

ESTUDIO DE LA DINÁMICA NO-LINEAL DE MICRO-VEHÍCULOS AÉREOS DE ALAS BATIENTES MEDIANTE UN MODELO HÍBRIDO DE CUERPOS RÍGIDOS Y FLEXIBLES

Marcos Vanella¹, Sergio Preidikman² y Julio Massa^{1y2}

¹Departamento de Estructuras. Facultad de C. E. F y N. Universidad Nacional de Córdoba
Tel. : 0351-4334145, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina.
e-mail: vanella@agora.com.ar jmassa@efn.uncor.edu

²Departamento de Mecánica. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Río Cuarto
Campus Universitario, Ruta Nacional 36 Km. 601. 5800 Río Cuarto. Argentina.
Tel./Fax.:0358-4676246 e-mail: spreidikman@ing.unrc.edu.ar

Palabras clave: alas batientes, dinámica no-lineal, modelos híbridos.

Resumen. *Se presenta el desarrollo de un modelo híbrido compuesto por un sistema cuerpo-alas que permite la representación (imitación), del estado correspondiente a distintas configuraciones (despegue, ascenso, descenso, maniobras y aterrizaje, entre otras), observadas en el vuelo de pequeñas aves e insectos. El cuerpo del micro-vehículo es modelado como un conjunto de cuerpos rígidos interconectados. Para capturar el incremento de eficiencia aerodinámica proveniente de la deformación elástica de las alas, se considera para ellas un modelo estructural flexible acoplado elástica e inercialmente con la dinámica de grandes desplazamientos y grandes rotaciones características del conjunto. Se derivan las ecuaciones de movimiento asociadas a las coordenadas generalizadas del modelo de alas batientes haciendo uso del Principio de Hamilton Extendido. Las alas flexibles se modelan como vigas de Euler-Bernoulli y se discretizan las variables continuas mediante el Método de Elementos Finitos. El presente trabajo forma parte de un esfuerzo mucho mayor que se está llevando a cabo en la Universidad de Maryland en College Park, USA. El objetivo general del proyecto es estudiar como sistemas físicos, espaciales y temporalmente distribuidos, pueden ser integrados con datos de biología experimental y con computación de alta performance para lograr diseños eficientes.*

1 INTRODUCCIÓN

En este esfuerzo se derivan las ecuaciones de movimiento de un modelo híbrido compuesto por cuerpos rígidos y flexibles para el estudio de la dinámica no-lineal de micro-vehículos aéreos súper-maniobrables de alas batientes inspirados en la biología. La justificación del modelo adoptado y la derivación de las ecuaciones cinemáticas se puede consultar en la referencia [1].

El presente trabajo forma parte de un esfuerzo mucho mayor que se está llevando a cabo en la Universidad de Maryland en College Park, USA cuyo objetivo general es estudiar cómo sistemas físicos, espacial y temporalmente distribuidos, pueden ser sometidos a movimientos complejos. Para lograr esto, se desarrollarán algoritmos numéricos de alta fidelidad para flujos inestacionarios y no-lineales con fronteras sólidas y sometidos a movimientos complejos. Dichos algoritmos se utilizarán para tratar de entender el “lenguaje del vuelo natural”, a partir de la exploración de los fenómenos aeroelásticos no-estacionarios y no-lineales observados en pájaros pequeños e insectos. El objetivo de lograr dicho entendimiento es inspirar y desarrollar estrategias de control basadas en “toma de decisiones cuando se cuenta con información limitada”, para ser implementadas en micro-vehículos aéreos súper-maniobrables, no tripulados, de alas batientes.

En la naturaleza, todas las criaturas capaces de mantenerse en vuelo poseen alas batientes. Existe evidencia que a pequeñas escalas, los efectos aerodinámicos no estacionarios producidos por las alas en batimiento ofrecen ventajas únicas respecto de las alas y rotores convencionales². Entre estas ventajas se cuenta la generación de sustentación y empuje, manteniendo una economía en el peso. Resultados experimentales demostraron que algunos insectos producen hasta dos y tres veces más sustentación que la predicha por métodos de la aerodinámica estacionaria convencional².

Entre los mecanismos más importantes pueden mencionarse:^{3, 4, 5} el retraso de pérdida dinámica y mantenimiento del vórtice en bordes de ataque; la captura de estelas; la sustentación rotacional; y el “aplauso y separación” (clap and fling), entre otros. Tal como explica Wei Shyy⁶, mediante sus alas batientes y flexibles, los pájaros pequeños superan la performance aerodinámica estacionaria que se deteriora al caer el número de Reynolds (Re), utilizando los mecanismos no estacionarios recién comentados. Además, es bien conocido que las deformaciones elásticas de las superficies sustentadoras producen un aumento de la eficiencia aerodinámica. Esta necesidad de modelar los efectos de la flexibilidad motivan a que en este trabajo se adopte un modelo de alas flexibles.

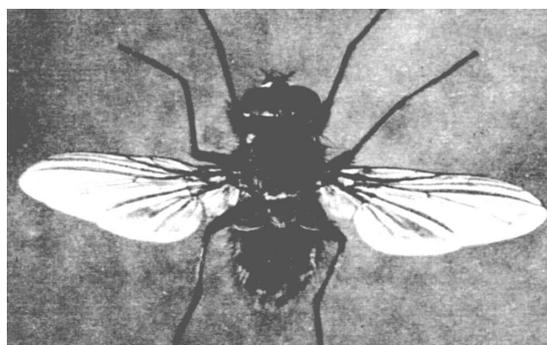


Figura 1a: Fotografía de una *Musca Doméstica*.

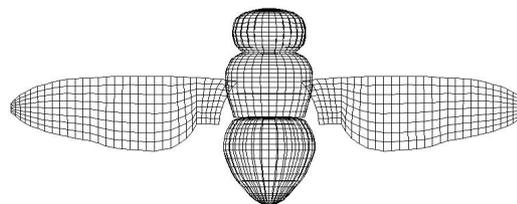


Figura 1b: Malla representativa del modelo.

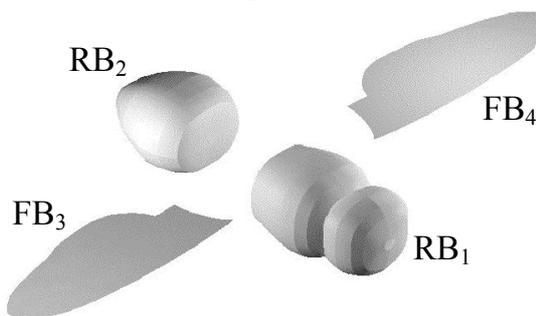


Figura 1c: Componentes del modelo:
RB₁ y RB₂ son cuerpos rígidos,
FB₃ y FB₄ son cuerpos flexibles.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE ALAS BATIENTES

El modelo híbrido propuesto para estudiar la dinámica de un micro-vehículo aéreo de alas batientes consta de ¹: (a) dos cuerpos rígidos articulados entre sí (cabeza-tórax y cola); y, (b) un par de alas flexibles articuladas en el punto de unión ala-tórax.

Para graficar los detalles del modelo propuesto y para describir la dinámica del mismo, se ha considerado la morfología correspondiente a la *Musca Doméstica*, la cual puede observarse en la Fig. 1.

Una vista general del modelo y de los sistemas de referencia adoptados se da en la Fig. 2.

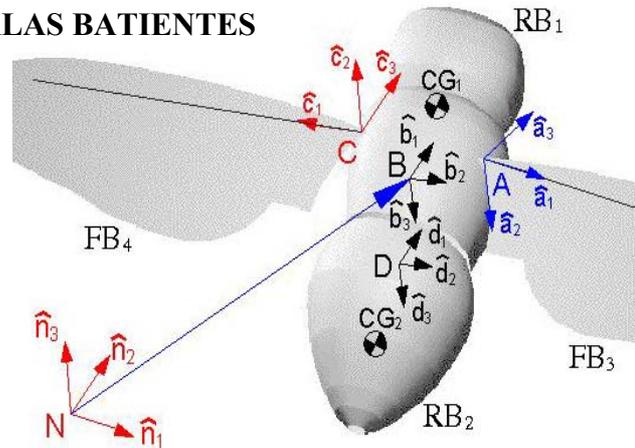


Figura 2: Modelo de alas batientes. Componentes y sistemas coordinados.

Las **coordenadas generalizadas** utilizadas para describir el estado del modelo híbrido son:

- Seis grados de libertad del sistema cabeza-tórax, cuerpo RB₁: Posición del centro de gravedad CG₁ y orientación dada por los ángulos de Euler ψ, θ, ϕ . Se usa un sistema de ejes fijos al cuerpo $\hat{\mathbf{b}}_1 \hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\mathbf{b}}_3$:

$$CG_1 = b_{1B} \hat{\mathbf{b}}_1 + b_{2B} \hat{\mathbf{b}}_2 + b_{3B} \hat{\mathbf{b}}_3 \quad \text{y} \quad \psi, \theta, \phi \quad \text{para RB}_1 \quad (1)$$

- Dos ángulos de Euler de rotación de la cola respecto de dos ejes perpendiculares a la dirección axial de la misma:

$$\psi_2 \text{ y } \theta_2 \quad \text{para RB}_2 \quad (2)$$

- Tres ángulos de Euler que definen la rotación de cada uno de los dos los cuerpos flexibles:

$$\psi_3, \theta_3 \text{ y } \phi_3 \quad \text{para FB}_3 \quad \text{y} \quad \psi_4, \theta_4 \text{ y } \phi_4 \quad \text{para FB}_4 \quad (3)$$

- Tres desplazamientos (u, v, w) y un giro (θ_x) en cada punto del eje de los cuerpos flexibles (alas) causados por la deformación de la “viga”: u debido al efecto axial, v y w debidos a la flexión en dos planos, y θ_x debido a la torsión. Todas estas coordenadas generalizadas son función de la coordenada x a lo largo del eje del ala, ver Fig. 4:

$$u_3, v_3, w_3 \text{ y } \theta_{3x} \quad \text{para FB}_3 \quad \text{y} \quad u_4, v_4, w_4 \text{ y } \theta_{4x} \quad \text{para FB}_4 \quad (4)$$

Se tienen en total **22 coordenadas generalizadas**. Catorce de ellas son discretas, sólo funciones del tiempo, y se agrupan en cuatro vectores (uno para cada cuerpo). Las ocho restantes son distribuidas, es decir funciones del tiempo y del espacio. Por simplicidad, en la presente formulación se ignora el aporte inercial asociado a las variables distribuidas de torsión θ_{3x} y θ_{4x} . Dichas variables se considerarán casi-estáticas; es decir, variables en el tiempo, pero desacopladas del sistema de ecuaciones de movimiento representativo del modelo. Este concepto constituye una hipótesis que se explica más adelante en este trabajo. En definitiva se trabajará con los siguientes **seis vectores de coordenadas generalizadas**:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}_{1R}\} &= \{b_{1B} \ b_{2B} \ b_{3B} \ \phi \ \theta \ \psi\}_t^T \\ \{\mathbf{q}_{2R}\} &= \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}_t \\ \{\mathbf{q}_{3R}\} &= \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \theta_3 \\ \psi_3 \end{Bmatrix}_t \\ \{\mathbf{q}_{4R}\} &= \begin{Bmatrix} \phi_4 \\ \theta_4 \\ \psi_4 \end{Bmatrix}_t \\ \{\mathbf{q}_{3F}\} &= \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{Bmatrix}_{t,x_3} \\ \{\mathbf{q}_{4F}\} &= \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix}_{t,x_4} \end{aligned} \quad (5)$$

3 DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de movimiento del modelo propuesto se derivan a partir del Principio de Hamilton Extendido^{7,8,9}, que establece que para dos instantes de tiempo en el movimiento:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (6)$$

δT y δV son las variaciones de energía cinética y potencial del sistema, y δW_{nc} es el trabajo efectuado por las fuerzas no conservativas aplicadas sobre el mismo.

La energía cinética se plantea para cada cuerpo del sistema en función de las velocidades obtenidas en la referencia [1]. Para los cuerpos rígidos se consideran las velocidades de sus centros de masa donde se suponen concentradas sus propiedades inerciales. Para los cuerpos flexibles las propiedades inerciales se encuentran en la forma de masas distribuidas a lo largo de las vigas componentes.

La energía potencial proviene de tres fuentes, la acción gravitacional que se supone actuante sobre los cuerpos rígidos, la energía potencial de deformación por flexión, esfuerzo axial y torsión en las vigas flexibles de las alas, y la energía potencial adicional por el aumento de rigidez aparente en la flexión de las alas debido a las fuerzas centrífugas originadas en el batimiento.

Las fuerzas no conservativas corresponden a las acciones aerodinámicas originadas en las superficies sustentadoras del modelo que se traducen en esfuerzos sobre los grados de libertad de la estructura del modelo.

Aplicando el Principio de Hamilton Extendido se realiza la integración por partes de las variaciones de velocidades generalizadas y de las variaciones de derivadas espaciales de los grados de libertad distribuidos, para obtener las ecuaciones diferenciales asociadas a cada coordenada generalizada y las condiciones de contorno correspondientes en el caso de los cuerpos flexibles. Para los cuerpos flexibles las ecuaciones en derivadas parciales deben ser discretizadas para poder ser implementadas numéricamente.

A continuación se procede a derivar los aportes de cada cuerpo componente del modelo a las ecuaciones de movimiento del mismo.

3.1 Ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido RB₁

Componente inercial de las ecuaciones de movimiento de RB₁

Las componentes inerciales de las ecuaciones de movimiento para el cuerpo RB₁ se obtienen aplicando el Principio de Hamilton a la energía cinética que dicho cuerpo posee durante el movimiento. Se obtienen dichas ecuaciones en términos de ejes fijos al cuerpo $\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3$. Para ello se parte de la expresión de la velocidad absoluta $\{\mathbf{V}_{P B}^N\}$ de un punto de dicho cuerpo¹ (en este caso el centro de gravedad) en términos del sistema fijo al cuerpo B (ver Fig. 2):

$$\{\mathbf{V}_{P B}^N\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{b}}_{1B} + (c\phi r_3 + s\phi r_2)\dot{\theta} + (c\theta s\phi r_3 - c\theta c\phi r_2)\dot{\psi} \\ \dot{\mathbf{b}}_{2B} - r_3 \dot{\phi} - s\phi r_1 \dot{\theta} + (s\theta r_3 + c\theta c\phi r_1)\dot{\psi} \\ \dot{\mathbf{b}}_{3B} + r_2 \dot{\phi} - c\phi r_1 \dot{\theta} - (s\theta r_2 + c\theta s\phi r_1)\dot{\psi} \end{array} \right\} \quad (7)$$

Se suponen al sistema B y al centro de gravedad CG_{RB₁} del cuerpo RB₁ ubicados sobre el plano de simetría de dicho cuerpo (dado por los versores $\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_3$, ver Fig. 2).

La energía cinética de traslación del cuerpo RB₁ y su variación son:

$$T_{tras} = \frac{1}{2} m_{RB_1} \{\mathbf{V}_{P B}^N\} \cdot \{\mathbf{V}_{P B}^N\} \quad \longrightarrow \quad \delta T_{tras} = m_{RB_1} \{\mathbf{V}_{P B}^N\} \cdot \{\delta \mathbf{V}_{P B}^N\} \quad (8)$$

Por otro lado, la componente inercial rotacional de las ecuaciones se obtiene a partir de la variación de la energía cinética rotacional. Para el cuerpo RB_1 se considera el caso general de ejes $\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3$ no concordantes con los ejes principales de inercia del mismo. La matriz de inercia respecto del CG del cuerpo en términos del sistema B es constante y se expresa como:

$$[\mathbf{I}_{CG1B}] = \begin{bmatrix} I_{b_1b_1} & -I_{b_1b_2} & -I_{b_1b_3} \\ -I_{b_1b_2} & I_{b_2b_2} & -I_{b_2b_3} \\ -I_{b_1b_3} & -I_{b_2b_3} & I_{b_3b_3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

La velocidad angular de RB_1 expresada en términos de ejes $\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3$ se denota por $\{\mathbf{\omega}_B^N\}$ y está dada en la referencia [1]. La energía cinética rotacional del cuerpo RB_1 y su variación son:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \{\mathbf{\omega}_B^N\}^T [\mathbf{I}_{CG1B}] \{\mathbf{\omega}_B^N\} \longrightarrow \delta T_{rot} = \{\mathbf{\omega}_B^N\}^T [\mathbf{I}_{CG1B}] \{\delta \mathbf{\omega}_B^N\} \quad (10)$$

La variación de la energía cinética total del cuerpo RB_1 se obtiene sumando las variaciones debidas a la traslación y a la rotación:

$$\delta T_{RB_1} = \delta T_{tras} + \delta T_{rot} = m_{RB_1} \{\mathbf{V}_P^N\} \cdot \{\delta \mathbf{V}_P^N\} + \{\mathbf{\omega}_B^N\}^T [\mathbf{I}_{CG1B}] \{\delta \mathbf{\omega}_B^N\} \quad (11)$$

Al aplicar el Principio de Hamilton Extendido, la contribución de (11) resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_{RB_1} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(m_{RB_1} \{\mathbf{V}_P^N\} \cdot \{\delta \mathbf{V}_P^N\} + \{\mathbf{\omega}_B^N\}^T [\mathbf{I}_{CG1B}] \{\delta \mathbf{\omega}_B^N\} \right) dt \quad (12)$$

Por otro lado, la variación de la energía cinética puede expresarse como:

$$\delta T_{RB_1} = \frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{b}_{1B}} \delta \dot{b}_{1B} + \frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{b}_{2B}} \delta \dot{b}_{2B} + \dots + \frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{\psi}} \delta \dot{\psi} + \dots + \frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \psi} \delta \psi \quad (13)$$

Después de reemplazar (13) en (12) debe realizarse la integración por partes de los términos que multiplican a las variaciones de las velocidades generalizadas $\delta \dot{q}_i$. Así, por ejemplo, para el caso de $\delta \dot{\psi}$ se tiene el siguiente factor que multiplica dicha variación:

$$\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{\psi}} = f(\dot{b}_{1B}, \dot{b}_{2B}, \dot{b}_{3B}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \phi, \theta, \psi) \quad (14)$$

que al ser integrado por partes produce un término que contiene $\delta \psi$:

- término que proviene de $\delta \dot{\psi} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{\psi}} \right) \delta \dot{\psi} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{\psi}} \right) \delta \psi dt \quad (15)$

Por otro lado al llevar el último término de (13) a (12) se tiene otro término que contiene $\delta \psi$:

- término que proviene de $\delta \psi \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \psi} \right) \delta \psi dt \quad (16)$

Teniendo en cuenta (15) y (16), se pueden agrupar los términos de (12) que multiplican a las variaciones $\delta \psi$. Esto puede ser generalizado para la variable genérica q_i :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{\psi}} \right) \right] \delta \psi dt \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt \quad (17)$$

El multiplicando de la variación de la coordenada generalizada en la integral anterior

aporta a la componente inercial de la ecuación de movimiento de la coordenada q_i en el modelo completo. Se procede a ordenar los componentes del término entre paréntesis de esta última ecuación en función de las velocidades y aceleraciones generalizadas. Para ello se reconoce que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{b}_{1B}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \ddot{b}_{1B} + \frac{\partial}{\partial \dot{b}_{2B}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \ddot{b}_{2B} + \dots + \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \dot{\psi} \quad (18)$$

Además se reconocen los componentes del término $\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i}$ como formados por productos de a pares de velocidades generalizadas $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$. De una manera general, se puede escribir:

$$\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} = (k_{\phi\phi} \dot{\phi} + k_{\phi\theta} \dot{\theta} + k_{\phi\psi} \dot{\psi}) \dot{\phi} + (k_{\theta\phi} \dot{\phi} + k_{\theta\theta} \dot{\theta} + k_{\theta\psi} \dot{\psi}) \dot{\theta} + (k_{\psi\phi} \dot{\phi} + k_{\psi\theta} \dot{\theta} + k_{\psi\psi} \dot{\psi}) \dot{\psi} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n k_{q_j q_k} \dot{q}_k \right) \dot{q}_j \quad \text{donde: } k_{q_k q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right)}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \quad \text{para } k, j = 1, \dots, n \quad (20)$$

siendo n el número de coordenadas generalizadas. El paréntesis en (17) queda entonces:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial \dot{b}_{1B}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \right] \{ \ddot{\mathbf{q}}_{1R} \} + \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{\phi q_j} \dot{q}_j \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{\psi q_j} \dot{q}_j \right] \{ \dot{\mathbf{q}}_{1R} \} \quad (21)$$

Extendiendo este último resultado a todas las coordenadas generalizadas del movimiento se tiene el siguiente aporte a la componente inercial debido al cuerpo RB_1 :

$$[\mathbf{G}_1] \{ \ddot{\mathbf{q}}_{1R} \} + [\mathbf{H}_1] \{ \dot{\mathbf{q}}_{1R} \} \quad (22)$$

donde:

$$\mathbf{G}_1^{q_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad \mathbf{H}_1^{q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{k=1}^n k_{q_j q_k} \dot{q}_k \quad k_{q_j q_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \delta T_{RB_1}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right)}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \quad (23)$$

Para el cálculo de cada uno de los coeficientes resultantes se ha hecho uso extensivo de un manipulador simbólico. Dichos resultados no se muestran aquí por razones de espacio.

Componente potencial de las ecuaciones de movimiento de RB_1 debida a la gravedad

La variación de energía potencial gravitatoria del cuerpo resulta ser opuesta en signo al trabajo virtual realizado por el peso del cuerpo. Es decir, en el principio de Hamilton se tiene para este caso (cuerpo rígido): $\delta W_c = -\delta V_g$.

La fuerza peso en términos del sistema inercial está definida en dirección del versor $\hat{\mathbf{n}}_3$ y sentido opuesto. Luego se tiene:

$$\{ \mathbf{F}_{gN} \} = m_{RB_1} \mathbf{g} \{ 0 \quad 0 \quad -1 \}^T \quad (24)$$

donde m_{RB_1} es la masa del cuerpo rígido RB_1 y \mathbf{g} es la aceleración de la gravedad. En términos del sistema fijo al cuerpo¹ dicha fuerza resulta:

$$\{ \mathbf{F}_{gB} \} = m_{RB_1} \mathbf{g} [\mathbf{T}_{BN}]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = m_{RB_1} \mathbf{g} \begin{Bmatrix} -s\theta \\ s\phi \ c\theta \\ c\phi \ c\theta \end{Bmatrix} \quad (25)$$

La variación de la posición del centro de gravedad del cuerpo CG_{RB_1} definida en función de la

terna $\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3$ se expresa como: $\{\delta\mathbf{b}_{CGB}\} = \{\delta b_{CG1B} \ \delta b_{CG2B} \ \delta b_{CG3B}\}^T$, por ello se debe encontrar la relación entre esta última variación y las variaciones de las coordenadas generalizadas del movimiento $\delta b_{1B}, \delta b_{2B}, \delta b_{3B}, \delta\phi, \delta\theta$ y $\delta\psi$. Para ello se considera un vector de variación angular en función de las variaciones de los ángulos de Euler, de manera análoga al caso de la velocidad angular deducida en referencia [1]: $\{\delta\boldsymbol{\theta}\} = \delta\psi \hat{\mathbf{z}}_3 + \delta\theta \hat{\mathbf{z}}'_2 + \delta\phi \hat{\mathbf{z}}''_1$, teniendo en cuenta los respectivos ejes de rotación. En términos de la terna $\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3$ se tiene¹:

$$\{\delta\boldsymbol{\theta}\} = (-\delta\psi \ s\theta + \delta\phi) \hat{\mathbf{b}}_1 + (\delta\psi \ c\theta \ s\phi + \delta\theta \ c\phi) \hat{\mathbf{b}}_2 + (\delta\psi \ c\theta \ c\phi - \delta\theta \ s\phi) \hat{\mathbf{b}}_3 \quad (26)$$

y $\{\delta\mathbf{b}_{CGB}\}$ resulta:
$$\{\delta\mathbf{b}_{CGB}\} = \{\delta\mathbf{b}_B\} + \{\delta\boldsymbol{\theta}\} \times \{\mathbf{r}_{CG1B}\} \quad (27)$$

donde $\{\mathbf{r}_{CG1B}\} = \{r_1 \ 0 \ r_3\}^T$ por suponerse al origen del sistema B y al CG_{RB1} ubicados en el plano de simetría vertical del cuerpo. El trabajo virtual de la fuerza gravitatoria está dado por:

$$\delta W_c = \{\mathbf{F}_{gB}\} \cdot \{\delta\mathbf{b}_{CGB}\} \quad (28)$$

esto permite deducir el aporte del peso sobre cada una de las coordenadas generalizadas en las ecuaciones de movimiento correspondientes. Explicitando la ecuación (28) se tiene:

$$\delta W_c = m_{RB1} g \left[-s\theta \delta b_{1B} + s\phi \ c\theta \delta b_{2B} + c\phi \ c\theta \delta b_{3B} - r_3 \ s\phi \ c\theta \delta\phi + (-r_3 \ s\theta \ c\phi - r_1 \ c\theta) \delta\theta \right] \quad (29)$$

donde curiosamente se anulan los términos que contienen la variación $\delta\psi$. Esto se debe a que ψ es la primera rotación en la secuencia de ángulos de Euler adoptada y se efectúa alrededor del eje $\hat{\mathbf{z}}_3$ (ver [1]), el cual concuerda en dirección y sentido con la aceleración de la gravedad.

Cargas generalizadas no conservativas aplicadas sobre RB_1

El trabajo virtual de las N fuerzas no conservativas $\{\mathbf{F}_i\}$ actuando sobre puntos $\{\mathbf{r}_i\}$ de la superficie del cuerpo RB_1 y el momento resultante no conservativo $\{\mathbf{M}\}$ actuando sobre el centro de gravedad de dicho cuerpo está dado por:

$$\delta W_{nc} = \sum_{i=1}^N \{\mathbf{F}_i\} \cdot \{\delta\mathbf{r}_i\} + \{\mathbf{M}\} \cdot \{\delta\boldsymbol{\theta}\} \quad (30)$$

donde para un sistema con n coordenadas generalizadas independientes se tiene^{8, 9, 10}:

$$\{\delta\mathbf{r}_i\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\{\mathbf{r}_i\}}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\{\dot{\mathbf{r}}_i\}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \quad \text{y} \quad \{\delta\boldsymbol{\theta}\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\{\boldsymbol{\omega}\}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \quad (31)$$

siendo q_k la coordenada generalizada k-ésima, \dot{q}_k su derivada temporal y δq_k su variación.

Reemplazando las ecuaciones (31) en (30) se obtiene la expresión de las fuerzas generalizadas:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \{\mathbf{F}_i\} \cdot \frac{\partial\{\dot{\mathbf{r}}_i\}}{\partial \dot{q}_k} + \{\mathbf{M}\} \cdot \frac{\partial\{\boldsymbol{\omega}\}}{\partial \dot{q}_k} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

En el caso de conocerse la fuerza y el momento resultante para el centro de gravedad del cuerpo la ecuación anterior toma la forma:

$$Q_k = \{\mathbf{F}_{CG1}\} \cdot \frac{\partial \{\mathbf{v}_{CG1B}\}}{\partial \dot{q}_k} + \{\mathbf{M}_{CG1}\} \cdot \frac{\partial \{\boldsymbol{\omega}\}}{\partial \dot{q}_k} \quad (33)$$

donde todos los vectores se expresan en términos del sistema de ejes fijo al cuerpo $\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3$. Considerando los valores obtenidos para $\{\mathbf{v}_{CG1B}\}_B$ y $\{^N \boldsymbol{\omega}_B^B\}$ en la referencia [1], se tiene:

- Para la coordenada generalizada b_{1B} :

$$\frac{\partial \{\mathbf{v}_{CG1B}\}_B}{\partial \dot{b}_{1B}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \{^N \boldsymbol{\omega}_B^B\}}{\partial \dot{b}_{1B}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad y \quad Q_{b_{1B}} = \{\mathbf{F}_{CG1}\}_B \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = F_{nc1B} \quad (34)$$

$$y \text{ similarmente para las coordenadas } b_{2B} \text{ y } b_{3B}: \quad Q_{b_{2B}} = F_{nc2B} \quad Q_{b_{3B}} = F_{nc3B} \quad (35)$$

donde F_{nciB} es la componente i-ésima de la fuerza resultante no conservativa $\{\mathbf{F}_{CG1}\}_B$.

- Para la coordenada generalizada ϕ :

$$\frac{\partial \{\mathbf{v}_{CG1B}\}_B}{\partial \dot{\phi}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad y \quad \frac{\partial \{^N \boldsymbol{\omega}_B^B\}}{\partial \dot{\phi}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{z}}_1'' \quad (36)$$

$$y \quad Q_\phi = \{\mathbf{F}_{CG1}\}_B \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -r_3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \{\mathbf{M}_{CG1}\}_B \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -r_3 F_{nc2B} + M_{nc1B} \quad (37)$$

- Para la coordenada generalizada θ :

$$\frac{\partial \{\mathbf{v}_{CG1B}\}_B}{\partial \dot{\theta}} = \{c\phi r_3 \quad -s\phi r_1 \quad -c\phi r_1\}^T, \quad \frac{\partial \{^N \boldsymbol{\omega}_B^B\}}{\partial \dot{\theta}} = \{0 \quad c\phi \quad -s\phi\}^T = \hat{\mathbf{z}}_2' \quad (38)$$

$$y \quad Q_\theta = c\phi r_3 F_{nc1B} - s\phi r_1 F_{nc2B} - c\phi r_1 F_{nc3B} + M_{nc2B} c\phi - M_{nc3B} s\phi \quad (39)$$

M_{nciB} es la componente i-ésima del momento no conservativo alrededor del CG₁ $\{\mathbf{M}_{CG1}\}_B$.

- Para la coordenada generalizada ψ :

$$\frac{\partial \{\mathbf{v}_{CG1B}\}_B}{\partial \dot{\psi}} = \begin{Bmatrix} c\theta s\phi r_3 \\ s\theta r_3 + c\theta c\phi r_1 \\ -c\theta s\phi r \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial \{^N \boldsymbol{\omega}_B^B\}}{\partial \dot{\psi}} = \begin{Bmatrix} -s\theta \\ c\theta s\phi \\ c\theta c\phi \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{z}}_3 \quad (40)$$

$$Q_\psi = c\theta s\phi r_3 F_{nc1B} + (s\theta r_3 + c\theta c\phi r_1) F_{nc2B} - c\theta s\phi r_1 F_{nc3B} - M_{nc1B} s\theta + M_{nc2B} c\theta s\phi + M_{nc3B} c\theta c\phi \quad (41)$$

3.2 Ecuaciones de movimiento del cuerpo rb_2 en términos de ejes fijos al cuerpo $\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3$

Componente inercial de las ecuaciones de movimiento de RB₂

Igual que en la sección anterior se parte de la expresión de la velocidad absoluta de un punto del cuerpo RB₂ en términos del sistema B (Fig. 3). Se supone por simplicidad que el CG (punto P) de la cola se encuentra sobre el eje $\hat{\mathbf{d}}_1$ del sistema D fijo a la misma ($r_{CG_2} = r_{CG_3} = 0$).

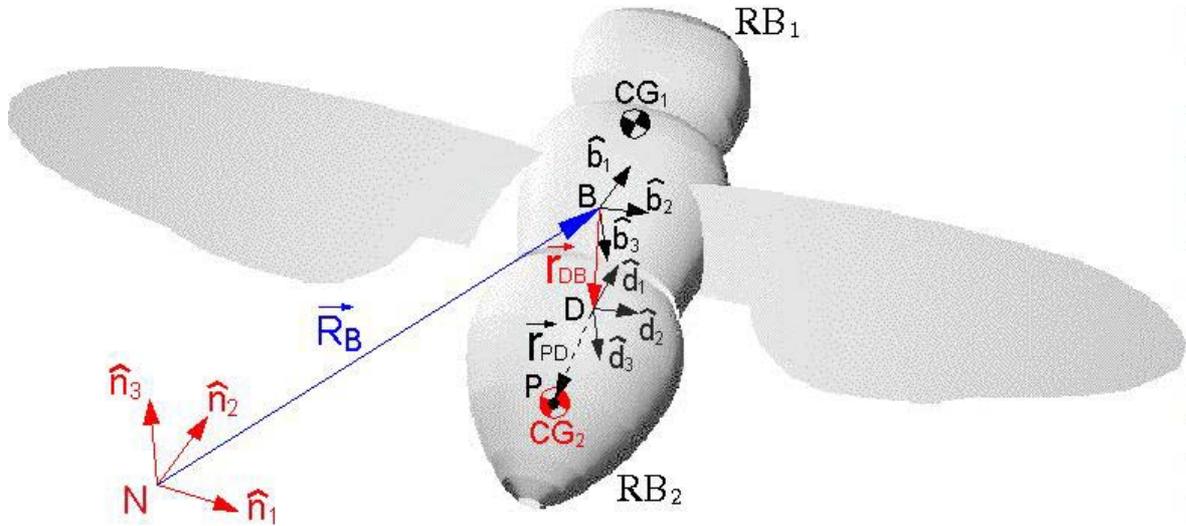


Figura 3: Vectores de posición del cuerpo rígido RB₂.

La variación de energía cinética de traslación en este caso es:

$$\delta T_{tras} = \frac{1}{2} m_{RB_2} \{ \mathbf{V}_P^N \} \cdot \{ \delta \mathbf{V}_P^N \} \quad (42)$$

Además, se desea obtener la componente inercial de rotación de las ecuaciones de movimiento para el cuerpo rígido RB₂ en términos de ejes fijos al cuerpo RB₁. Para ello se expresa la energía cinética rotacional del cuerpo RB₂ como:

$$T_{RotRB_2} = \frac{1}{2} \{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \}^T [\mathbf{I}_{CG2B}] \{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \} \quad \text{donde: } \{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \} = \{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^B \} + \{ {}^B \boldsymbol{\omega}_B^D \} \quad (43)$$

$\{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \}$ es la velocidad angular absoluta de la cola respecto a los ejes $\hat{\mathbf{b}}_1 \hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\mathbf{b}}_3$.

$\{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^B \}$ y $\{ {}^B \boldsymbol{\omega}_B^D \}$ están determinados en la referencia [1].

La matriz de inercia del cuerpo RB₂ respecto de su centro de gravedad (constante para ejes del sistema D fijo a la cola), expresada en ejes $\hat{\mathbf{b}}_1 \hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\mathbf{b}}_3$ es función de la transformación de coordenadas¹ $[\mathbf{T}_{DB}]$ y por lo tanto, de los ángulos de rotación relativa de la cola θ_2 y ψ_2 . Se tiene:

$$[\mathbf{I}_{CG2B}] = [\mathbf{T}_{DB}]^T [\mathbf{I}_{CG2D}] [\mathbf{T}_{DB}] \quad \text{y} \quad [\mathbf{I}_{CG2D}] = \begin{bmatrix} I_{2d_1d_1} & -I_{2d_1d_2} & -I_{2d_1d_3} \\ -I_{2d_1d_2} & I_{2d_2d_2} & -I_{2d_2d_3} \\ -I_{2d_1d_3} & -I_{2d_2d_3} & I_{2d_3d_3} \end{bmatrix} \quad (44)$$

La variación de la energía cinética de rotación resulta:

$$\delta T_{RotRB_2} = \{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \}^T [\mathbf{I}_{CG2B}] \{ \delta {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \} + \frac{1}{2} \{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \}^T [\delta \mathbf{I}_{CG2B}] \{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \} \quad (45)$$

donde el segundo componente representa la característica de variación de la matriz de inercia de RB₂ en términos de ejes $\hat{\mathbf{b}}_1 \hat{\mathbf{b}}_2 \hat{\mathbf{b}}_3$. Considerando (44), la variación de la matriz de inercia resulta:

$$[\delta \mathbf{I}_{CG2B}] = \delta ([\mathbf{T}_{DB}]^T [\mathbf{I}_{CG2D}] [\mathbf{T}_{DB}]) = [\delta \mathbf{T}_{DB}]^T [\mathbf{I}_{CG2D}] [\mathbf{T}_{DB}] + [\mathbf{T}_{DB}]^T [\mathbf{I}_{CG2D}] [\delta \mathbf{T}_{DB}] \quad (46)$$

lo que permite describir la ecuación (45) como:

$$\delta T_{RotRB_2} = \left\{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \right\}^T \left([\mathbf{T}_{DB}]^T [\mathbf{I}_{CG2D}] [\mathbf{T}_{DB}] \right) \left\{ \delta^N \boldsymbol{\omega}_B^D \right\} + \frac{1}{2} \left\{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \right\}^T \left([\delta \mathbf{T}_{DB}]^T [\mathbf{I}_{CG2D}] [\mathbf{T}_{DB}] + [\mathbf{T}_{DB}]^T [\mathbf{I}_{CG2D}] [\delta \mathbf{T}_{DB}] \right) \left\{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \right\} \quad (47)$$

La variación de la matriz $[\mathbf{T}_{DB}]$ es función de las variaciones de los ángulos θ_2 y ψ_2 . Como se comentó, dichos ángulos resultan especificados en todo momento y por lo tanto sus variaciones resultan nulas. Esto equivale a considerar que las ecuaciones de movimiento asociadas a dichos ángulos no se tendrán en cuenta, ya que el sistema está en este punto conducido cinemáticamente (kinematically driven). Luego, planteado el sistema en términos de ejes fijos al cuerpo B y tomando los ángulos θ_2 y ψ_2 como especificados, desaparece el aporte de la variación de la matriz de inercia de la cola a las ecuaciones de movimiento rotacionales resultantes.

Considerando las ecuaciones (42) y (47), la variación de energía cinética total resulta:

$$\delta T_{RB_2} = \frac{1}{2} m_{RB_2} \left\{ \mathbf{V}_{PB}^N \right\} \cdot \left\{ \delta \mathbf{V}_{PB}^N \right\} + \left\{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^D \right\}^T [\mathbf{I}_{CG2B}] \left\{ \delta^N \boldsymbol{\omega}_B^D \right\} \quad (48)$$

A partir de aquí se repite el procedimiento ya visto al aplicar el Principio de Hamilton Extendido al cuerpo RB_1 . Debe notarse que en la integración por partes de los términos de la variación de energía cinética aparecen dos nuevas variables angulares que deben ser tenidas en cuenta:

$$\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} = f(\dot{b}_{1B}, \dot{b}_{2B}, \dot{b}_{3B}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \phi, \theta, \psi, \dot{\theta}_2, \dot{\psi}_2, \theta_2, \psi_2) \quad (49)$$

y que al hacer la derivada respecto del tiempo en la integración por partes se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{b}_{1B}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \ddot{b}_{1B} + \frac{\partial}{\partial \dot{b}_{2B}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \ddot{b}_{2B} + \dots + \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_2} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \dot{\psi}_2 \quad (50)$$

Además, en este caso los componentes del término $\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i}$ se forman por productos de a pares de velocidades generalizadas $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\theta}_2, \dot{\psi}_2$.

La componente inercial para la variable $q_i = \{b_{1B}, b_{2B}, b_{3B}, \phi, \theta, \psi\}$ queda entonces:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial \dot{b}_{1B}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \right] \left\{ \ddot{\mathbf{q}}_{1R} \right\} + \left[-\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad -\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_2} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \right] \left\{ \ddot{\mathbf{q}}_{2R} \right\} + \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{\phi q_j} \dot{q}_j \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{\psi q_j} \dot{q}_j \right] \left\{ \dot{\mathbf{q}}_{1R} \right\} + \left[-\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_2} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{\phi_2 q_j} \dot{q}_j \quad -\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_2} \left(\frac{\partial \delta T_{RB_2}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{\psi_2 q_j} \dot{q}_j \right] \left\{ \dot{\mathbf{q}}_{2R} \right\} \quad (51)$$

donde $\{\mathbf{q}_{1R}\}$ y $\{\mathbf{q}_{2R}\}$ están definidos en (5). Para todas las coordenadas generalizadas del movimiento se obtiene el siguiente aporte a la componente inercial debida al cuerpo RB_2 :

$$[\mathbf{G}_2]_{6 \times 6} \left\{ \ddot{\mathbf{q}}_{1R} \right\} + [\mathbf{H}_2]_{6 \times 6} \left\{ \dot{\mathbf{q}}_{1R} \right\} + \left([\mathbf{G}_{2S}]_{6 \times 2} \left\{ \ddot{\mathbf{q}}_{2R} \right\} + [\mathbf{H}_{2S}]_{6 \times 2} \left\{ \dot{\mathbf{q}}_{2R} \right\} \right) \quad (52)$$

donde los coeficientes de las matrices se definen de la forma ya vista para el cuerpo RB_1 . Además

$[\mathbf{G}_{2S}]$ y $[\mathbf{H}_{2S}]$ son matrices asociadas a aceleraciones y velocidades generalizadas especificadas. Dichos coeficientes no se explicitan aquí por razones de espacio.

Los desarrollos del trabajo virtual de fuerzas gravitacionales y cargas no conservativas debidas a acciones aerodinámicas sobre la cola resultan similares a lo ya expuesto para el cuerpo RB_1 .

3.3 Ecuaciones de movimiento del ala derecha: cuerpo flexible FB_3

Componente inercial de las ecuaciones de movimiento de FB_3

La derivación de las ecuaciones de movimiento para los cuerpos levemente flexibles es similar al caso de los cuerpos rígidos del modelo. Se tiene en cuenta además, que estos cuerpos corresponden a sistemas de parámetros distribuidos y por lo tanto dan lugar a ecuaciones en derivadas parciales.

Se considera a los cuerpos flexibles como vigas de Bernoulli en el espacio tridimensional. Para el caso del ala derecha FB_3 se considera como marco de referencia seguidor al marco $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_3$. Se parte de la expresión de la velocidad de un punto sobre el eje neutro de dicha viga (ala derecha) a una distancia x_3 sobre el eje $\hat{\mathbf{a}}_1$ de la articulación del ala (ver Fig. 4).

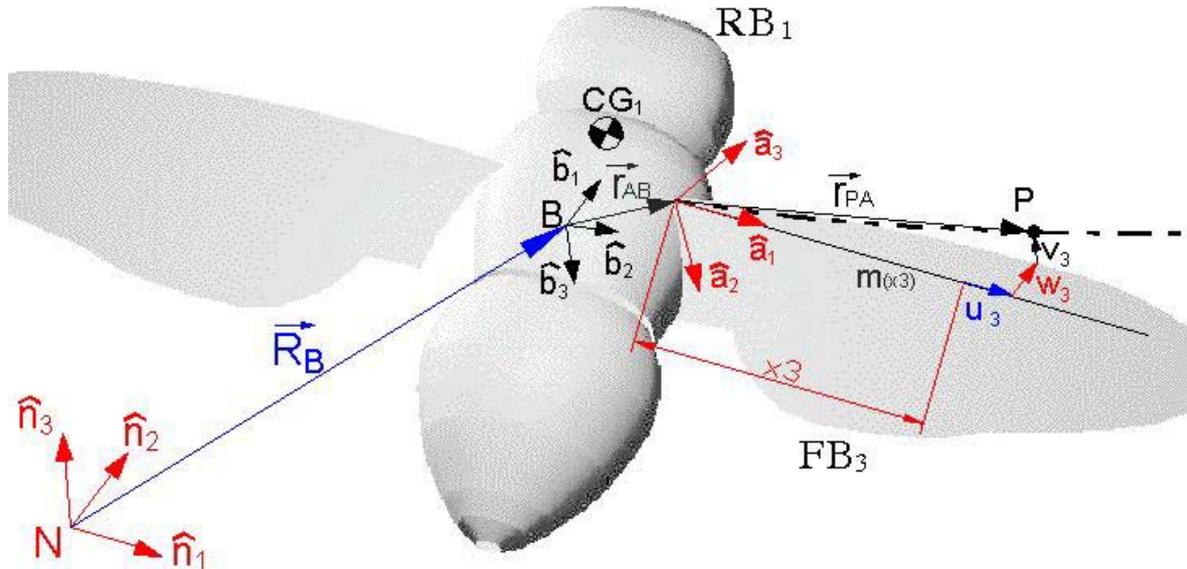


Figura 4: Vectores de posición de un punto sobre el ala derecha FB_3 .

La velocidad de un punto P sobre el eje neutro de la viga en términos del sistema B es:

$$\{\mathbf{V}_{PB}^N\} = \{\mathbf{V}_{BB}^N\} + \{^N\boldsymbol{\omega}_B^B\} \times \{\mathbf{R}_{AB}\}_B + \left[\{^N\boldsymbol{\omega}_B^B\} + \{^B\boldsymbol{\omega}_B^A\} + \{^A\boldsymbol{\omega}_B^P\} \right] \times \{\mathbf{r}_{PA}\}_B + \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_B \quad (53)$$

$$\text{donde: } \{\mathbf{r}_{PA}\}_A = \left\{ x_3 + u_{3(x_3,t)} \quad v_{3(x_3,t)} \quad w_{3(x_3,t)} \right\}^T \quad \text{y} \quad \{\mathbf{r}_{PA}\}_B = [\mathbf{T}_{BA}] \{\mathbf{r}_{PA}\}_A \quad (54)$$

siendo $[\mathbf{T}_{BA}]$ la matriz de transformación de coordenadas¹ del sistema A al B.

La derivada respecto del tiempo de $\{\mathbf{r}_{PA}\}$ es:

$$\frac{^A\partial}{\partial t} \{\mathbf{r}_{PA}\}_A = \left\{ \dot{u}_{3(x_3,t)} \quad \dot{v}_{3(x_3,t)} \quad \dot{w}_{3(x_3,t)} \right\}^T \quad \text{y} \quad \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_B = [\mathbf{T}_{BA}] \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A \quad (55)$$

En esta instancia se efectúan las siguientes hipótesis simplificativas:

- 1) Los valores que toman los desplazamientos en la viga son mucho menores que la coordenada de dichos puntos en la posición indeformada, es decir:

$$\text{Máx} \left(u_{3(x_3,t)}, v_{3(x_3,t)}, w_{3(x_3,t)} \right) \ll x_3 \quad (56)$$

- 2) Se desprecia el efecto de la deformación sobre la velocidad angular de cada sección de la viga:

$$\left\{ {}^A \boldsymbol{\omega}^P \left[\dot{\theta}_{3x}, \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right), \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right), t \right] \right\} = \left\{ \dot{\theta}_{3x}, \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right), \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right) \right\}^T \approx 0 \quad (57)$$

donde θ_{3x} es el ángulo de giro según el eje local $\hat{\mathbf{a}}_1$ de la viga.

La componente de cuerpo rígido de la velocidad del punto P se denomina $\{\mathbf{V}_{PRB}^N\}$:

$$\{\mathbf{V}_{PRB}^N\} = \{\mathbf{V}_{BB}^N\} + \{^N \boldsymbol{\omega}_B^B\} \times \{\mathbf{R}_{AB}\}_B + \left[\{^N \boldsymbol{\omega}_B^B\} + \{^B \boldsymbol{\omega}_B^A\} \right] \times \{\mathbf{r}_{PA}^*\}_B \quad (58)$$

donde: $\{\mathbf{r}_{PA}^*\}_B = [\mathbf{T}_{BA}] \{x_3 \ 0 \ 0\}^T$ (hipótesis 1) (59)

La componente de la velocidad del punto P debida a la flexibilidad se denomina $\{\mathbf{V}_{PFB}^N\}$:

$$\{\mathbf{V}_{PFB}^N\} = [\mathbf{T}_{BA}] \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A \quad (60)$$

Entonces la velocidad del punto en términos del sistema B resulta:

$$\{\mathbf{V}_P^N\} = \{\mathbf{V}_{PRB}^N\} + \{\mathbf{V}_{PFB}^N\} \quad (61)$$

La energía cinética del cuerpo completo contiene tres componentes:

- Componente debida al movimiento de cuerpo rígido:

$$T_{FB_3R} = \frac{1}{2} \int_0^L m_{(x_3)} \{\mathbf{V}_{PRB}^N\}^T \{\mathbf{V}_{PRB}^N\} dx_3 \quad (62)$$

donde la masa distribuida $m_{(x_3)}$ se obtiene del producto de la densidad del material ρ_3 por el área de la sección de la viga A_3 .

- Componente debida al movimiento de cuerpo flexible:

$$T_{FB_3F} = \frac{1}{2} \int_0^L m_{(x_3)} \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A^T \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A dx_3 \quad (63)$$

- Componente de interacción entre movimientos de cuerpo rígido y flexible:

$$T_{FB_3I} = \int_0^L m_{(x_3)} \{\mathbf{V}_{PRB}^N\}^T [\mathbf{T}_{BA}] \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A dx_3 \quad (64)$$

La variación de energía cinética es:

$$\begin{aligned} \delta T_{FB_3} = & \int_0^L m_{(x_3)} \{\mathbf{V}_{PRB}^N\}^T \{\delta \mathbf{V}_{PRB}^N\} dx_3 + \int_0^L m_{(x_3)} \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A^T \{\delta \dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A dx_3 + \\ & + \int_0^L m_{(x_3)} \left[\{\delta \mathbf{V}_{PRB}^N\}^T [\mathbf{T}_{BA}] \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A + \{\mathbf{V}_{PRB}^N\}^T [\delta \mathbf{T}_{BA}] \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A + \{\mathbf{V}_{PRB}^N\}^T [\mathbf{T}_{BA}] \{\delta \dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A \right] dx_3 \end{aligned} \quad (65)$$

En la tercera integral, el segundo sumando contiene la variación de la matriz de transformación $[\delta \mathbf{T}_{BA}]$ que da lugar a variaciones de las variables angulares especificadas ϕ_3 , θ_3 y ψ_3 . Dichas variaciones resultan nulas en este caso y por lo tanto no se tendrá en cuenta ese término.

Para calcular las variaciones, se comienza individualizando a las variables que determinan $\{\mathbf{V}_{PRB}^N\}$:

$$\{\mathbf{V}_{PRB}^N\} = f(\dot{b}_{1B}, \dot{b}_{2B}, \dot{b}_{3B}, \phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \phi_3, \theta_3, \psi_3, \dot{\phi}_3, \dot{\theta}_3, \dot{\psi}_3) \quad (66)$$

y por lo tanto su variación tiene la forma:

$$\{\delta \mathbf{V}_{PRB}^N\} = \frac{\partial \{\mathbf{V}_{PRB}^N\}}{\partial \dot{b}_{1B}} \delta \dot{b}_{1B} + \frac{\partial \{\mathbf{V}_{PRB}^N\}}{\partial \dot{b}_{2B}} \delta \dot{b}_{2B} + \dots + \frac{\partial \{\mathbf{V}_{PRB}^N\}}{\partial \dot{\psi}_3} \delta \dot{\psi}_3 \quad (67)$$

La variación de $\{\delta\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A$ resulta:

$$\{\delta\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A = \left\{ \delta\dot{u}_{3(x_3,t)} \quad \delta\dot{v}_{3(x_3,t)} \quad \delta\dot{w}_{3(x_3,t)} \right\}^T \quad (68)$$

La primera integral de la ecuación (65) es la variación de energía cinética de cuerpo rígido, función de las coordenadas globales $\{\mathbf{q}_{1R}\}$ y $\{\mathbf{q}_{3R}\}$ y sus derivadas temporales. Aplicando el Principio de Hamilton Extendido, y realizando la integración por partes de los términos que multiplican a variaciones de las velocidades generalizadas tal como se realizó para el cuerpo RB₁, se obtiene de manera general, la componente inercial de la variable global q_i

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\partial}{\partial b_{1B}} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \right] \{\ddot{\mathbf{q}}_{1R}\} + \left[-\frac{\partial}{\partial \phi_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \psi_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \right] \{\ddot{\mathbf{q}}_{3R}\} + \\ & + \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{R\phi q_j} \dot{q}_j \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{R\psi q_j} \dot{q}_j \right] \{\dot{\mathbf{q}}_{1R}\} + \\ & + \left[-\frac{\partial}{\partial \phi_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{R\phi_3 q_j} \dot{q}_j \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \psi_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{R\psi_3 q_j} \dot{q}_j \right] \{\dot{\mathbf{q}}_{3R}\} \end{aligned} \quad (69)$$

que contiene el aporte inercial de cuerpo rígido del ala derecha FB₃, a las variables globales de las ecuaciones de movimiento. Se reconoce que las variables ϕ_3 , θ_3 y ψ_3 y sus derivadas son variables especificadas del movimiento y por lo tanto no se consideran los términos asociados a sus ecuaciones de movimiento.

El término de la ecuación (65) que considera la interacción de variables:

$$\delta T_{FB_3I} = \int_0^L m_{(x_3)} \left(\{\delta \mathbf{V}_{PR}^N\}^T [\mathbf{T}_{BA}] \{\dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A + \{\mathbf{V}_{PR}^N\}^T [\mathbf{T}_{BA}] \{\delta \dot{\mathbf{r}}_{PA}\}_A \right) dx_3 \quad (70)$$

aporta a las ecuaciones de movimiento de las variables globales y distribuidas a lo largo de la viga. Se trabaja explicitando el integrando en función de las variaciones de las coordenadas generalizadas, y aplicando la regla de integración por partes al usar el Principio de Hamilton Extendido, operando de la forma ya vista para la energía cinética de cuerpo rígido:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\partial}{\partial b_{1B}} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \right] \{\ddot{\mathbf{q}}_{1R}\} + \left[-\frac{\partial}{\partial \phi_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \psi_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \right] \{\ddot{\mathbf{q}}_{3R}\} + \\ & + \left[-\frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial w_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \right] \{\ddot{\mathbf{q}}_{3F}\} + \\ & + \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{I\phi q_j} \dot{q}_j \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{I\psi q_j} \dot{q}_j \right] \{\dot{\mathbf{q}}_{1R}\} + \\ & + \left[-\frac{\partial}{\partial \phi_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{I\phi_3 q_j} \dot{q}_j \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial \psi_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{I\psi_3 q_j} \dot{q}_j \right] \{\dot{\mathbf{q}}_{3R}\} + \\ & + \left[-\frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{Iu_3 q_j} \dot{q}_j \quad \dots \quad -\frac{\partial}{\partial w_3} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^n k_{Iw_3 q_j} \dot{q}_j \right] \{\dot{\mathbf{q}}_{3F}\} \end{aligned} \quad (71)$$

Esta última ecuación suma al término inercial de la ecuación para la variable q_i y debe ser integrada para la variable x_3 en caso de tratarse de ecuaciones de variables de cuerpo rígido.

Descripción de las ecuaciones resultantes para las variables globales

Se reconoce a las componentes inerciales del cuerpo FB₃ correspondientes a variables globales $b_{1B}, b_{2B}, b_{3B}, \phi, \theta, \psi$, como compuestas por los siguientes términos:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} G_{3b_{1B}}^{b_{1B}} & G_{3b_{2B}}^{b_{1B}} & \dots & G_{3\psi}^{b_{1B}} \\ G_{3b_{1B}}^{b_{2B}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ G_{3b_{1B}}^{\psi} & \dots & \dots & G_{3\psi}^{\psi} \end{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{q}}_{1R}\} + \begin{bmatrix} G_{3\phi_3}^{b_{1B}} & G_{3\theta_3}^{b_{1B}} & G_{3\psi_3}^{b_{1B}} \\ G_{3\phi_3}^{b_{2B}} & G_{3\theta_3}^{b_{2B}} & G_{3\psi_3}^{b_{2B}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{3\phi_3}^{\psi} & G_{3\theta_3}^{\psi} & G_{3\psi_3}^{\psi} \end{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{q}}_{3R}\} + \\ & + \begin{bmatrix} H_{3b_{1B}}^{b_{1B}} & H_{3b_{2B}}^{b_{1B}} & \dots & H_{3\psi}^{b_{1B}} \\ H_{3b_{1B}}^{b_{2B}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ H_{3b_{1B}}^{\psi} & \dots & \dots & H_{3\psi}^{\psi} \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{q}}_{1R}\} + \begin{bmatrix} H_{3\phi_3}^{b_{1B}} & H_{3\theta_3}^{b_{1B}} & H_{3\psi_3}^{b_{1B}} \\ H_{3\phi_3}^{b_{2B}} & H_{3\theta_3}^{b_{2B}} & H_{3\psi_3}^{b_{2B}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{3\phi_3}^{\psi} & H_{3\theta_3}^{\psi} & H_{3\psi_3}^{\psi} \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{q}}_{3R}\} + \begin{bmatrix} I_3^{b_{1B}} \\ I_3^{b_{2B}} \\ \vdots \\ I_3^{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (72)$$

donde: $G_{3q_j}^{q_i} = G_3 R_{q_j}^{q_i} + G_3 I_{q_j}^{q_i}$ siendo:

$$G_3 R_{q_j}^{q_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad \text{y} \quad G_3 I_{q_j}^{q_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \quad (73)$$

y $H_{3q_j}^{q_i} = H_3 R_{q_j}^{q_i} + H_3 I_{q_j}^{q_i}$ siendo:

$$H_3 R_{q_j}^{q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{k=1}^n k_{Rq_j q_k}^{q_i} \dot{q}_k \quad \text{y} \quad H_3 I_{q_j}^{q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{k=1}^n k_{Iq_j q_k}^{q_i} \dot{q}_k \quad (74)$$

$$\text{donde:} \quad k_{Rq_j q_k}^{q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3R}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right)}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \quad \text{y} \quad k_{Iq_j q_k}^{q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right)}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \quad (75)$$

En forma compacta la ecuación (72) se expresa:

$$[\mathbf{G}_3]_{6 \times 6} \{\ddot{\mathbf{q}}_{1R}\} + [\mathbf{H}_3]_{6 \times 6} \{\dot{\mathbf{q}}_{1R}\} + ([\mathbf{G}_{3S}]_{6 \times 3} \{\ddot{\mathbf{q}}_{3R}\} + [\mathbf{H}_{3S}]_{6 \times 3} \{\dot{\mathbf{q}}_{3R}\}) + \{\mathbf{I}_3\}_{6 \times 1} \quad (76)$$

Las componentes asociadas a δT_{FB_3R} pueden integrarse a lo largo de la viga en forma cerrada (ya que T_{FB_3R} es la energía cinética de la viga como rígido), y las componentes asociadas a δT_{FB_3I} deben integrarse numéricamente según sea el método empleado para discretizar la viga. Además:

$$I_3^{q_i} = \int_0^L \left(f_3^{q_i} (\ddot{u}_{3(x_3, t)}, \ddot{v}_{3(x_3, t)}, \ddot{w}_{3(x_3, t)}) + g_3^{q_i} (\dot{u}_{3(x_3, t)}, \dot{v}_{3(x_3, t)}, \dot{w}_{3(x_3, t)}) \right) dx_3 \quad (77)$$

siendo

$$f_3^{q_i} (\ddot{u}_3, \ddot{v}_3, \ddot{w}_3) = - \left[\frac{\partial}{\partial \dot{u}_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \ddot{u}_{3(x_3, t)} + \frac{\partial}{\partial \dot{v}_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \ddot{v}_{3(x_3, t)} + \frac{\partial}{\partial \dot{w}_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) \ddot{w}_{3(x_3, t)} \right] \quad (78)$$

$$g_3^{q_i} (\dot{u}_3, \dot{v}_3, \dot{w}_3) = \sum_{l=1}^3 \left[-\frac{\partial}{\partial u_l} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial \delta T_{FB_3I}}{\partial \delta \dot{q}_i} \right) + \sum_{k=1}^n k_{Iu_l q_k}^{q_i} \dot{q}_k \right] \dot{u}_l = 0 \quad (79)$$

La integral $I_3^{q_i}$ en (72) representa la resultante de las fuerzas distribuidas por aceleraciones e interacciones asociadas a las variables de deformación de la viga FB₃ sobre el grado de libertad q_i .

Descripción de las ecuaciones resultantes para las variables distribuidas

La componente inercial para las variables distribuidas (ecuaciones diferenciales en derivadas parciales) se divide en tres sumandos. Así para la variable $u_i = u_3, v_3, w_3$ se tiene:

$$-m_{(x_3)} \ddot{u}_{i(x_3,t)} + \left[G_{3b_{1B}}^{u_i} \ddot{b}_{1B} + G_{3b_{2B}}^{u_i} \ddot{b}_{2B} + \dots + G_{3\psi_3}^{u_i} \ddot{\psi}_3 \right] + \left[H_{3b_{1B}}^{u_i} \dot{b}_{1B} + H_{3b_{2B}}^{u_i} \dot{b}_{2B} + \dots + H_{3\psi_3}^{u_i} \dot{\psi}_3 \right] \quad (80)$$

$$\text{ó} \quad -m_{(x_3)} \ddot{u}_{i(x_3,t)} + \sum_{j=1}^{n_r} G_{3q_j}^{u_i} \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n_r} H_{3q_k}^{u_i} \dot{q}_k \quad (81)$$

siendo $q_j, q_k = \{b_{1B}, b_{2B}, b_{3B}, \phi, \theta, \psi, \phi_3, \theta_3, \psi_3\}$ y n_r el número de variables de cuerpo rígido afectadas. Los factores G_3 y H_3 se obtienen de manera equivalente al caso de las ecuaciones (73) y (74) pero se consideran aquí las variaciones de la densidad energética de la energía cinética $\delta \frac{\partial T_{FB_3}}{\partial x_3}$. Además los coeficientes $k_{lq_j q_k}^{u_i}$ resultan todos nulos.

Puede verse que el primer término de la ecuación anterior corresponde a la aceleración del grado de libertad u_i , y además aparecen dos términos con aceleraciones de variables globales y productos de velocidades (fuerzas centrífugas) produciendo cargas inerciales sobre dicho grado de libertad, que serán términos de carga para la ecuación correspondiente.

Componente potencial de las ecuaciones de movimiento de FB₃

En el caso de las alas se desprecia el peso de las mismas y la componente potencial se debe únicamente a la elasticidad y a la fuerza centrífuga originada por el movimiento de cuerpo rígido. Dichas alas se modelan en primera aproximación como vigas de Euler-Bernoulli.

Suponiendo los ejes de coordenadas de desplazamiento v_3 y w_3 orientados según ejes principales de la sección del ala, las relaciones cinemáticas y constitutivas resultan:

$$\text{- Esfuerzo axial:} \quad N_{x(x_3,t)} = EA_3 \varepsilon_x = EA_3 \frac{\partial u_{3(x_3,t)}}{\partial x_3} \quad (82)$$

donde E es el módulo de elasticidad, A_3 el área de la sección transversal y $N_{x(x_3,t)}$ es el esfuerzo axial de la viga FB₃ (esfuerzo según versor $\hat{\mathbf{a}}_1$). ε_x es la deformación específica.

$$\text{- Esfuerzo de torsión:} \quad M_{x(x_3,t)} = GJ \chi_x = GJ \frac{\partial \theta_{3x(x_3,t)}}{\partial x_3} \quad (83)$$

donde G es el módulo de corte, J es la rigidez torsional y θ_{3x} es el ángulo de torsión de la viga (según el versor $\hat{\mathbf{a}}_1$). La variable χ_x es el cambio de ángulo de torsión por unidad de longitud.

$$\text{- Flexión sobre el plano } \hat{\mathbf{a}}_1 - \hat{\mathbf{a}}_2: \quad M_{z(x_3,t)} = EI_z \chi_z = EI_z \frac{\partial \theta_{3z(x_3,t)}}{\partial x_3} = EI_z \frac{\partial^2 v_{3(x_3,t)}}{\partial x_3^2} \quad (84)$$

donde I_z es el momento de inercia de la sección respecto del eje $\hat{\mathbf{a}}_3$, y χ_z es la curvatura de flexión respecto de dicho eje.

- Flexión sobre el plano $\hat{\mathbf{a}}_1 - \hat{\mathbf{a}}_3$: $M_{y(x_3,t)} = EI_y \chi_y = EI_y \frac{\partial \theta_{3y(x_3,t)}}{\partial x_3} = -EI_z \frac{\partial^2 w_{3(x_3,t)}}{\partial x_3^2}$ (85)

donde I_y es el momento de inercia de la sección respecto del eje $\hat{\mathbf{a}}_2$, y χ_y es la curvatura de flexión respecto de dicho eje.

La energía potencial de deformación de la viga resulta:

$$V_{FB_3,def} = \frac{1}{2} \int_0^L (N_x \varepsilon_x + M_x \chi_x + M_z \chi_z + M_y \chi_y) dx_3$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA_3 (u'_{3(x_3,t)})^2 + GJ (\theta'_{3x(x_3,t)})^2 + EI_z (v''_{3(x_3,t)})^2 + EI_y (w''_{3(x_3,t)})^2 \right] dx_3 \quad (86)$$

La prima sobre las variables significa que se encuentran derivadas respecto de la coordenada espacial x_3 . Se considera también la energía potencial adicional debida a la fuerza centrífuga. Dicha fuerza tiene un efecto rigidizador sobre los desplazamientos transversales de la viga. En una sección definida por la coordenada x_3 de la viga, la fuerza axial debida a la acción centrífuga es:

$$Fc = \int_{x_3}^L m_{(x_3)} \left[\left\{ \left\{ {}^N \boldsymbol{\omega}_A^A \right\} \times \left(\left\{ {}^N \boldsymbol{\omega}_A^A \right\} \times \left\{ \mathbf{r}_{PA} \right\}_A \right) \right\} \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 \right] dx_3 \quad \text{donde: } \left\{ {}^N \boldsymbol{\omega}_A^A \right\} = [\mathbf{T}_{BA}]^T \left\{ \left\{ {}^N \boldsymbol{\omega}_B^B \right\} + \left\{ {}^B \boldsymbol{\omega}_B^A \right\} \right\} \quad (87)$$

La fuerza centrífuga Fc es función de las coordenadas $\phi, \theta, \psi, \phi_3, \theta_3, \psi_3$ y de sus derivadas temporales. La expresión (87) resulta correcta para el caso donde la velocidad de giro de todo el modelo es mucho menor que la velocidad de giro del ala respecto del cuerpo del mismo. La energía potencial adicional resulta:

$$V_{FB_3,ad} = \frac{1}{2} \int_0^L Fc_{(x_3,t)} \left[(v'_{3(x_3,t)})^2 + (w'_{3(x_3,t)})^2 \right] dx_3 \quad (88)$$

El trabajo virtual debido a fuerzas y momentos externos actuando sobre la viga resulta:

$$\delta W_{FB_3} = \int_0^L (p_{x(x_3,t)} \delta u_3 + p_{y(x_3,t)} \delta v_3 + p_{z(x_3,t)} \delta w_3 + m_{x(x_3,t)} \delta \theta_{3x} + m_{z(x_3,t)} \delta v'_3 - m_{y(x_3,t)} \delta w'_3) dx_3 \quad (89)$$

Se aplica entonces el Principio de Hamilton Extendido sobre estas dos componentes restantes para obtener las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales correspondientes a las variables distribuidas. Notar que, como no se ha tenido en cuenta la velocidad de giro de torsión relativa $\dot{\theta}_{3x}$ en la derivación de la componente inercial de las ecuaciones diferenciales se llega a una ecuación estática con deformación en el tiempo. Dicha deformación se debe a la variación del momento tursor dado por las cargas aerodinámicas.

La variación de la energía potencial en el Principio de Hamilton Extendido resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} (-\delta V_{FB_3}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[-EA_3 u'_3 \delta u'_3 - GJ \theta'_{3x} \delta \theta'_{3x} - EI_z v''_3 \delta v''_3 - \right. \\ \left. - EI_y w''_3 \delta w''_3 - Fc_{(x_3,t)} (v'_3 \delta v'_3 + w'_3 \delta w'_3) \right] dx_3 dt \quad (90)$$

Efectuando la integración por partes de cada término de (81) respecto de la coordenada x_3 se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} (-\delta V_{FB_3}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_3} (EA_3 u_3') \delta u_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} (GJ \theta_{3x}') \delta \theta_{3x} + \\ & + \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (EI_z v_3'') + \frac{\partial}{\partial x_3} (Fc_{(x_3,t)} v_3') \right] \delta v_3 + \\ & + \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (EI_y w_3'') + \frac{\partial}{\partial x_3} (Fc_{(x_3,t)} w_3') \right] \delta w_3 \end{aligned} \right] dx_3 dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\begin{aligned} & [-EA_3 u_3' \delta u_3]_0^L + [-GJ \theta_{3x}' \delta \theta_{3x}]_0^L + \\ & + [-EI_z v_3'' \delta v_3']_0^L + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_3} (EI_z v_3'') - Fc_{(x_3,t)} v_3' \right) \delta v_3 \right]_0^L + \\ & + [-EI_y w_3'' \delta w_3']_0^L + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_3} (EI_y w_3'') - Fc_{(x_3,t)} w_3' \right) \delta w_3 \right]_0^L \end{aligned} \right] dt \quad (91)$$

Por último, aplicando el Principio de Hamilton sobre las fuerzas externas en la ecuación (80) y después de aplicar la integración por partes sobre los momentos flectores externos, se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W_{FB_3}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\begin{aligned} & p_{x(x_3,t)} \delta u_3 + \left[p_{y(x_3,t)} - \frac{\partial}{\partial x_3} (m_{z(x_3,t)}) \right] \delta v_3 + \\ & + \left[p_{z(x_3,t)} + \frac{\partial}{\partial x_3} (m_{y(x_3,t)}) \right] \delta w_3 + m_{x(x_3,t)} \delta \theta_{3x} \end{aligned} \right] dx_3 dt \quad (92)$$

Con este resultado y la expresión (91) se obtienen las componentes potenciales y las debidas a las fuerzas externas en las ecuaciones diferenciales de las variables distribuidas u_3 , v_3 , w_3 y θ_{3x} . Además se obtienen las condiciones de contorno que en el caso del problema descrito toman valores particulares y se estudian a continuación.

Ecuaciones diferenciales resultantes para las variables u_3 , v_3 , w_3 y θ_{3x}

Las ecuaciones diferenciales para las variables distribuidas u_3 , v_3 , w_3 y θ_{3x} se obtienen a partir de las ecuaciones (81) para la componente inercial, (91) para la componente potencial y condiciones de contorno y (92) para las fuerzas externas no conservativas. Para las condiciones de contorno se reconoce que la viga, vista desde el marco de referencia sobre el cual están definidas las variables distribuidas, se encuentra **empotrada** en $x_3 = 0$ y **libre** en $x_3 = L$. Así se tiene:

- Para la variable u_3 :

$$m_{(x_3)} \ddot{u}_{3(x_3,t)} - \frac{\partial}{\partial x_3} (EA_3 u_3') = p_{x(x_3,t)} + \left(\sum_{j=1}^{n_r} G_{3q_j}^{u_3} \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n_r} H_{3q_k}^{u_3} \dot{q}_k \right) \quad (93)$$

siendo $q_j, q_k = \{b_{1B}, b_{2B}, b_{3B}, \phi, \theta, \psi, \phi_3, \theta_3, \psi_3\}$. Siendo las condiciones de contorno:

$$\left[-EA_3 u_3' \delta u_3 \right]_0^L = 0 \quad \delta u_3 = 0 \quad \text{en } x_3 = 0 \quad N_{x(x_3,t)} = EA_3 u_3' = 0 \quad \text{en } x_3 = L \quad (94)$$

- Para la variable v_3 :

$$m_{(x_3)} \ddot{v}_{3(x_3,t)} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (EI_z v_3'') - \frac{\partial}{\partial x_3} (Fc_{(x_3,t)} v_3') = p_{y(x_3,t)} - \frac{\partial}{\partial x_3} (m_{z(x_3,t)}) + \left(\sum_{j=1}^{n_r} G_{3q_j}^{v_3} \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n_r} H_{3q_k}^{v_3} \dot{q}_k \right) \quad (95)$$

teniendo las siguientes condiciones de contorno:

$$\left[EI_z v_3'' \delta v_3' \right]_0^L = 0 \quad \delta v_3' = 0 \text{ en } x_3 = 0 \quad M_{z(x_3, t)} = EI_z v_3'' = 0 \text{ en } x_3 = L \quad (96)$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_3} (EI_z v_3'') - Fc_{(x_3, t)} v_3' \right) \delta v_3 \right]_0^L = 0 \quad \delta v_3 = 0 \text{ en } x_3 = 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (EI_z v_3'') - Fc_{(x_3, t)} v_3' \right) = 0 \text{ en } x_3 = L \quad (97)$$

• Para la variable w_3 :

$$m_{(x_3)} \ddot{w}_{3(x_3, t)} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (EI_z w_3'') - \frac{\partial}{\partial x_3} (Fc_{(x_3, t)} w_3') = p_{z(x_3, t)} + \frac{\partial}{\partial x_3} (m_{y(x_3, t)}) + \left(\sum_{j=1}^{n_r} G_{3q_j}^{w_3} \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n_r} H_{3q_k}^{w_3} \dot{q}_k \right) \quad (98)$$

teniéndose las siguientes condiciones de contorno:

$$\left[EI_z w_3'' \delta w_3' \right]_0^L = 0 \quad \delta w_3' = 0 \text{ en } x_3 = 0 \quad M_{y(x_3, t)} = -EI_z w_3'' = 0 \text{ en } x_3 = L \quad (99)$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_3} (EI_z w_3'') - Fc_{(x_3, t)} w_3' \right) \delta w_3 \right]_0^L = 0 \quad \delta w_3 = 0 \text{ en } x_3 = 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (EI_z w_3'') - Fc_{(x_3, t)} w_3' \right) = 0 \text{ en } x_3 = L \quad (100)$$

• Para la variable θ_{3x} :

$$- \frac{\partial}{\partial x_3} (GJ \theta_{3x}') = m_{x(x_3, t)} \quad (101)$$

Esta última es una ecuación estática desacoplada inercialmente de las demás ecuaciones de movimiento, cuyo valor de deformación es función del momento torsor generado por las fuerzas aerodinámicas. Es decir que, el acoplamiento de esta última ecuación con las demás coordenadas generalizadas del modelo está dado a nivel del vector de cargas generalizadas, asociado al modelo aerodinámico. El valor del momento torsor en la raíz del ala debe ser descompuesto en un sistema equivalente de fuerzas y momentos actuando sobre los grados de libertad b_{1B} , b_{2B} , b_{3B} , ϕ , θ , ψ del modelo. Las condiciones de contorno resultan:

$$\left[-EA_3 u_3' \delta u_3 \right]_0^L = 0 \quad \delta u_3 = 0 \text{ en } x_3 = 0 \quad N_{x(x_3, t)} = EA_3 u_3' = 0 \text{ en } x_3 = L \quad (102)$$

$$\left[GJ \theta_{3x}' \delta \theta_{3x} \right]_0^L = 0 \quad \delta \theta_{3x} = 0 \text{ en } x_3 = 0 \quad M_{x(x_3, t)} = GJ \theta_{3x}' = 0 \text{ en } x_3 = L \quad (103)$$

La derivación de las ecuaciones de movimiento del ala izquierda y su aporte a la componente inercial del modelo completo resulta similar a lo visto para el ala derecha.

Interacción entre cuerpos rígidos y flexibles del modelo:

En las ecuaciones (93), (95) y (98), que definen el movimiento de deformación de la viga en flexión, se observa la adición de un término de carga en cada una de ellas. Dicho término está asociado a fuerzas inerciales que son función de las aceleraciones y velocidades generalizadas de cuerpo rígido del cuerpo RB_1 y también del ala. Por otro lado, en la ecuación (72), que aporta a la componente inercial de las variables globales, tanto las matrices como el término independiente debido al trabajo virtual de las fuerzas de inercia causadas por la deformación, son función de las integrales de los valores que toman los desplazamientos distribuidos y sus derivadas temporales.

En conjunto se tiene un sistema de ecuaciones integro-diferenciales fuertemente acopladas que gobierna el movimiento del modelo híbrido. Previo a la implementación del esquema de integración que se adopte para resolver en el tiempo este sistema de ecuaciones, deben discretizarse en el espacio las ecuaciones de los sistemas continuos. Para ello se ha adoptado en este caso el método de elementos finitos. Dicho método posee la ventaja, sobre otros métodos de discretización, de permitir un acoplamiento sencillo entre el modelo estructural y la grilla aerodinámica que se utilizará para la evaluación de cargas no conservativas, tarea que se plantea para el futuro.

4 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrolló el sistema de ecuaciones que gobiernan el movimiento del modelo híbrido planteado. Para ello se trabajó sobre las expresiones de las velocidades resultantes en puntos de cada uno de los cuerpos componentes aplicándose el Principio de Hamilton extendido. El sistema resultante suma para las variables del movimiento del cuerpo RB_1 los aportes inerciales del propio cuerpo RB_1 , del cuerpo rígido RB_2 , y los aportes de cuerpo rígido y flexible de las alas. La interacción entre el movimiento del conjunto y las deformaciones por flexibilidad de las alas lleva a un sistema de ecuaciones altamente no lineales y fuertemente acopladas.

Actualmente se está trabajando en la discretización de las ecuaciones en derivadas parciales de los cuerpos flexibles y en la implementación computacional de un algoritmo de integración predictor-corrector¹¹ de las ecuaciones de movimiento que permitirá en un futuro adicionar un modelo de predicción de cargas aerodinámicas, y la integración simultánea del conjunto en el tiempo.

5. REFERENCIAS

- [1] M. Vanella, S. Preidikman y J. Massa, “Un modelo híbrido de cuerpos rígidos y flexibles para estudiar la cinemática no-lineal de micro-vehículos aéreos súper-maniobrables no-tripulados de alas batientes inspirados en la biología”, *Congreso Argentino de Tecnología Espacial CATE 2005*, (2005).
- [2] C. Ellington, “The Novel Aerodynamics of Insect Flight: Applications to Micro-Air Vehicles”, *Journal of Experimental Biology*, Vol. 202, 3439-3448 (1999).
- [3] M. Dickinson, “Solving the Mystery of Insect Flight”, *Scientific American*, 34 - 41 (2001).
- [4] S. P. Sane, “The Aerodynamics of Insect Flight”, *The Journal of Experimental Biology*, Vol. 206, 4191-4208 (2003).
- [5] A. Azuma, M. Okamoto and K. Yasuda, “Aerodynamic Characteristics of Wings at Low Reynolds Number”, *Progress in Astronautics and Aeronautics* Vol. 195, 341-398 (2001).
- [6] W. Shyy, M. Berg and D. Ljungqvist, “Flapping and Flexible Wings for Biological and Micro Air Vehicles”, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 35, 455-505 (1999).
- [7] H. Baruh, *Analytical Dynamics*, WCB/McGraw-Hill. (1999).
- [8] L. Meirovitch, *Principles and Techniques of Vibrations*, Prentice Hall (1997).
- [9] A. Shabana, *Computational Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc. (1994).
- [10] S. Preidikman, “Numerical Simulations of Interactions Among Aerodynamics, Structural Dynamics and Control Systems”, *Tesis Doctoral, Virginia Polytechnic Institute and State University* (1998).