

SUBDIVISION DE CURVAS BETA-SPLINE CUBICAS

Diana Salgado^a, Liliana Castro^a, Silvia Castro^b y Susana Kahnert^b

^a*Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, B8000CPB, Argentina,
lcastro@uns.edu.ar, dsalgado@uns.edu.ar*

^b*Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación, Universidad Nacional del Sur, Bahía
Blanca, B8000CPB, Argentina, smc@cs.uns.edu.ar, sak@cs.uns.edu.ar*

Palabras clave: Matrices de subdivisión, polígono de control, curvas Beta-spline.

Resumen. En este trabajo empleamos una técnica de subdivisión para calcular los puntos de control que subdividen a curvas polinómicas. Dados un polígono de control y la curva polinómica generada por ese polígono, mediante operaciones matriciales obtenemos polígonos a izquierda y a derecha, que aproximan a esa curva. En este artículo consideramos el caso de las curvas Beta-spline cúbicas, con parámetros de sesgo y de tensión, y realizamos la subdivisión para distintos valores del parámetro de sesgo. Además, analizamos el comportamiento de la subdivisión cuando ésta se realiza utilizando el punto medio y otros puntos diferentes al punto medio, considerando fijos los parámetros de sesgo y de tensión. Detallamos explícitamente las matrices de subdivisión utilizadas para cada caso, así como también la representación gráfica de los subpolígonos obtenidos en los distintos pasos de la subdivisión.

1. INTRODUCCION

Uno de los métodos que permite generar curvas de subdivisión es el desarrollado por Goldman y DeRose (ver [Goldman y DeRose \(1986\)](#)). Mediante este método se obtienen polígonos de control \mathbf{L} (a izquierda) y \mathbf{R} (a derecha) tales que dividen a la curva $\mathbf{B}[\mathbf{P}](t)$ en algún valor $c \in (0, 1)$. Si suponemos que $\mathbf{B}[\mathbf{P}]([a, b])$ representa la curva cuando el parámetro varía sobre el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\mathbf{B}[\mathbf{P}]([0, 1]) = \mathbf{B}[\mathbf{L}]([0, 1]) \cup \mathbf{B}[\mathbf{R}]([0, 1]).$$

Más precisamente,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}[\mathbf{L}]([0, 1]) &= \mathbf{B}[\mathbf{P}]([0, c]) \\ \mathbf{B}[\mathbf{R}]([0, 1]) &= \mathbf{B}[\mathbf{P}]([c, 1]),\end{aligned}$$

donde cada uno de los polígonos \mathbf{P} , \mathbf{L} , y \mathbf{R} representa un conjunto de puntos en el plano.

Ronald Goldman y Tony DeRose (ver [Goldman y DeRose \(1986\)](#)) desarrollaron una forma de encontrar las matrices de subdivisión a izquierda y a derecha que se aplican a un determinado polígono de control para obtener subpolígonos a izquierda y a derecha, considerando para ello el caso de la subdivisión de curvas polinómicas.

Nuestro interés es mostrar explícitamente las matrices de subdivisión para curvas Beta-splines cúbicas, para distintos valores de los parámetros de sesgo y de tensión, dado que estas matrices nos brindarán los puntos de control correspondientes a \mathbf{L} y \mathbf{R} . Asimismo queremos mostrar, gráficamente, la influencia de estos parámetros en la subdivisión.

En un trabajo anterior (ver [Castro y otros \(2007\)](#)) analizamos el comportamiento de la subdivisión considerando el parámetro de sesgo $\beta_1 = 1$, el parámetro de tensión β_2 variable y $c = 1/2$ para un solo trozo de la curva. En este artículo, analizamos el comportamiento de la subdivisión, en primer lugar, para β_2 con valor fijo ($\beta_2 = 0$), β_1 variable y $c = 1/2$, y en segundo lugar, para distintos valores de c . Dado que, a partir de cuatro puntos de control se genera un solo trozo de la curva, hicimos también una extensión a un conjunto con mayor número de puntos de control.

2. MATRICES DE SUBDIVISION

En esta sección se desarrolla una técnica para calcular los puntos de control que subdividen a curvas polinómicas.

Sea $B(t) = (B_0(t), \dots, B_n(t))$, con $B_0(t), \dots, B_n(t)$ funciones que forman una base para la curva polinómica $\mathbf{B}[\mathbf{P}](t)$ de grado n , para la cual será construido un algoritmo de subdivisión, siendo $\mathbf{P} = (P_0, \dots, P_n)$ el polígono de control y P_0, \dots, P_n los puntos de control. Es decir, consideremos

$$\mathbf{B}[\mathbf{P}](t) = \sum_{k=0}^n B_k(t) P_k = B(t) * \mathbf{P}^t,$$

siendo \mathbf{P}^t la traspuesta de \mathbf{P} y “*” representa la multiplicación de matrices. Las funciones $B_0(t), \dots, B_n(t)$ son continuas, suman uno y, dado que forman una base, son linealmente independientes sobre el intervalo $[0, 1]$. Estas tres propiedades nos aseguran que, si un algoritmo de subdivisión es aplicado a la curva $\mathbf{B}[\mathbf{P}](t)$, entonces los polígonos de control convergen a la curva, como se prueba en [Goldman y DeRose \(1986\)](#).

Como $B(t)$ es una base para el espacio de los polinomios de grado n , existen matrices S_L y S_R (ver [Goldman y DeRose \(1986\)](#)) que dependen de c , $c \in (0, 1)$ tales que:

$$\begin{cases} B(ct) = B(t) * S_L \\ B(c + (1 - c)t) = B(t) * S_R, \end{cases} \quad (1)$$

donde S_L y S_R son matrices que reparametrizan las funciones $B_0(t), \dots, B_n(t)$; en el caso de la subdivisión en el punto medio, es $c = \frac{1}{2}$.

Sea $\mathbf{P} = (P_0, \dots, P_n)$ el polígono de control; buscamos expresiones para \mathbf{L} y \mathbf{R} tales que:

$$\begin{cases} \mathbf{B}[\mathbf{L}](t) = \mathbf{B}[\mathbf{P}](ct) \\ \mathbf{B}[\mathbf{R}](t) = \mathbf{B}[\mathbf{P}](c + (1 - c)t), \end{cases} \quad (2)$$

donde \mathbf{L} y \mathbf{R} son los subpolígonos a izquierda y a derecha respectivamente, en los cuales queda dividido el polígono original \mathbf{P} .

En forma matricial, esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$B(t) * \mathbf{L}^t = B(ct) * \mathbf{P}^t$$

$$(B_0(t) \quad \dots \quad B_n(t)) * \begin{pmatrix} L_0 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = (B_0(ct) \quad \dots \quad B_n(ct)) * \begin{pmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo por la primera ecuación de (1) obtenemos que

$$B(t) * \mathbf{L}^t = B(t) * S_L * \mathbf{P}^t.$$

Como $B_0(t), \dots, B_n(t)$ son linealmente independientes, se concluye que

$$\mathbf{L}^t = S_L * \mathbf{P}^t \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} L_0 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = S_L * \begin{pmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}.$$

Similarmente obtenemos que:

$$\mathbf{R}^t = S_R * \mathbf{P}^t.$$

Por lo tanto, las matrices que reparametrizan las funciones de la combinación lineal sirven, además, para subdividir los polígonos de control. El próximo lema nos da expresiones explícitas para las matrices.

Lema 1 Sea $T = (t_0, \dots, t_n)$ una sucesión de constantes tales que $0 \leq t_k \leq 1$ (ver lema 2.1 de [Goldman y DeRose \(1986\)](#)), y sea $0 \leq c \leq 1$ una constante. Entonces S_L y S_R están dadas explícitamente por

$$\begin{cases} S_L = B(T)^{-1} * B(cT) \\ S_R = B(T)^{-1} * B(c + (1 - c)T) \end{cases} \quad (4)$$

donde $cT = (ct_0, \dots, ct_n)$, $c + (1 - c)T = (c + (1 - c)t_0, \dots, c + (1 - c)t_n)$ y

$$B(T) = \begin{pmatrix} B_0(t_0) & \dots & B_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ B_0(t_n) & \dots & B_n(t_n) \end{pmatrix}.$$

Demostración: De (1), $B(ct_i) = B(t_i) * S_L$, con $i = 0, \dots, n$ y ésto, en forma matricial, es $B(cT) = B(t) * S_L$

$$\begin{pmatrix} B_0(ct_0) & B_1(ct_0) & \cdots & B_n(ct_0) \\ B_0(ct_1) & B_1(ct_1) & \cdots & B_n(ct_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_0(ct_n) & B_1(ct_n) & \cdots & B_n(ct_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0(t_0) & B_1(t_0) & \cdots & B_n(t_0) \\ B_0(t_1) & B_1(t_1) & \cdots & B_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_0(t_n) & B_1(t_n) & \cdots & B_n(t_n) \end{pmatrix} * S_L$$

Así, $S_L = B(T)^{-1} * B(cT)$.

En forma similar se encuentra la expresión de S_R . \square

Estas matrices de subdivisión pueden determinarse a partir de las matrices de subdivisión de Bézier S_L^B y S_R^B , como en el caso de cualquier técnica polinomial. Dadas las funciones de Bézier de grado n (los polinomios de Bernstein) denotadas por $b_0^n(t), \dots, b_n^n(t)$, es decir

$$b_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, i = 0, \dots, n,$$

las matrices S_L^B y S_R^B se obtienen a partir de un algoritmo desarrollado en Goldman (1982) y en Goldman (1985), y están dadas por

$$S_L^B = \begin{pmatrix} b_0^0(c) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_0^1(c) & b_1^1(c) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_0^n(c) & b_1^n(c) & b_2^n(c) & \cdots & b_n^n(c) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$S_R^B = \begin{pmatrix} b_0^n(c) & b_1^n(c) & \cdots & b_n^n(c) \\ 0 & b_0^{n-1}(c) & \cdots & b_{n-1}^{n-1}(c) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_0^0(c) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Sea C la matriz cuyas componentes son los coeficientes de las combinaciones lineales que surgen de expresar cada función de la base $B(t) = (B_0(t), \dots, B_n(t))$ en términos de las funciones de la base de Bernstein $b(t) = (b_0^n(t), \dots, b_n^n(t))$, esto es C es tal que:

$$\begin{aligned} B(t) &= b(t) * C \\ b(t) &= B(t) * C^{-1}. \end{aligned}$$

Entonces por (1),

$$B(t) * S_L = B(ct) = b(ct) * C = b(t) * S_L^B * C = B(t) * C^{-1} * S_L^B * C.$$

Por la linealidad de $B(t)$ se verifica que

$$S_L = C^{-1} * S_L^B * C. \quad (7)$$

En forma similar, se demuestra que

$$S_R = C^{-1} * S_R^B * C. \quad (8)$$

De (7) y (8) resulta que S_L es similar a S_L^B y que S_R es similar a S_R^B .

Las matrices de los ejemplos que daremos en este trabajo fueron construidas usando las ecuaciones (7) y (8).

Concluimos esta sección con algunos resultados que nos permiten asegurar con precisión cuándo los polígonos de subdivisión permanecen en la cápsula convexa del polígono de control original.

Lema 2 Sea $T = (t_0, \dots, t_n)$ una sucesión de números reales tales que $0 \leq t_k \leq 1$. Consideremos

$$B(T) = \begin{pmatrix} B_0(t_0) & \cdots & B_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ B_0(t_n) & \cdots & B_n(t_n) \end{pmatrix}$$

y sea $B(T)^{-1} = \{b_{ij}(T)\}$. Entonces $\sum_j b_{ij}(T) = 1, i = 0, \dots, n$. Esto es, las filas de $B(T)^{-1}$ suman uno.

Demostración: Sea $\mathbf{u} = (1, \dots, 1)$ un vector fila de n componentes. Sabemos que $\sum_{j=0}^n B_j(t_i) = 1, i = 0, \dots, n$, o lo que es equivalente

$$B(T) * \mathbf{u}^t = \mathbf{u}^t.$$

Multiplicamos ambos miembros por $B(T)^{-1}$, obtenemos

$$B(T)^{-1} * \mathbf{u}^t = \mathbf{u}^t,$$

es decir

$$\sum_j b_{ij}(T) = 1, i = 0, \dots, n. \square$$

Lema 3 Las filas de $S_L = (l_{ij})$ suman uno. Esto es $\sum_j l_{ij} = 1$. Análogamente, las filas de $S_R = (r_{ij})$ suman uno.

Demostración: Recordemos que $B_0(t), \dots, B_n(t)$ suman uno $\forall t \in [0, 1]$ y como cada elemento de cT está en $[0, 1]$, las filas de $B(cT)$ deben sumar uno. Esto es, si $\mathbf{u} = (1, 1, \dots, 1)$, entonces

$$B(cT) * \mathbf{u}^t = \mathbf{u}^t.$$

Multiplicando a ambos lados por $B(T)^{-1}$ y aplicando el Lema 2 y el Lema 1, obtenemos

$$S_L * \mathbf{u}^t = B(T)^{-1} * B(cT) * \mathbf{u}^t = B(T)^{-1} * \mathbf{u}^t = \mathbf{u}^t.$$

Entonces las filas de S_L suman uno. Un análisis similar muestra que las filas de S_R suman uno. \square

Lema 4 Se garantiza que los polígonos de subdivisión \mathbf{L} (\mathbf{R}) permanecen íntegramente en la cápsula convexa de \mathbf{P} si y sólo si los elementos de las matrices S_L (S_R) son no negativos.

Demostración: Sea $\mathbf{L} = (L_0, \dots, L_n)$, $S_L = (l_{ij})$. Entonces, de (3) sigue que

$$L_i = \sum_j l_{ij} P_j.$$

Así, L_i permanece en la cápsula convexa de P_j si y sólo si l_{i0}, \dots, l_{in} son todos no negativos y

$$\sum_j l_{ij} = 1.$$

Esto es, las filas de S_L deben sumar uno y sus entradas deben ser no negativas. Pero, por el Lema 3, se sabe que las filas suman uno, entonces, todo lo que se requiere es que las entradas sean no negativas.

Un argumento similar se usa para probar el resultado para los puntos de control de \mathbf{R} . \square

3. EJEMPLO: CURVA BETA-SPLINE CUBICA

La curva Beta-spline cúbica es una generalización de la B-spline cúbica uniforme, en la cual la propiedad de continuidad paramétrica de segundo grado (C^2) es reemplazada por la de continuidad geométrica (G^2). Para más detalles sobre estos conceptos, recomendamos ver [Castro y otros \(2007\)](#).

Un trozo de la curva Beta-spline cúbica está caracterizado por las funciones $B_0(t), \dots, B_3(t)$ definidas por:

$$\begin{cases} B_0(t) = \frac{1}{\delta}[2\beta_1^3 - 6\beta_1^3 t + 6\beta_1^3 t^2 - 2\beta_1^3 t^3] \\ B_1(t) = \frac{1}{\delta}[(\beta_2 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1) + (6\beta_1^3 - 6\beta_1)t - (3\beta_2 + 6\beta_1^3 + 6\beta_1^2)t^2 \\ \quad + (2\beta_2 + 2\beta_1^3 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1)t^3] \\ B_2(t) = \frac{1}{\delta}[2 + 6\beta_1 t + (3\beta_2 + 6\beta_1^2)t^2 - (2\beta_2 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1 + 2)t^3] \\ B_3(t) = \frac{1}{\delta}2t^3, \end{cases}$$

donde $\delta = \beta_2 + 2\beta_1^3 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1 + 2$, β_1 es el parámetro de sesgo y β_2 es el parámetro de tensión, como se puede ver en [Barsky y Beatty \(1983\)](#).

Si se desea que la curva posea la propiedad de la cápsula convexa, basta con asignarle valores a los parámetros, de tal manera que las funciones $B_0(t), \dots, B_3(t)$ sean no negativas.

La matriz de subdivisión $S_L = [l_{ij}]$ se construye a partir de la ecuación (7) $S_L = C^{-1} * S_L^B * C$. La matriz $S_R = [r_{ij}]$ es tal que $r_{ij} = l_{5-i, 5-j}$ con $i, j = 1, \dots, 4$.

Para obtener la matriz C realizamos el siguiente procedimiento:

- Expresamos cada $B_i(t)$, $i = 0, \dots, 3$, como una combinación lineal de las funciones $b_0^3(t)$, $b_1^3(t)$, $b_2^3(t)$ y $b_3^3(t)$.
- Cada uno de los coeficientes de esta combinación lineal formarán la $(i+1)$ -ésima columna de C , con $i = 0, \dots, 3$.

Considerando $\gamma = \frac{1}{\delta}$, la matriz C presenta la siguiente forma general:

$$\begin{pmatrix} 2\gamma\beta_1^3 & \gamma(\beta_2 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1) & 2\gamma & 0 \\ 0 & \gamma(2\beta_1^3 + 2\beta_1 + \beta_2 + 4\beta_1^2) & \gamma(2\beta_1 + 2) & 0 \\ 0 & \gamma(2\beta_1^3 + 2\beta_1^2) & \gamma(\beta_2 + 2\beta_1^2 + 4\beta_1 + 2) & 0 \\ 0 & 2\gamma\beta_1^3 & \gamma(\beta_2 + 4\beta_1 + 4\beta_1^2) & 2\gamma \end{pmatrix}$$

Debido a que estamos considerando $n = 3$, la matriz S_L^B será de orden cuatro (ver ecuación (5)), y cuatro serán también los puntos de control del polígono original \mathbf{P} necesarios para obtener un trozo de la curva Beta-spline.

Una vez obtenidas las matrices C y S_L^B , estamos en condiciones de hallar S_L . Luego, a partir de ésta, calculamos S_R . Si multiplicamos S_L y S_R por el vector columna \mathbf{P}^t , obtenemos los vectores columnas \mathbf{L}^t y \mathbf{R}^t , respectivamente.

Utilizando el software Mathematica desarrollamos un algoritmo que nos permite hallar S_L y S_R para distintos valores de β_1 y β_2 y para un c cualquiera. Este algoritmo se encuentra incluido en el apéndice del artículo de Castro y otros (2007).

En lo que respecta a la representación gráfica, hemos elaborado un algoritmo, utilizando el software MATLAB, que genera los puntos de control a izquierda y a derecha, en los distintos pasos de la subdivisión y grafica los polígonos que estos puntos determinan, respectivamente.

En el artículo de Castro y otros (2007) analizamos el comportamiento de la subdivisión al variar el parámetro de tensión β_2 , manteniendo fijos el valor del parámetro de sesgo ($\beta_1 = 1$) y el valor de c ($c = 1/2$) y considerando para ello un polígono de control formado por cuatro puntos. En este trabajo analizamos el caso en el cual varía β_1 y se mantienen fijos β_2 y c ($\beta_2 = 0$ y $c = 1/2$) y luego estudiamos el comportamiento de la subdivisión al variar c y mantener fijos los parámetros β_1 y β_2 ($\beta_1 = 1$ y $\beta_2 = 0$).

A medida que el número de pasos de la subdivisión aumenta, los subpolígonos que obtenemos se van superponiendo y no es posible distinguir con claridad cada uno de ellos. Con el objeto de visualizarlos con claridad, en la Figura 1, mostramos los subpolígonos a izquierda y a derecha, generados en el primer paso de la subdivisión con $\beta_1 = 1,5$ y $\beta_2 = 0$. A su vez, en esa figura podemos apreciar la curva Beta-spline determinada por los puntos del polígono de control, la cual se encuentra graficada con línea continua.

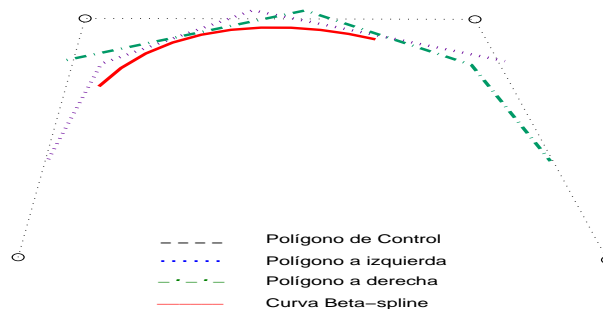


Figura 1: Un paso de la subdivisión para $\beta_1 = 1,5$, $\beta_2 = 0$ y $c = 1/2$

Como se aclaró anteriormente, cada trozo de la curva Beta-spline se obtiene a partir de cuatro puntos del polígono de control. En los casos que siguen consideramos curvas generadas por un conjunto mayor de puntos de control.

En primer lugar, observamos que si $\beta_1 > 1$ y a medida que su valor aumenta, los subpolígonos obtenidos en cada tramo contienen vértices que dejan de pertenecer a la cápsula convexa, como se puede apreciar en la Figura 2.

Por otro lado, si $\beta_1 < 1$ y a medida que su valor se acerca más a cero, observamos el mismo comportamiento, como podemos ver en la Figura 3.

En los dos casos anteriores, tanto si $0 < \beta_1 < 1$ o $\beta_1 > 1$, se observa que es necesario un número mayor de pasos de subdivisión para obtener una buena aproximación, es decir una

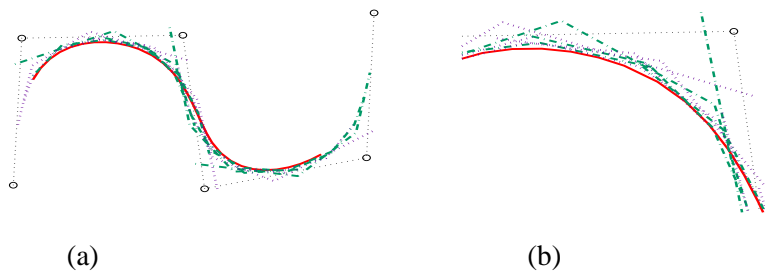


Figura 2: Dos pasos de la subdivisión para $\beta_1 = 1,5$, $\beta_2 = 0$ y $c = 1/2$

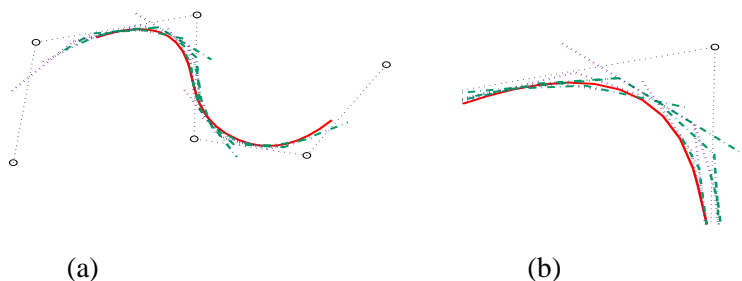


Figura 3: Dos pasos de la subdivisión para $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 0$ y $c = 1/2$

gráfica que aproxime a la curva Beta-spline original.

Por último, analicemos lo que sucede con respecto a la variación de c , siempre que $0 < c < 1$. Si $c < 1/2$ y a medida que ese valor tiende a cero, los subpolígonos dejan de tener puntos en común, como se puede apreciar en el gráfico derecho de la Figura 4; en el gráfico de la izquierda se encuentra representada la curva Beta-Spline. La unión de las gráficas de los subpolígonos determina una curva discontinua; de todos modos, cada punto de esta curva, converge a la curva Beta-spline original (ver [Goldman y DeRose \(1986\)](#)).

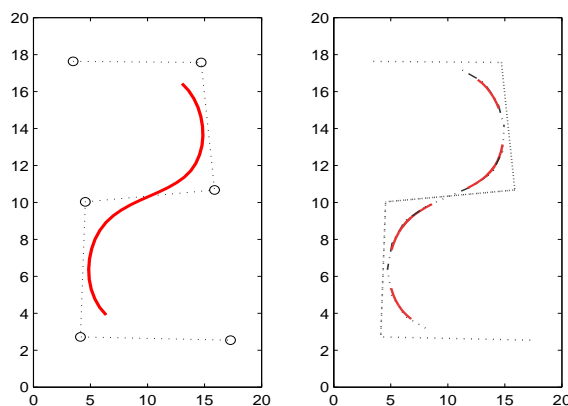


Figura 4: Dos pasos de la subdivisión para $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ y $c = 1/4$

Si $c > 1/2$ y a medida que su valor tiende a uno, los subpolígonos a izquierda y a derecha

obtenidos en cada trozo, se intersectan en un número finito de puntos, según se observa en la Figura 5. En la Figura 6 vemos cómo, con dos pasos, se va obteniendo una aproximación.

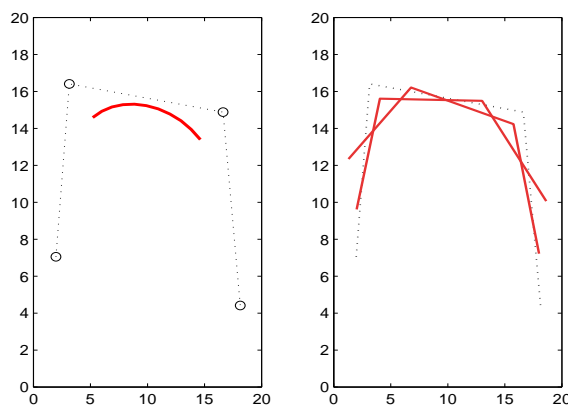


Figura 5: Un paso de la subdivisión para $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ y $c = 3/4$

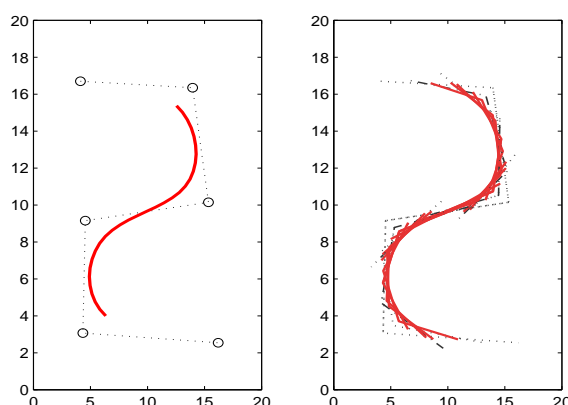


Figura 6: Dos pasos de la subdivisión para $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ y $c = 3/4$

En todos los casos, la unión de las gráficas de los subpolígonos a izquierda y a derecha en el último paso de la subdivisión, tiende a la curva Beta-spline cúbica, generada por los puntos del polígono de control original.

4. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo hemos mostrado algunos ejemplos de subdivisión de curvas Beta-spline cúbicas y sus correspondientes matrices de subdivisión. En primer lugar se consideró nulo al parámetro de tensión y variable al parámetro de sesgo, teniendo en cuenta $c = 1/2$. En segundo lugar analizamos el comportamiento de la subdivisión para distintos valores de c .

De la visualización de los gráficos, se observó que, resulta conveniente considerar $c = 1/2$, ya que en esos casos, la convergencia de los polígonos obtenidos en la subdivisión hacia la curva Beta-spline es más rápida.

Se utilizó un algoritmo que genera las matrices de subdivisión para distintos valores de los parámetros de sesgo y tensión y para la subdivisión tanto en el punto medio como en otros casos (ver Castro y otros (2007)).

En todos los ejemplos mostrados se trabajó con funciones de la base que son continuas, forman una partición de la unidad y son linealmente independientes, lo cual asegura la convergencia uniforme de los polígonos de subdivisión a la curva original. No se hizo uso de la propiedad de la cápsula convexa, ya que esta propiedad no es necesaria para la convergencia de un algoritmo de subdivisión, como se prueba en [Goldman y DeRose \(1986\)](#).

Está claro que, a partir de cuatro puntos de control, se genera un solo trozo de la curva. Hicimos una extensión a un conjunto con un número mayor de puntos de control. La extensión al caso de la subdivisión de superficies Beta-spline cúbicas formará parte de un trabajo futuro, así como también la comparación de este método con algún otro método de subdivisión tanto para el caso de curvas como para el caso de superficies una vez realizada la extensión.

REFERENCIAS

- Barsky B. y Beatty J. Local control of bias and tension in Beta-splines, *ACM Transactions on graphics*, 2(2):109-134, 1983.
- Castro L., Castro S., Kahnert S. y Salgado D. Matrices de subdivisión para curvas Beta-spline cúbicas, *Anales del XIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación*, 710-720, 2007.
- Goldman R. Using degenerate Bézier triangles and tetrahedra to subdivide Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design 14*, 6:307-311, 1982.
- Goldman R. Markov chains and computer-aided geometric design, part II: Examples and subdivision matrices, *ACM Transactions on Graphics*, 4(1):12-40, 1985.
- Goldman R. y DeRose T. Recursive subdivision without the convex hull property, *Computer Aided Geometric Design 3*, 247-265, 1986.