamma \quad \forall \lambda \in [h(\alpha), +\infty). \tag{5}$$

Las definiciones precedentes nos permiten entonces introducir el concepto de calificación generalizada y sus tres niveles jerárquicos.

Definición 2.5. Sea $\{g_\alpha\}$ un MRE.

i) Decimos que ρ es “calificación generalizada o débil de $\{g_\alpha\}$ ” si existe una función s tal que (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.

ii) Decimos que ρ es “calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$ ” si existe una función s tal que (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.

iii) Decimos que ρ es “calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ ” si existe una función s tal que (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ (es suficiente con que (s, ρ) sea un par débil fuente-orden) y (ρ, s) es un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$.

Presentamos a continuación tres ejemplos que ilustran algunos de los distintos niveles de calificación introducidos previamente.

Ejemplo 1. El método de regularización de Tikhonov-Phillips $\{g_\alpha\}$ donde $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \alpha}$ tiene calificación clásica de orden $\mu_0 = 1$ (Engl et al. (1996)). Se puede ver que $\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima en el sentido de la Definición 2.5 iii) (Herdman et al. (2008)).

Ejemplo 2. Para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ con $\alpha_0 < e^{-1}$, definimos

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1 + (\ln \alpha)^{-1}}{\lambda - (\ln \alpha)^{-1}}, \quad \text{para todo } \lambda \in [0, +\infty).$$

Claramente, $\{g_\alpha\}$ satisface las hipótesis (H1)-(H3) y por lo tanto es un MRE. Como $r_\alpha(\lambda) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda \ln \alpha}$ para todo $\lambda \in [0, +\infty)$, resulta que para todo $\mu > 0$,

$$\frac{|r_\alpha(\lambda)| \lambda^\mu}{\alpha^\mu} = \frac{(1+\lambda)\lambda^\mu}{\alpha^\mu - \lambda \alpha^\mu \ln \alpha} \rightarrow +\infty \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0^+ \text{ para todo } \lambda \in [0, +\infty).$$

Luego, $\mu_0 = 0$ y por lo tanto $\{g_\alpha\}$ no posee calificación clásica. Sin embargo, se puede ver que $\rho(\alpha) = -(\ln \alpha)^{-1}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ (Herdman et al. (2008)).

Ejemplo 3. Para $\alpha, \lambda > 0$ definimos $g_\alpha(\lambda)$ mediante

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \lambda^{-1}(1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}) - e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\lambda^{-3/2}} \left| \text{sen}(\lambda^{3/2}/\alpha) \right|,$$

de modo que

$$r_\alpha(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\lambda^{-1/2}} \left| \text{sen}(\lambda^{3/2}/\alpha) \right|.$$

Se verifica inmediatamente que $\{g_\alpha\}$ es un MRE y que no posee calificación clásica ($\mu_0 = +\infty$). No obstante, se puede probar que $\rho(\alpha) \doteq e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ es calificación fuerte del método y no es calificación óptima (Herdman et al. (2008)).

Otro concepto muy importante, aunque muy sutil, asociado a un método de regularización, es el de “saturación”. La propiedad que tienen ciertos métodos de regularización (como por ejemplo el clásico método de Tikhonov-Phillips) de “saturar”, fue señalada por primera vez por Neubauer en 1994 (Neubauer (1994)). Desde un punto de vista puramente intuitivo, la saturación de un método de regularización está asociada al mejor orden de convergencia del error total que dicho método puede alcanzar independientemente de los supuestos de regularidad sobre la solución exacta, y de la selección de la regla de elección de parámetros. Si bien resulta bastante simple entender cuándo un método de regularización “satura”, sólo muy recientemente este concepto ha podido formalizarse de manera matemáticamente rigurosa (ver Spies and Temperini (2008)). Con el objeto de introducir brevemente esta formalización procedemos a definir a continuación el error total de un método de regularización y la noción de cota superior de convergencia.

Definición 2.6. Sean X, Y espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ una familia de operadores de regularización para el problema $Tx = y$. Definimos el “error total de $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ en $x \in X$ para un nivel de ruido δ ” como

$$\mathcal{E}_{\{R_\alpha\}}^{tot}(x, \delta) \doteq \inf_{\alpha \in (0, \alpha_0)} \sup_{y^\delta \in B_\delta(Tx)} \|R_\alpha y^\delta - x\|,$$

donde $\overline{B_\delta(Tx)} \doteq \{y \in Y : \|Tx - y\| \leq \delta\}$.

Definición 2.7. Sea $M \subset X$. Decimos que $\psi : M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una “cota superior de convergencia para el error total de $\{R_\alpha\}$ en M ” si para todo $x \in M$ se tiene que $\mathcal{E}_{\{R_\alpha\}}^{tot} = O(\psi(x, \delta))$ cuando $\delta \rightarrow 0^+$. Denotaremos con $\mathcal{U}_M(\mathcal{E}_{\{R_\alpha\}}^{tot})$ al conjunto de todas estas cotas superiores de convergencia.

Procedemos ahora a formalizar el concepto de saturación global.

Definición 2.8. Sean $M_S \subset X$ y $\psi_S \in \mathcal{U}_{M_S}(\mathcal{E}_{\{R_\alpha\}}^{tot})$. Decimos que ψ_S es “función de saturación global de $\{R_\alpha\}$ sobre M_S ” si ψ_S satisface las siguientes tres condiciones:

(S1) Para todo $x^* \in X, x^* \neq 0, x \in M_S, \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{E}_{\{R_\alpha\}}^{tot}(x^*, \delta)}{\psi_S(x, \delta)} > 0$.

(S2) ψ_S es invariante sobre M_S (esto es, en dos puntos cualesquiera de M, ψ es equivalente como función de δ).

(S3) No existe ninguna cota superior de convergencia para el error total de $\{R_\alpha\}$ que sea extensión propia de ψ_S (en la variable x) y satisfaga (S1) y (S2), es decir, no existen $\tilde{M} \supsetneq M_S$ y $\tilde{\psi} \in \mathcal{U}_{\tilde{M}}(\mathcal{E}_{\{R_\alpha\}}^{tot})$ tales que $\tilde{\psi}$ satisfaga (S1) y (S2) con $M_S = \tilde{M}$ y $\psi_S = \tilde{\psi}$.

3 RESULTADOS PRINCIPALES

A continuación enunciaremos algunos resultados sobre la existencia de saturación y resultados recíprocos para métodos de regularización espectrales con calificación clásica y métodos que poseen calificación máxima. Por razones de brevedad no daremos aquí mayores detalles. Las demostraciones completas de todos estos resultados, como así también de otros relacionados con los conceptos de calificación y saturación pueden consultarse en [Spies and Temperini \(2008\)](#).

Definición 3.1. Sea $\rho : (0, a] \rightarrow (0, +\infty)$ una función continua no decreciente tal que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho(t) = 0$ y $\beta \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$. Se dice que ρ es localmente de tipo superior β si existe una constante positiva d tal que $\rho(t) \leq ds^{-\beta} \rho(st)$ para todo $s \in (0, 1]$.

Teorema 3.2. Sean X, Y espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(X, Y), \{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ un MRE y $\rho : (0, \|T\|^2] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua estrictamente creciente, localmente de tipo superior β para algún $\beta > 0$, tal que ρ es calificación máxima de $\{R_\alpha\}$ y existen constantes positivas a y k tales que $\frac{\rho(\lambda) |r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq a$ para todos α y λ tales que $0 < k\alpha \leq \lambda \leq \|T\|^2$. Si para algún $x \in X, \|R_\alpha Tx - x\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$, entonces $x \in \text{Ran}(\rho(T^*T))$.

Teorema 3.3. Sea $\Theta(t) \doteq \sqrt{t} \rho(t)$ para $t \in (0, \|T\|^2]$. Bajo las mismas hipótesis del Teorema 3.2, si para algún $x \in X$ se tiene que

$$\sup_{y^\delta \in B_\delta(Tx)} \inf_{\alpha \in (0, \alpha_0)} \|R_\alpha y^\delta - x\| = O(\rho(\Theta^{-1}(\delta))) \quad \text{cuando } \delta \rightarrow 0^+, \tag{6}$$

entonces $x \in \text{Ran}(\rho(T^*T))$.

Teorema 3.4. (Saturación para métodos de regularización espectrales con calificación clásica) Sean X, Y espacios de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\text{Ran}(T)$ no es cerrado, $\{g_\alpha\}$ un MRE tal que $\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(\frac{1}{\sqrt{\alpha}})$ para $\alpha \rightarrow 0^+$. Sea $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$ y supongamos además que:

- i) Existen constantes positivas $\lambda_1 \leq \|T\|^2$, γ_1, γ_2 y $c_1 > 1$ tales que
 - a) $0 \leq r_\alpha(\lambda) \leq 1$, $\alpha > 0$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$;
 - b) $r_\alpha(\lambda) \geq \gamma_1$, $0 \leq \lambda < \alpha \leq \lambda_1$;
 - c) $|r_\alpha(\lambda)|$ es monótona creciente con respecto a α para $\lambda \in (0, \|T\|^2]$;
 - d) $g_\alpha(c_1\alpha) \geq \frac{\gamma_2}{\alpha}$, $0 < c_1\alpha \leq \lambda_1$;
 - e) $g_\alpha(\lambda) \geq g_\alpha(\tilde{\lambda})$, para $0 < \alpha \leq \lambda \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_1$; y
- ii) $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$, donde $\alpha_0 \doteq \min\{\lambda_1, \frac{\lambda_1}{c}\}$, posee calificación clásica de orden μ_0 .
- iii) Existen constantes $\gamma, c > 0$ tales que

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\mu_0} |r_\alpha(\lambda)| \geq \gamma, \quad \text{para todo } 0 < c\alpha \leq \lambda \leq \|T\|^2, \quad (7)$$

Entonces $\psi_{\mu_0}(x, \delta) \doteq \delta^{\frac{2\mu_0}{2\mu_0+1}}$ para $x \in X_{\mu_0} \doteq \text{Ran}((T^*T)^{\mu_0}) \setminus \{0\}$ y $\delta > 0$, es función de saturación de $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ sobre X_{μ_0} .

Teorema 3.5. (Saturación para métodos de regularización espectrales con calificación máxima) Sean X, Y espacios de Hilbert, $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal y compacto, $\{g_\alpha\}$ un MRE que $\|g_\alpha(\cdot)\|_\infty = O(\frac{1}{\sqrt{\alpha}})$ para $\alpha \rightarrow 0^+$. Supongamos que se satisfacen además las siguientes hipótesis:

- i) Existen $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty \subset \sigma_p(TT^*)$ y $c \geq 1$ tales que $\tilde{\lambda}_k \downarrow 0$ y $\frac{\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_{k+1}} \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$;
- ii) Existen constantes positivas $\lambda_1 \leq \|T\|^2$, γ_1, γ_2 y $c_1 > 1$ tales que
 - a) $0 \leq r_\alpha(\lambda) \leq 1$, $\alpha > 0$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$;
 - b) $r_\alpha(\lambda) \geq \gamma_1$, $0 \leq \lambda < \alpha \leq \lambda_1$;
 - c) $|r_\alpha(\lambda)|$ es monótona creciente con respecto a α para $\lambda \in (0, \|T\|^2]$;
 - d) $g_\alpha(c_1\alpha) \geq \frac{\gamma_2}{\alpha}$, $0 < c_1\alpha \leq \lambda_1$ y
 - e) $g_\alpha(\lambda) \geq g_\alpha(\tilde{\lambda})$, para $0 < \alpha \leq \lambda \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_1$.
- iii) Existe $\rho : (0, \|T\|^2] \rightarrow (0, +\infty)$, estrictamente creciente y de tipo superior β , para algún $\beta \geq 0$, tal que
 - a) existen constantes positivas a y k tales que $\frac{\rho(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq a$, para todos α, λ tales que $0 < k\alpha \leq \lambda \leq \|T\|^2$.
 - b) el MRE $\{g_\alpha\}$ posee calificación máxima ρ .
- iv) Existe una constante $b > 0$ tal que

$$\sup_{\lambda \in (0, \|T\|^2]} \sqrt{\lambda} |g_\alpha(\lambda)| \geq \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{para todo } \alpha \in (0, \alpha_0).$$

- v) Para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ la función $\lambda \rightarrow |r_\alpha(\lambda)|^2$, $\lambda \in (0, \|T\|^2]$ es convexa.
- Sea $\Theta(t) \doteq \sqrt{t}\rho(t)$ para $t \in (0, \|T\|^2]$. Entonces $\psi(x, \delta) \doteq (\rho \circ \Theta^{-1})(\delta)$ para $x \in X^\rho \doteq \text{Ran}(\rho(T^*T)) \setminus \{0\}$ y $\delta \in (0, \Theta(\alpha_0))$, es función de saturación de $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ sobre X^ρ .

4 APLICACIONES A RESTAURACIÓN DE IMÁGENES

Un modelo matemático muy general para el proceso de degradación (“blurring”) de imágenes está dado por la siguiente ecuación integral de Fredholm de primera clase

$$\int_0^1 \int_0^1 k(x, y, x', y') f(x', y') dx' dy' = g(x, y), \quad (8)$$

donde f y g son las imágenes bidimensionales continuas, original y degradada, respectivamente y el núcleo k es la función de dispersión puntual (“point spread function”), a la que nos referiremos como PSF por su sigla en inglés (Lagendijk and Biemond (1991)). Así, el problema inverso de restauración (“deblurring”) consiste en resolver la ecuación integral (8), es decir, en obtener una aproximación de la imagen original f con tanta precisión como sea posible a partir de una imagen borrosa g y de un proceso de degradación (“blurring”) dado por la PSF k . De las propiedades del núcleo k (el cual en general “suaviza”) se puede deducir que el operador integral asociado a la ecuación (8) es compacto y que este problema inverso es mal condicionado.

Consideraremos el caso en que el núcleo k es “separable” y de tipo convolución, es decir,

$$k(x, y, x', y') = \kappa(x - x')\omega(y - y'),$$

donde κ y ω son funciones reales. Esto significa que todo punto de la imagen tiene la misma degradación y que esta puede “separarse” en sus componentes puramente vertical y puramente horizontal. Hay muchas situaciones en las cuales un sistema de captación de imágenes puede favorecer la degradación de la calidad de las imágenes adquiridas. En general, estas situaciones son el resultado de sistemas de enfoque defectuosos, fuentes externas o internas de perturbación en el sistema de captación y degradaciones introducidas por el mismo medio de captación (Abad Ortega (2003)). A continuación introducimos algunos de los tipos de degradación (“blurring”) más usuales con sus correspondientes PSF asociadas (Lagendijk and Biemond (1991)).

(i) *Degradación de movimiento*: surge cuando la cámara se mueve mientras la imagen es captada o cuando se mueve el objeto mientras la cámara está fija. Si el tiempo en que transcurre el movimiento es pequeño, se puede considerar que este es lineal. Cuando el movimiento es horizontal, entonces la PSF correspondiente tiene la forma

$$k(x, y, x', y') = h_L(x - x') = \begin{cases} (2L)^{-1}, & \text{si } |x - x'| \leq L, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (9)$$

donde L es un parámetro denominado longitud del movimiento que cuantifica la degradación de la imagen. Similarmente, si el movimiento es vertical entonces la PSF está dada por

$$k(x, y, x', y') = h_L(y - y') = \begin{cases} (2L)^{-1}, & \text{si } |y - y'| \leq L, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde L tiene el mismo rol que antes.

(ii) *Degradación por desenfoque uniforme o de tipo fuera de foco*: surge, obviamente, cuando la lente de la cámara está fuera de foco. Si la apertura de la cámara es circular, la imagen correspondiente a cualquier fuente puntual será un pequeño disco denominado “círculo de confusión”. En este caso, un buen modelo de la PSF es el siguiente

$$k(x, y, x', y') = \begin{cases} (\pi R^2)^{-1}, & \text{si } \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \leq R, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde el parámetro R es el radio del círculo de confusión. Sin embargo, esta función no es separable en las variables $x - x'$ y $y - y'$. Por lo tanto, usaremos una PSF alternativa cuyas variables son separables,

$$k(x, y, x', y') = h_R(x - x')h_R(y - y'),$$

donde h_R se define como en (9) con R en lugar de L .

(iii) *Degradación de tipo turbulencia atmosférica*: surge, por ejemplo, en astronomía debido al cambio en las condiciones de refracción de la atmósfera terrestre. Por razones prácticas, en este caso se puede considerar una PSF Gaussiana

$$\begin{aligned} k(x, y, x', y') &= \frac{1}{2\pi\sigma_h\sigma_v} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{\sigma_h}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y-y'}{\sigma_v}\right)^2\right) \\ &= \eta_{\sigma_h}(x-x')\eta_{\sigma_v}(y-y'), \end{aligned}$$

donde la función η_σ está dada por

$$\eta_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2\right)$$

para $\sigma = \sigma_h, \sigma_v$. Las desviaciones estandar σ_h y σ_v caracterizan la degradación en la dirección horizontal y vertical, respectivamente.

La discretización de cada una de estas PSF tiene forma de un producto de Kronecker $A_h \otimes A_v$, donde A_h y A_v son las correspondientes discretizaciones de las funciones reales en las que se separa el núcleo de convolución k . Por otra parte, una imagen digital en escala de grises está asociada a una matriz I de orden $m \times n$ cuyas entradas (no negativas) representan la intensidad de un pixel. Luego, al discretizar (8) el problema inverso se puede plantear como

$$KI = (A_h \otimes A_v)I = I_b, \quad (10)$$

donde I_b es la imagen degradada, es decir, el dato del problema inverso.

Notemos aquí que si la matriz I que representa una imagen es de orden $n \times n$, entonces $A_h \otimes A_v$ (ver (10)) tiene dimensión $n^2 \times n^2$, con lo cual la resolución numérica del problema inverso puede ser muy costosa. Por esta razón conviene usar propiedades del producto de Kronecker para reducir el esfuerzo computacional.

A continuación presentaremos algunos resultados numéricos sobre los conceptos de calificación fuerte y óptima aplicados al problema de restauración de imágenes. En la Figura 1 se muestran tres imágenes en colores, a las que denominaremos “luna”, “mar” y “arco iris”. Por simplicidad y conveniencia computacional trabajaremos sólo con imágenes en escala de grises. Por ello, nos referiremos a las versiones en escala de grises de estas imágenes (Figura 2) como “imágenes originales”. En la Figura 3 se muestran las imágenes degradadas por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$.



Figura 1. Imágenes: luna (512×512 píxeles) (izq.), mar (128×128 píxeles) (centro) y arco iris (64×64 píxeles) (der.).

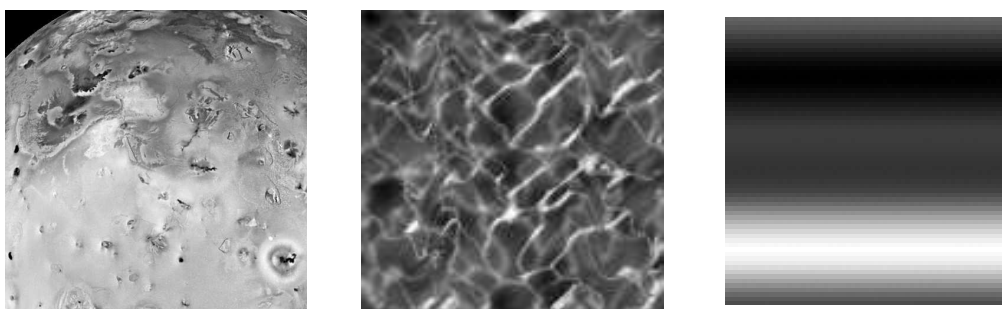


Figura 2. Imágenes: luna (izq.), mar (centro) y arco iris (der.) en escala de grises.

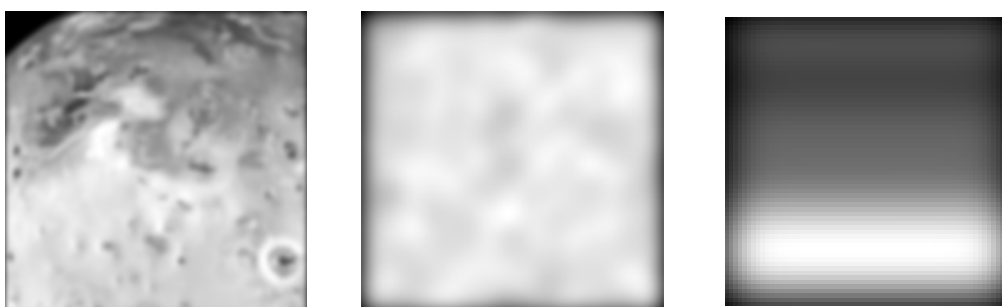


Figura 3. Imágenes degradadas por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$.

Con el objetivo de reconstruir las imágenes degradadas por turbulencia atmosférica con $\sigma_h = 5$ y $\sigma_v = 5$ dadas en la Figura 3, a las que nos referiremos a partir de ahora como “imágenes degradadas”, resolveremos el problema mediante la aplicación de algunos métodos de regularización espectral. Para implementar estos métodos utilizando productos de Kronecker nos basamos en [Hansen \(2002\)](#).

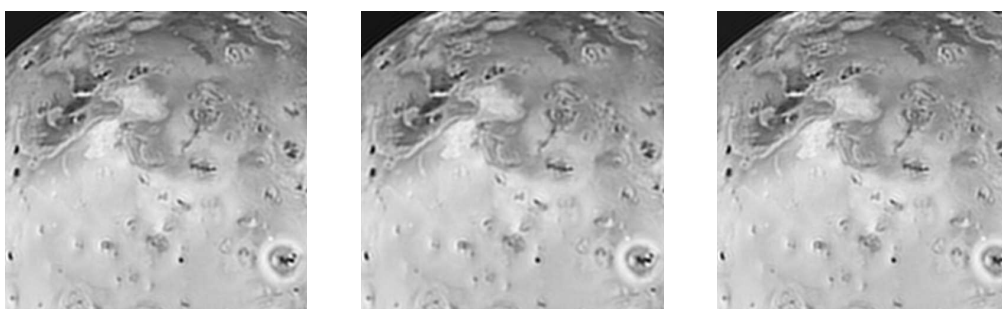


Figura 4. Soluciones regularizadas con los métodos de Tikhonov-Phillips (izq.), del Ejemplo 2 (centro) y del Ejemplo 3 (der.) con $\alpha = 0.1$.

En las Figuras 4-6 se muestran las soluciones regularizadas de cada una de las tres imágenes degradadas usando los métodos espectrales de los Ejemplos 1 (método de Tikhonov-Phillips), 2 y 3 de la Sección 2, respectivamente. Para la imagen “luna” se utilizó el parámetro de regularización $\alpha = 0.1$ para los tres métodos, mientras que para la imagen “mar” se usó $\alpha = 0.00005$ y para la imagen “arco iris”, $\alpha = 0.02$.

Con el objetivo de analizar el orden de convergencia del error de regularización, se reconstruyeron, como se hizo anteriormente, las tres imágenes degradadas aplicando el método de Tikhonov-Phillips y los métodos de los Ejemplos 2 y 3, utilizando distintos valores del parámetro de regularización α . La razón de haber elegido estos tres métodos quedará clara en el siguiente análisis.

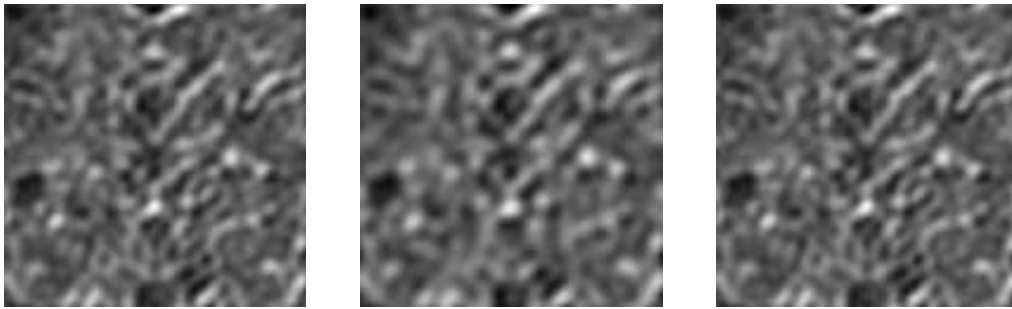


Figura 5. Soluciones regularizadas con los métodos de Tikhonov-Phillips (izq.), del Ejemplo 2 (centro) y del Ejemplo 3 (der.) con $\alpha = 0.00005$.

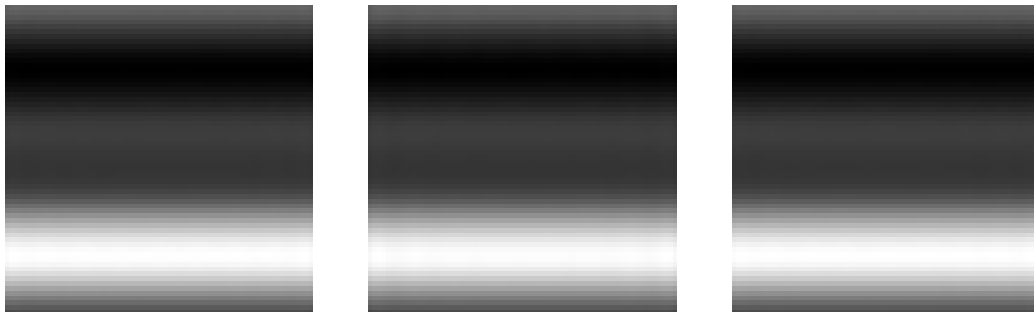


Figura 6. Soluciones regularizadas con los métodos de Tikhonov-Phillips (izq.), del Ejemplo 2 (centro) y del Ejemplo 3 (der.) con $\alpha = 0.02$.

Como vimos en el Ejemplo 1, el método de Tikhonov-Phillips posee calificación clásica de orden $\mu_0 = 1$ y la función $\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima de este método y por lo tanto, fuerte. En la Figura 7 se muestran la calificación óptima $\rho(\alpha)$ y el error de regularización que se obtiene al reconstruir cada una de las tres imágenes degradadas aplicando este método. Como se puede observar, el orden de convergencia del error de regularización cuando $\alpha \rightarrow 0^+$ nunca es mejor que la calificación ρ . Esto es consistente con el hecho que la calificación fuerte está asociada al orden óptimo de convergencia de este error.

Consideremos ahora el método del Ejemplo 2 de la Sección 2, el cual no posee calificación clásica por ser $\mu_0 = 0$. Sin embargo, la función $\rho(\alpha) = -(\ln \alpha)^{-1}$ es calificación óptima. Como puede verse en la Figura 8, los errores de regularización convergen a cero más lentamente que la calificación fuerte ρ . Lo mismo ocurre para el método del Ejemplo 3 de la Sección 2 (ver Figura 9), para el cual $\mu_0 = +\infty$ y en consecuencia el método no posee calificación clásica, aunque la función $\rho(\alpha) = e^{-1/\sqrt{\alpha}}$ es calificación fuerte del método.

Es importante señalar que el error de regularización que se obtiene al reconstruir la imagen degradada arco iris con cualquiera de los tres métodos está muy cercano a la correspondiente calificación fuerte. Esto es así porque la imagen arco iris (es decir, la solución exacta) es muy “suave”. Cuanto mayor regularidad tiene la solución exacta, más rápido converge a cero el error de regularización. Con la imagen de la luna ocurre lo contrario debido a que presenta muchos bordes e irregularidades, que se traducen en componentes significativas en alta frecuencia. Ob-

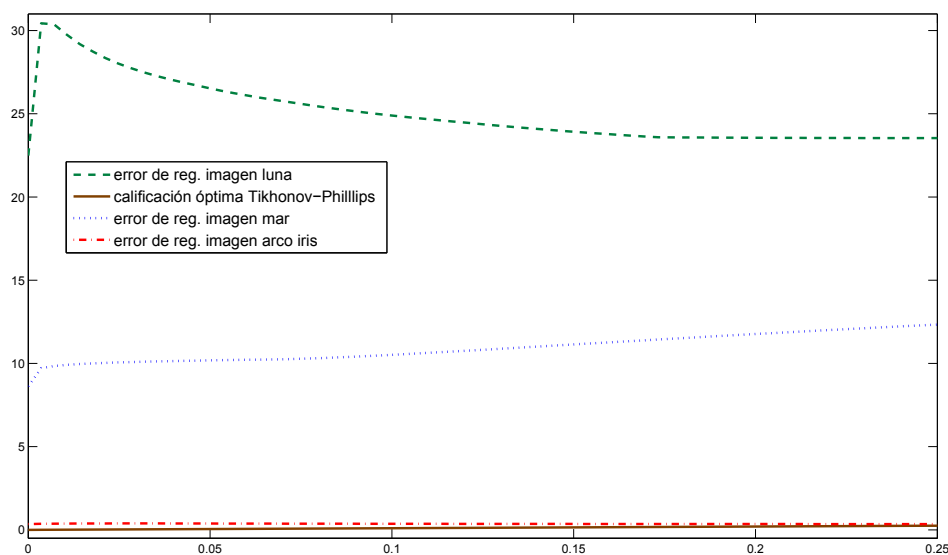


Figura 7. Errores de regularización y calificación óptima del método de Tikhonov-Phillips.

servar además que, para esta figura, el error de regularización crece para valores de α pequeños, a medida que α tiende a 0. Esto es así debido precisamente a la propagación de los errores de discretización en estas componentes de alta frecuencia.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado resultados recíprocos y sobre la existencia de saturación para métodos de regularización espectrales con calificación clásica y métodos que poseen calificación máxima. Además se mostraron ejemplos de métodos de regularización espectrales que no tienen calificación clásica y sí poseen calificación generalizada en alguno de los niveles definidos. Asimismo se presentaron resultados numéricos que permiten visualizar los conceptos de calificación fuerte y óptima en problemas inversos asociados a la restauración de imágenes degradadas. Es oportuno señalar aquí que algunos de los métodos de regularización que fueron concebidos, en principio, por un interés puramente académico con el objeto de mostrar la existencia de métodos que no poseen calificación clásica y sí poseen calificación en alguno de los niveles definidos en este trabajo, produjeron sorprendentes resultados cuando fueron aplicados a algunos problemas concretos.

REFERENCES

- Abad Ortega J. *Restauración y reconstrucción bayesianas de imágenes usando descomposiciones multibanda*. Ph.D. thesis, E.T.S. de Ingeniería Informática, Universidad de Granada, 2003.
- Engl H.W., Hanke M., and Neubauer A. *Regularization of inverse problems*, volume 375 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996. ISBN 0-7923-4157-0.
- Hansen P.C. Deconvolution and regularization with Toeplitz matrices. *Numer. Algorithms*, 29(4):323–378, 2002. ISSN 1017-1398. Regularization with sparse and structured matrices.
- Herdman T., Spies R.D., and Temperini K.G. Generalized qualification and qualification levels for spectral regularization methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*,

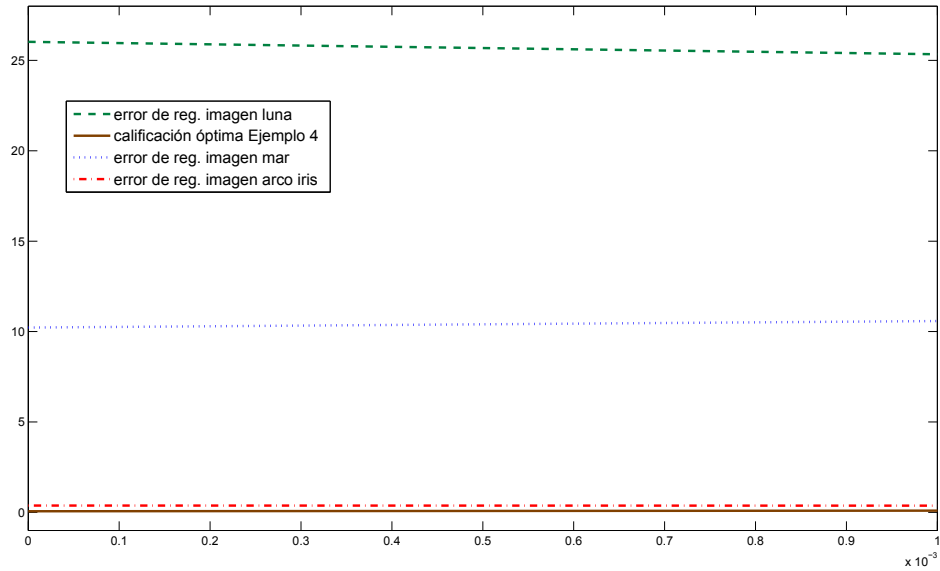


Figura 8. Errores de regularización y calificación óptima del método del Ejemplo 2.

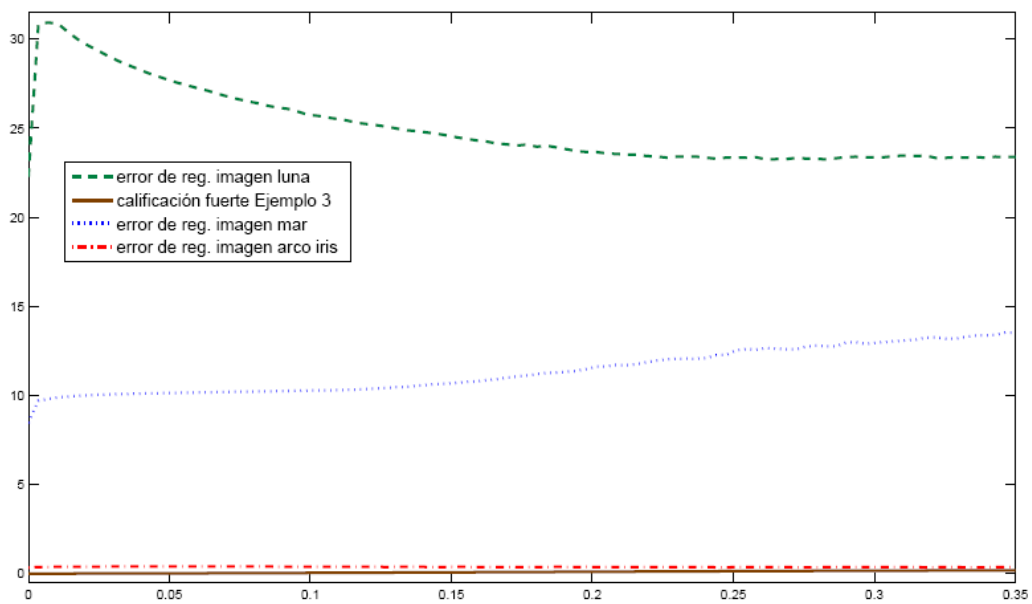


Figura 9. Errores de regularización y calificación fuerte del método del Ejemplo 3.

(aceptado), 2008.

Lagendijk R.L. and Biemond J. *Iterative Identification and Restoration of Images*. Kluwer, Dordrecht, 1991.

Mathé P. Saturation of regularization methods for linear ill-posed problems in Hilbert spaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(3):968–973 (electronic), 2004. ISSN 0036-1429.

Mathé P. and Pereverzev S.V. Geometry of linear ill-posed problems in variable Hilbert scales. *Inverse Problems*, 19(3):789–803, 2003. ISSN 0266-5611.

Neubauer A. On converse and saturation results for regularization methods. In *Beiträge zur angewandten Analysis und Informatik*, pages 262–270. Shaker, Aachen, 1994.

Spies R.D. and Temperini K.G. Global saturation of regularization methods for inverse ill-posed problems. *Institute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota, preprint*, 2215, 2008.