

## INTEGRACION NUMERICA DE LA ECUACION DNLS

**Sergio A. Elaskar<sup>a</sup>, Gonzalo Sánchez-Arriaga<sup>b</sup> y Juan R. Sanmartín<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> *Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba y CONICET,  
Av. Vélez Sarfield 1611. (5000) Córdoba, Argentina  
e-mail: selaskar@efn.uncor.edu*

<sup>b</sup> *Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid,  
Plaza Cardenal Cisneros 3. Madrid, España*

**Palabras claves:** ondas de Alfvén, DNLS, métodos espectrales.

**Resumen.** Interacciones no lineales de ondas de Alfvén existen tanto para plasmas en el espacio como en laboratorios. En ingeniería aeroespacial amarras electrodinámicas espaciales (“tethers”) generan emisión de ondas de Alfvén en estructuras denominadas “Alas de Alfvén”. La ecuación Derivada no Lineal de Schrödinger (DNLS) posee la capacidad de describir la propagación de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas tanto para plasmas fríos como calientes. En esta investigación, dicha ecuación es solucionada numéricamente por medio de técnicas espectrales para las derivadas espaciales y un esquema de Runge-Kutta de 4<sup>to</sup> orden para evaluar el avance en el tiempo. Se considera la ecuación DNLS sin efectos difusivos, sin embargo se mantienen el término no lineal y el dispersivo. Se ha trabajado con dos condiciones iniciales: 1 – Una onda, 2 - Tres ondas cerca de resonancia, una onda está excitada y las otras dos amortiguadas. En el caso de una única onda los resultados numéricos verifican las condiciones analíticas de estabilidad modular, además se ha encontrado que el tiempo en el que se produce la inestabilidad y la forma en que evoluciona el sistema depende, para un mismo número de onda, de la amplitud inicial. Con tres ondas se realiza un estudio numérico tanto para plasmas fríos como calientes encontrándose que aparece redistribución de energía en un gran número de nodos tanto para ondas polarizadas hacia la izquierda como hacia la derecha.

## 1 INTRODUCCIÓN

La interacción de una amarra espacial conductora con la ionosfera y con el campo magnético terrestre posee distintas aplicaciones entre las que cabe destacar la producción de potencia eléctrica y la obtención de una fuerza de empuje. Además, una amarra sin aislamiento eléctrico y sin corriente en sus extremos, podría servir como fuente generadora de electrones dando lugar a auroras artificiales (Sanmartín et al., 2006). Independientemente de estas y otras aplicaciones, una amarra espacial electrodinámica, es una herramienta útil como fuente de excitación de ondas electromagnéticas (Dobrowolny y Melchioni, 1993 y Drell et al., 1965). Las ondas de Alfvén generadas por un cuerpo conductor en el seno de un plasma fueron predichas por Drell et al. (1965) y observadas por primera vez en la magnetosfera de Júpiter (Acuna y Ness, 1981). El satélite Io, en su movimiento alrededor de Júpiter, era el responsable de la generación de tales ondas y las observaciones confirmaron la existencia de Alas de Alfvén ligadas al satélite natural.

La estructura del campo electromagnético o de las Alas de Alfvén que se generan cuando una amarra espacial se mueve sumergida en un plasma es posible abordarla diferenciando aquellas regiones cercanas al cuerpo (campo próximo) de las alejadas (campo lejano). Para una amarra espacial electrodinámica el campo lejano se puede estudiar mediante un análisis lineal (Sanmartín y Estes, 1997). En las proximidades de la amarra (campo próximo) tienen lugar una serie de fenómenos que obligan a realizar un análisis más detallado ya que se espera que las ondas tengan mayor intensidad y que los efectos no lineales cobren importancia. En estas circunstancias, una alternativa para analizar la evolución de los campos es por medio de la ecuación “Derivative Non-linear Schrödinger Equation - DNLS” que describe la propagación paralela o casi paralela de ondas de Alfvén circularmente polarizadas (Rogister, 1971). Esta ecuación ha tenido éxito en la comprensión de la propagación de ondas Alfvén debido a que distintas simulaciones numéricas y observaciones en el entorno espacial, han podido ser explicadas como soluciones de la DNLS.

Las ondas de Alfvén son un rasgo característico en plasmas magnetizados. Se han observado ondas de Alfvén de larga amplitud acompañando al viento solar (Smith, *et al.* 1995), además se cree que son responsables del calentamiento turbulento de las coronas estelares (Pettini et al., 1985), de emisiones de radio coherentes (Lakhina y Buti, 1988) y de fenómenos relacionados con la generación de viento estelar y de chorros extragalácticos (Jatenco-Pereira, 1995). También se tiene constancia de la existencia de pulsos magnéticos solitarios en el entorno de los cometas (Tsurutani et al., 1990) y de fenómenos de intermitencia turbulenta (Marsch y Liu, 1993 y Bruno et al., 2001).

## 2 ECUACIÓN DNLS

La ecuación DNLS permite describir la propagación paralela o casi paralela a un campo magnético no perturbado de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas. Dicha ecuación puede ser obtenida desde las ecuaciones de la magnetogasdínámica considerando plasma neutro, compuesto por dos fluidos, despreciando la inercia de los electrones y la corriente de desplazamiento (Mjølhus, 1976) o desde las ecuaciones magnetogasdínicas incluyendo el efecto Hall (Passot y Sulem, 2003).

Si el campo magnético sin perturbar  $B_0$  posee la dirección del eje  $z$  y el sistema de referencia se mueve con velocidad de Alfvén, la DNLS puede ser expresada adimensionalmente de la siguiente forma (Rogister, 1971; Mjølhus, 1976; Passot y Sulem, 2003):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \pm i \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \pm \frac{\partial}{\partial z} (\phi |\phi|^2) = 0, \quad (1)$$

donde  $\phi$ ,  $t$ ,  $z$  representan variables y campos en forma adimensional

$$\phi = \frac{B_x \pm i B_y}{B_0}; \quad \omega_{ci} t \rightarrow t; \quad \frac{\omega_{ci}}{V_A} z \rightarrow z \quad (2)$$

$\omega_{ci}$  es la frecuencia de ciclotrón iónica,  $V_A$  es la velocidad de Alfvén. El signo superior en el término dispersivo de la Ec.(1) corresponde a ondas polarizadas a la izquierda (LH), mientras que el inferior a ondas polarizadas a la derecha (RH) propagándose en la dirección del eje  $z$ . El signo del término no lineal solamente puede ser negativo para plasmas calientes considerando que se satisfaga la relación:

$$\beta = c_s^2 / V_A^2 > 1,$$

siendo  $c_s$  la velocidad del sonido (Mjølhus y Hada, 1997).

La ecuación DNLS pertenece a la llamada teoría de solitones y engloba a las ecuaciones “Korteweg-de Vries – KdV”, “Modified Korteweg-de Vries – MKdV” y “Non-linear Schrodinger Equation – NLS” como casos límites. Una característica destacable de la DNLS es que se conoce una cantidad abundante de soluciones exactas (Belashov y Vladimirov, 2005). Dicha ecuación ha sido estudiada mediante tres técnicas alternativas: búsqueda de soluciones exactas (Mjølhus y Hada, 1997), integración numérica (Splanger et al., 1985; Dawson y Fontan, 1988) y reducción a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este última esquema de cálculo se ha llevado a cabo de dos maneras distintas: suponiendo ondas viajeras estacionarias (Hada et al., 1990) y mediante un número finito de modos (Sanmartín et al., 2004, Elaskar et al., 2006, Sánchez-Arriaga et al., 2007).

### 3 SOLUCION MEDIANTE TECNICAS ESPECTRALES

Para realizar la simulación numérica de la ecuación DNLS, se considera métodos espectrales para evaluar las derivadas espaciales y el esquema de Runge-Kutta de 4<sup>to</sup> orden para avanzar en el tiempo.

En todas las simulaciones, las soluciones de la Ec.(1), deben satisfacer condiciones de contorno periódicas:

$$\phi(z, t) = \phi(z + L, t) \quad (3)$$

donde “L” es la longitud del dominio de integración.

El operador Transformada de Fourier “F” se define de la siguiente forma:

$$\hat{\phi}(k) = F[\phi(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{-ikz} dz \quad (4)$$

y su inversa:

$$\phi(k) = F^{-1}[\hat{\phi}(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) e^{ikz} dk \quad (5)$$

En virtud de la definición dada en Ecs.(4) y (5), las derivadas en función de la coordenada espacial  $z$  satisfacen la siguiente relación:

$$F \left( \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} \right) = (ik)^n F[\phi(z)] \quad (6)$$

Por medio del uso de las Ecs.(1, 3, 4, 5 y 6) se obtiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F^{-1} \left\{ - (ik) F[\phi(z)] - (ik) F[|\phi(z)|^2 \phi(z)] \mp (ik^2) F[\phi(z)] \right\} \quad (7)$$

Para llevar adelante la discretización espacial de la Ec.(7) se implementa la Transformada de Fourier Discreta (DFT), la cual puede ser calculada por medio de la Transformada Rápida de Fourier (Trefethen, 2005). La Transformada de Fourier Discreta está dada por:

$$\bar{\phi}(k) = \sum_{j=1}^n \phi(z_j) e^{-ikz_j}; \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (8)$$

y su inversa:

$$\phi(z_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \bar{\phi}(k) e^{ikz_j}; \quad j = 1, \dots, N \quad (9)$$

Considerando las Ecs.(8 y 9), las componentes real e imaginaria de la Ec.(7) resultan en:

$$\left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right)_{\text{real}} = F^{-1} \left\{ \pm k_j^2 (\bar{\phi}_j)_{\text{imag}} \mp k_j (A_j)_{\text{imag}} \right\}; \quad (A_j)_{\text{imag}} = F \left\{ |\phi_j|^2 (\phi_j)_{\text{imag}} \right\}$$

$$\left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \right)_{\text{imag}} = F^{-1} \left\{ \mp k_j^2 (\bar{\phi}_j)_{\text{real}} \pm k_j (A_j)_{\text{real}} \right\}; \quad (A_j)_{\text{real}} = F \left\{ |\phi_j|^2 (\phi_j)_{\text{real}} \right\}$$

La utilización de esta técnica implica requerimientos de periodicidad para la solución. En muchas situaciones para la DNLS el fenómeno de interés no está influenciado por lo que sucede en los contornos y simulaciones numéricas con condiciones de borde periódicas han probado ser una buena opción (Belashov y Vladimirov, 2005).

Durante la simulación el espacio físico es discreto y cerrado, lo que implica que el espacio de Fourier también será cerrado y discreto. El espacio físico es subdividido en N puntos:

$$x \in (-L/2 + h, -L/2 + 2h, \dots, L/2 - h, L/2)$$

“h” y “L” son la longitud que separa dos puntos consecutivos y la distancia del dominio de integración en el espacio físico respectivamente. Por lo tanto el espacio de Fourier resulta:

$$k \in [(-N/2 + 1, -N/2 + 2, \dots, N/2 - 1, N/2)(2\pi/L)]$$

Para todas las integraciones numéricas llevadas a cabo para este artículo se ha considerado  $L = 64$  y  $N = 64, 128$  y  $256$ .

#### 4 RESULTADOS NUMERICOS

Con la finalidad de evaluar la capacidad del esquema numérico explicitado previamente se presentan en esta sección resultados de simulaciones realizadas en la Ec.(1) utilizando dos

condiciones iniciales distintas: 1 – una onda, 2 - tres ondas cerca de resonancia ( $k_1 = k_2 + k_3$ ), la primera onda (correspondiente a  $k_1$ ) está excitada y las otras dos amortiguadas. Se realiza un estudio numérico tanto para plasmas fríos como calientes También se lleva a cabo un análisis sobre la sensibilidad el número de puntos utilizado en la discretización espacial.

#### 4.1 Una onda

Todas las simulaciones fueron realizadas para ondas polarizadas a la izquierda y se consideró como condición inicial una onda de la siguiente forma:

$$\phi(z,0) = \phi_0 = A e^{ik_0z} = A [\cos(k_0z) + i \sin(k_0z)] \quad (10)$$

La onda inicial dada por Ec.(10), satisface la restricción de periodicidad establecida en Ec.(3). En estas condiciones se dice que  $\phi$  es una función L-periódica, es decir verifica que  $\phi(z+L) = \phi(z)$ .

Con la finalidad de reducir el número de parámetros de control se ha considerado que el vector de onda es constante en todas las simulaciones ( $k_0 = 1.08$ ) y se ha utilizado distintos valores para la amplitud inicial satisfaciendo  $0.04 \leq A_0 \leq 2$ :

$$A_0 = 0.04; 0.08; 0.1; 0.13; 0.14; 0.15; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0; 1.2; 1.4; 1.45; 1.46; 1.7; 2.0$$

Con esta investigación se pretende establecer numéricamente características de la evolución de la onda cuando es inestable. Para tal fin es necesario establecer criterios de estabilidad modular de la DNLS cuando se tiene condiciones periódicas de contorno.

Para analizar la modulación de un tren de ondas de amplitud constante seguimos el desarrollo presentado por (Fla, 1992). Se considera que la solución base ( $A e^{i(k_0z - \omega t)}$ ) es perturbada levemente:

$$\phi(z,t) = A e^{i(k_0z - \omega t)} [1 + \varepsilon(z,t)]; \quad \omega = A^2 k_0 - k_0^2 \quad (11)$$

Donde la función perturbación  $\varepsilon$  y la función base  $\phi$  son complejas y L-periódicas sobre el intervalo  $[-0.5L, 0.5L]$ . Además se verifica que  $|\varepsilon|^2 \ll 1$  y la amplitud  $A$  es un número real.

Se acepta que la función perturbación de la amplitud,  $\varepsilon(z,t)$ , puede ser expandida en serie de Fourier:

$$\varepsilon(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \alpha_n(t) e^{i\mu_n z}; \quad \alpha_n(t) = \alpha_n(0) e^{\lambda_n t} \quad (12)$$

Los números de onda están dados por  $\mu_n = 2\pi n / L$ , siendo  $n$  números enteros. Introduciendo las Ecs.(11) y (12) en la DNLS se obtiene que:

$$\lambda_n = i 2 (A^2 - k_0) \mu_n \pm |\mu_n| \sqrt{(2k_0 - A^2) A^2 - (\mu_n)^2} \quad (13)$$

La Ec.(13) muestra que la onda de amplitud constante es inestable para

$$2k_0 < A^2 \quad (14)$$

y marginalmente estable para

$$2k_0 > A^2. \quad (15)$$

En las simulaciones numéricas con  $k_0 = 1.08$  se tendrá inestabilidad modular para valores de la amplitud que verifiquen  $A < 1.469$ .

Los resultados numéricos obtenidos en este trabajo satisfacen la relaciones (14) y (15) tal como lo muestra la Tabla 1. Dicha tabla posee dos columnas, la de izquierda da el valor inicial de la amplitud de la onda y la columna derecha expresa el tiempo para el cual la onda deja de ser estable.

<b>Amplitud</b>	<b>Tiempo inestabilidad</b>
0.08	4224
0.1	2520
0.13	1674
0.14	1554
0.15	1360
0.2	640
0.4	168
0.6	84
0.8	57
1	47
1.2	51
1.4	134
1.45	430
1.46	840
1.7	sin inestabilidad
2	sin inestabilidad

Tabla 1. Tiempo en el que se produce la inestabilidad para diferentes amplitudes de la onda.

De la tabla se destaca que el intervalo de tiempo necesario para que la onda pierda su estabilidad no es constante y depende del valor que posee la amplitud inicial. También es importante observar que si se extrapola para valores muy pequeños de la amplitud  $A$  el tiempo necesario para que aparezca inestabilidad se hace muy grande, esto ha sido confirmado con  $A = 0.04$  que para un tiempo igual a 5000 no se alcanzó inestabilidad considerando un intervalo de avance en el tiempo igual a 0.005. Tampoco se halló inestabilidad y la onda permaneció inalterada durante toda la integración cuando se utilizó un paso de tiempo igual 0.01 y el tiempo máximo de integración fue de 15000.

Otro aspecto que es estudiado en este trabajo corresponde a las características de evolución de la onda inestable para tiempos superiores al necesario para perder su estabilidad. De las Ecs.(12, 13 y 14) se obtiene que la amplitud de la perturbación crecerá en forma exponencial si el sistema es inestable. Con la finalidad de corroborar dicho comportamiento se analizan dos casos que se consideran representativos:  $A = 0.1$  y  $0.4$ .

Se define el parámetro  $E_{k_0}$  con la finalidad de evaluar la transferencia y evolución de la energía entre la onda inicial y otros modos:

$$E_{k_0} = \frac{|\overline{\phi}_{k_0}|}{\sum_{j=1}^{j=N} |\overline{\phi}_j|}$$

$N$  es el número total de modos utilizados en la simulación,  $\overline{\phi}_j$  es la transformada de Fourier Discreta del campo magnético y el subíndice  $j$  indica el número de onda.

En la Figura 1 se muestra la variación del cociente entre la energía transportada por la onda la inicial y la energía total del sistema considerando  $A = 0.1$ . Se observa que se produce una evolución cuasi-periódica de transferencia de energía. El intervalo de tiempo entre pico y pico disminuye lentamente al avanzar el tiempo, el primer pico aparece a  $t_1 = 3300$ , el segundo a  $t_2 = 5100$ , el tercero a  $t_3 = 6840$  y el cuarto a  $t_4 = 8560$ . En la Figura 2 se indica la energía de la transformada de Fourier para tres tiempos distintos. De esta grafica se destaca claramente que la energía es transferida fundamentalmente entre la onda original o madre y dos ondas hijas. Los vectores onda de la onda madre y las dos ondas hijas verifican la relación  $2k_0 = k_1 + k_2$ . Es importante destacar que para  $A = 0.08, 0.13, 0.133, 0.134$  y  $0.1345$  se obtienen resultados cualitativamente similares a los alcanzados para  $A = 0.1$ .

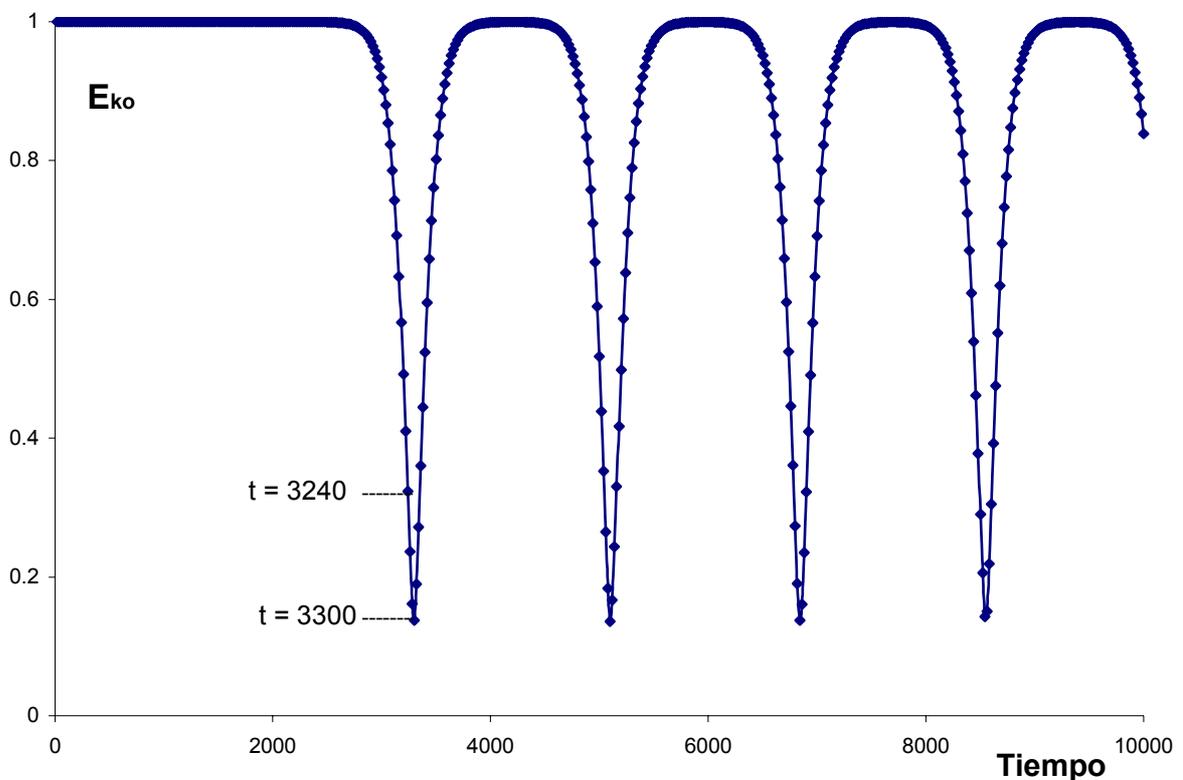


Figura 1. Evolución de la energía de la onda inicial en función del tiempo.  $A = 0.1$

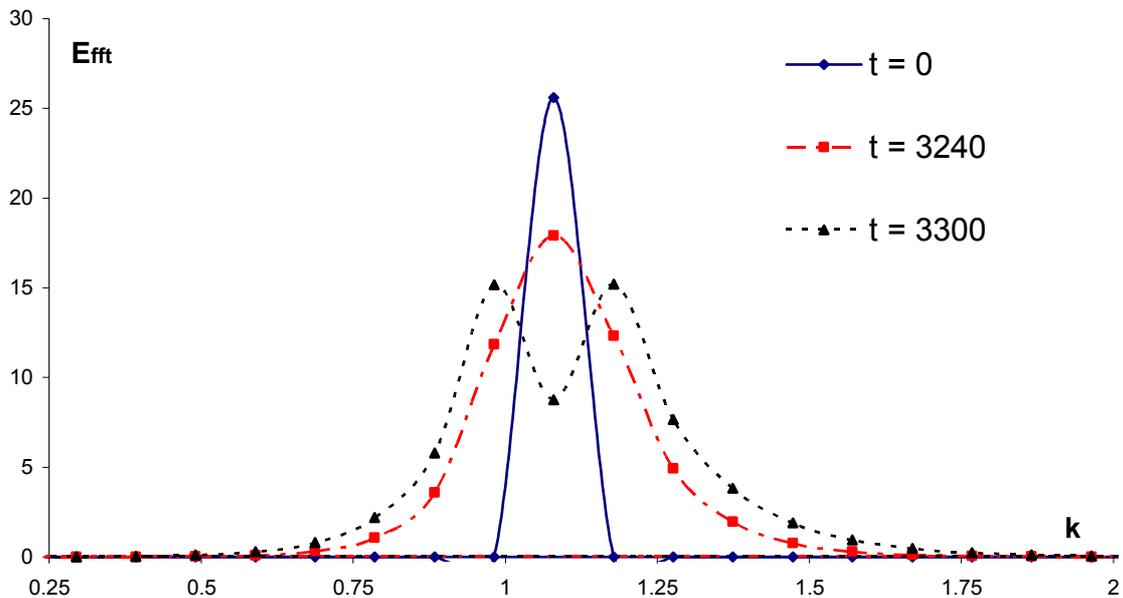


Figura 2. Energía de la transformada de Fourier.  $A = 0.1$

Para  $A = 0.4$  la situación es diferente encontrándose que luego de un cierto intervalo de tiempo, sustancialmente menor que para  $A = 0.1$ , la onda original pierde energía cediéndola a otras ondas. Este proceso de transferencia de energía evoluciona en el tiempo en forma irregular. La Figura 3 indica la variación del cociente entre la energía transportada por la onda la inicial y la energía total. Se destaca que hasta un tiempo igual a 168 la única onda existente es la inicial, pero desde allí aparecen otras ondas en las cuales se distribuye la energía.

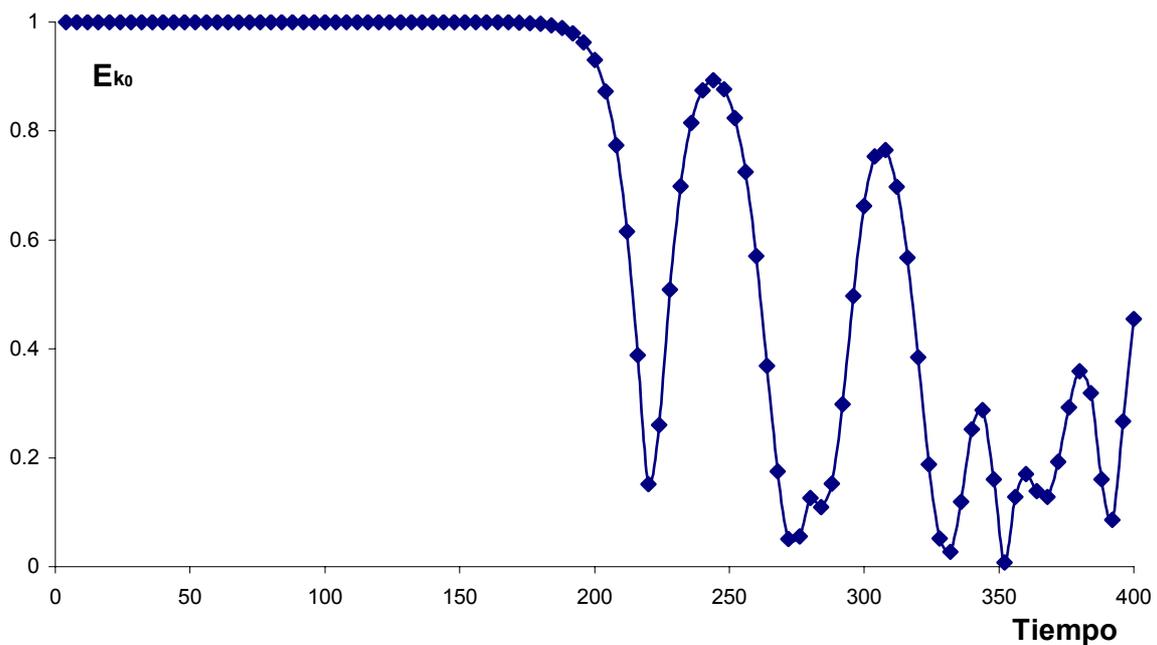


Figura 3. Evolución de la energía de la onda inicial en función del tiempo.  $A = 0.4$ .

Con la finalidad de observar mejor a que se debe la disminución de la energía de la onda inicial, en la Figura 4 se muestra la energía de la transformada de Fourier para tres tiempos distintos, se observa que el espectro de ondas se ha incrementado sustancialmente con respecto a su configuración original.

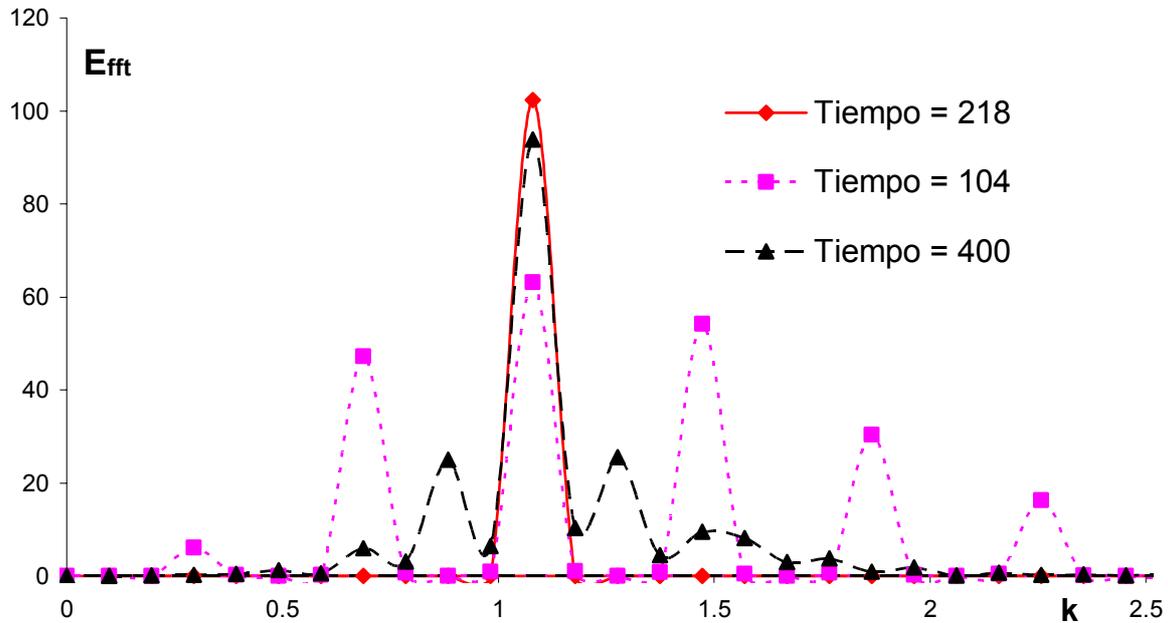


Figura 4. Energía de la Transformada de Fourier. A = 0.4

Para A = 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.45 y 1.46 se obtienen resultados cualitativamente similares a los alcanzados para A = 0.4. Sin embargo, a medida que el modulo de la onda original se incrementa dicha onda posee una menor cantidad de energía luego de perder su estabilidad.

Del análisis de estos ejemplos queda claro que la forma en que se distribuye la energía de la onda inicial y el tiempo de inestabilidad dependen del valor de la amplitud (considerando k<sub>0</sub> constante). Las Ecs.(12, 13, 14 y 15) son útiles para determinar el rango de inestabilidad modular de la onda original, pero no expresan correctamente, por si mismas, el momento en que se producirá la inestabilidad ni el comportamiento evolutivo de la misma.

#### 4.2 Tres ondas

De los resultados previos se puede inferir la importancia en la transferencia de energía cuando existen de tres ondas actuando en forma simultánea (ver Figuras 1 y 2). En esta sección se presentan resultados de las integraciones numéricas de la DNLS considerando como condición inicial a tres ondas monocromáticas:

$$\phi(z,0) = \phi_0 = \sum_{j=1}^{j=3} A_j e^{ik_j z}; \quad A_j = \sqrt{k_j M_j} \tag{16}$$

Las amplitudes quedan definidas mediante:

$$M_1 = q m; \quad M_{2,3} = \frac{1-q}{2} m \quad (17)$$

Donde  $m$  muestra la cantidad de energía ingresada en el sistema y  $q$  indica como se distribuye la energía entre las tres ondas. Al igual que en la sección previa los números de onda se definen como  $k_j = 2 \pi n / L$ . Se destaca desde las Ecs.(16 y 17) que  $\phi(z,0)$  es una función compleja L-periódica satisfaciendo la restricción impuesta por Ec.(3).

En forma similar a lo hecho en la sección previa y para cuantificar la transferencia y evolución de la energía entre las ondas se define el siguiente parámetro:

$$E_m = \frac{|\overline{\phi}_1| + |\overline{\phi}_2| + |\overline{\phi}_3|}{\sum_{j=1}^{j=N} |\overline{\phi}_j|} \quad (18)$$

$N$  es el número total de modos utilizados en la simulación,  $\overline{\phi}_j$  es la transformada de Fourier Discreta del campo magnético y el subíndice  $j$  indica el número de onda.  $E_m$  indica que cantidad de energía es transportada por los tres modos resonantes con respecto a la energía total del sistema. Si  $E_m$  es próximo a 1 expresa que la energía está fundamentalmente almacenada en los tres nodos resonantes, por el contrario cuando  $E_m$  es bajo la energía se encuentra fundamentalmente en otros modos. En los casos en que  $E_m \approx 1$  los modelos de truncamiento a tres ondas describirían con mayor éxito la dinámica no lineal de la DNLS (Sanmartín, et al., 2004; Elaskar et al., 2006; Sánchez-Arriaga et al., 2007).

En este estudio se han considerado distintos valores de energía del sistema ( $m$ ) y también diferentes formas de distribución ( $q$ ) tanto para ondas polarizadas a izquierda y derecha como para plasmas fríos y calientes.

Para ondas polarizadas a izquierda y a derecha se realizó en primer lugar un estudio de la influencia del número total de modos, se trabajó con  $N = 64, 128$  y  $256$ . En la Figuras 5 y 6 está graficado la evolución del parámetro  $E_m$  en función del tiempo para ondas polarizadas a derecha e izquierda respectivamente. En ambas figuras se ha considerado que el signo del término dispersivo en la DNLS es positivo, es decir que corresponde a plasmas fríos y/o calientes con  $\beta < 1$ . De las graficas se destaca que los resultados con  $N = 64$  no coinciden con aquellos hallados para  $N = 128$  y  $256$ , por tal motivo se utiliza en el resto de las simulaciones  $N = 256$ .

La Figura 7 muestra como varía la energía en las tres ondas resonantes a medida que el sistema avanza en el tiempo para ondas polarizadas a la izquierda y signo positivo en el término dispersivo considerando tres niveles de energía diferentes,  $m = 0.1, 0.3$  y  $0.5$ . Se destaca que a medida que la energía aumenta el sistema de tres ondas se desestabiliza más rápidamente. Sin embargo se considera necesario realizar un estudio de sensibilidad más completo en virtud de los resultados hallados cuando se considera como condición inicial una onda (ver Tabla 1).

En la Figura 8 está graficado la variación de la energía existente en las tres ondas resonantes a medida que el sistema avanza en el tiempo para ondas polarizadas a la izquierda y signo positivo en el término dispersivo considerando dos formas distintas de distribución inicial de energía,  $q = 0.1, 0.5$  y  $0.9$ . La energía existente en el sistema para las tres simulaciones es  $m = 0.1$ .

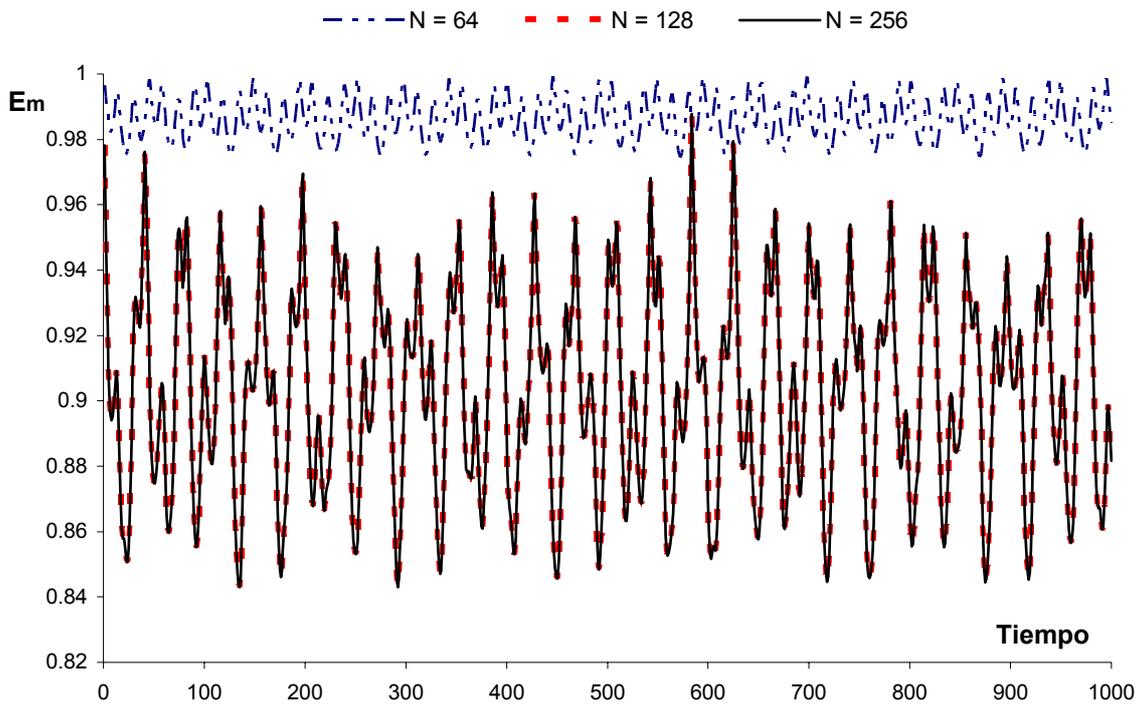


Figura 5. Sensibilidad al número total de modos. Ondas polarizadas a derecha.

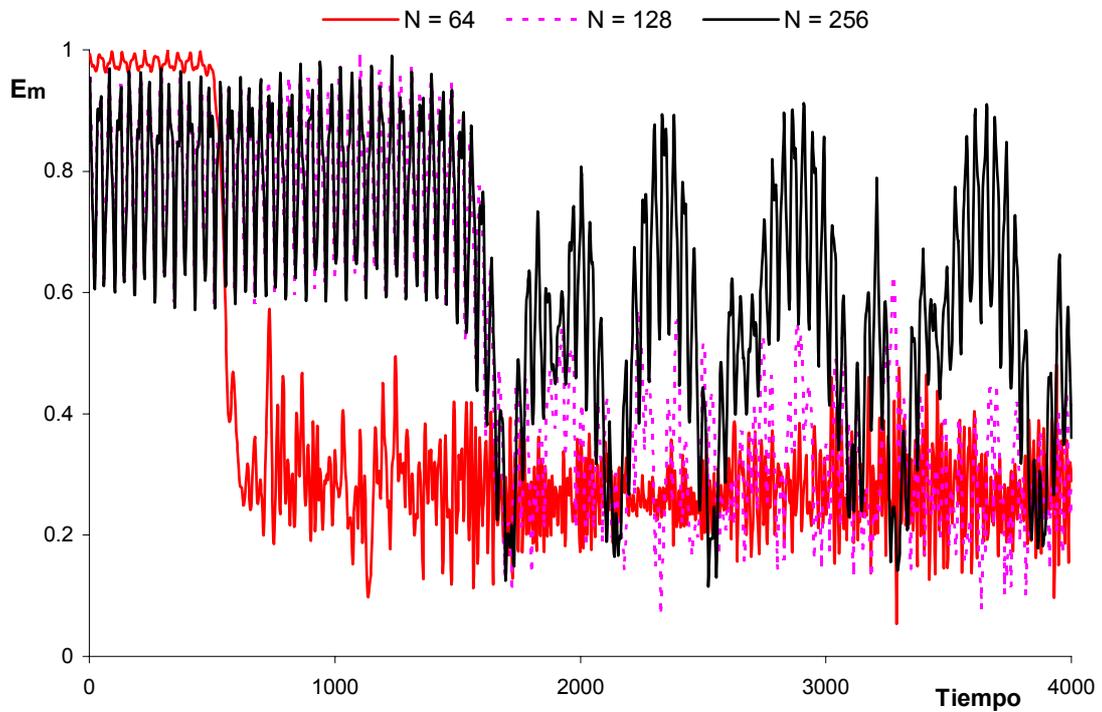


Figura 6. Sensibilidad al número total de modos. Ondas polarizadas a izquierda.

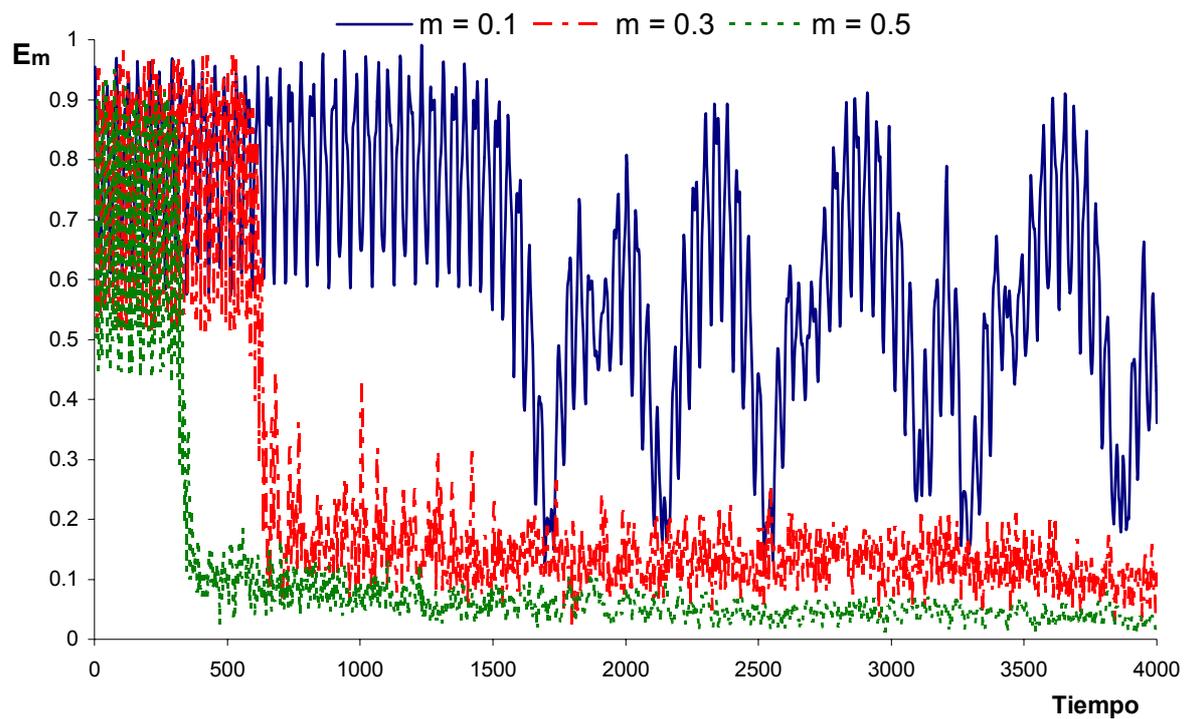


Figura 7. Sensibilidad a la energía del sistema. Ondas polarizadas a izquierda.

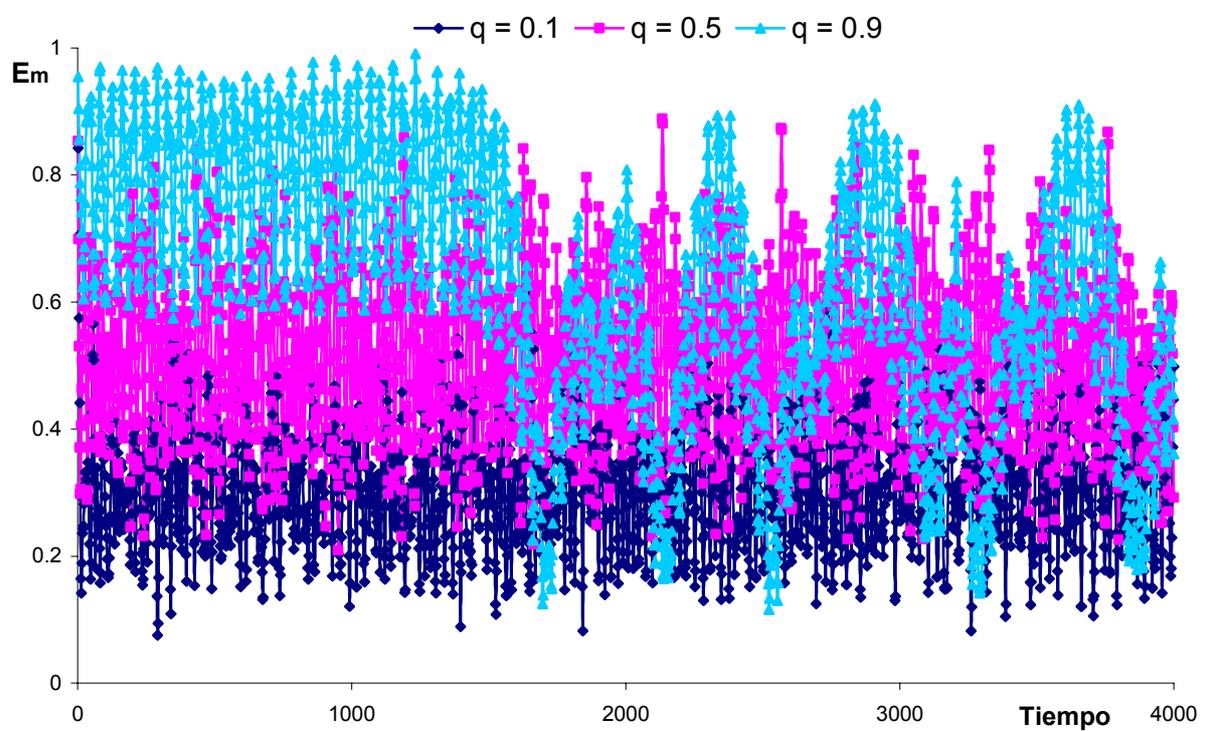


Figura 8. Sensibilidad a la distribución inicial de energía. Ondas polarizadas a izquierda.

De la Figura 8, se observa que la evolución de la distribución de energía es fuertemente influenciada por la condición inicial. Además, a medida que la energía inicial está más concentrada en la onda madre, los tres modos resonantes acaparan un mayor porcentaje de energía que el resto de los modos.

La Figura 9 indica como se modifica la energía de cada una de las tres ondas para  $m = 0.1$  y  $q = 0.9$ . En este caso la onda madre es la que transporta mayor energía durante todo el proceso, este comportamiento no se mantiene para  $q = 0.1$  y  $0.5$  generando los diferentes tipos de evolución observados en Figura 8.

En la Figura 10 se muestra una comparación de lo que sucede para ondas polarizadas a izquierda y derecha considerando que el signo del término dispersivo es positivo y con  $m = 0.1$  y  $q = 0.9$ . La onda con polarización izquierda es modularmente inestable mientras que la onda polarizada a la derecha presenta una evolución estable.

Si el plasma es caliente con  $\beta > 1$  también las ondas polarizadas a la derecha presentan inestabilidad modular como puede observarse en la Figura 11. Sin embargo el rango de validez de aplicación de la Ec.(1) considerando plasmas calientes y  $\beta > 1$  es reducido (Mjølhus y Hada, 1997).

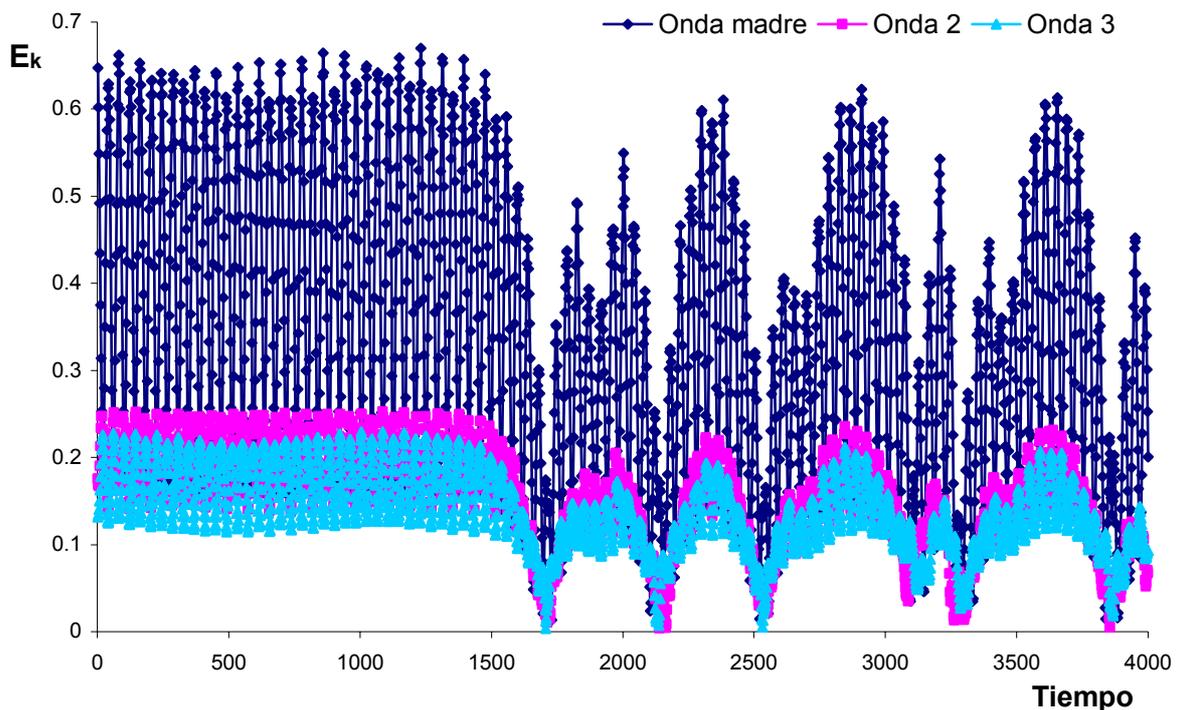


Figura 9. Distribución de energía.  $m = 0.1$  y  $q = 0.9$ .

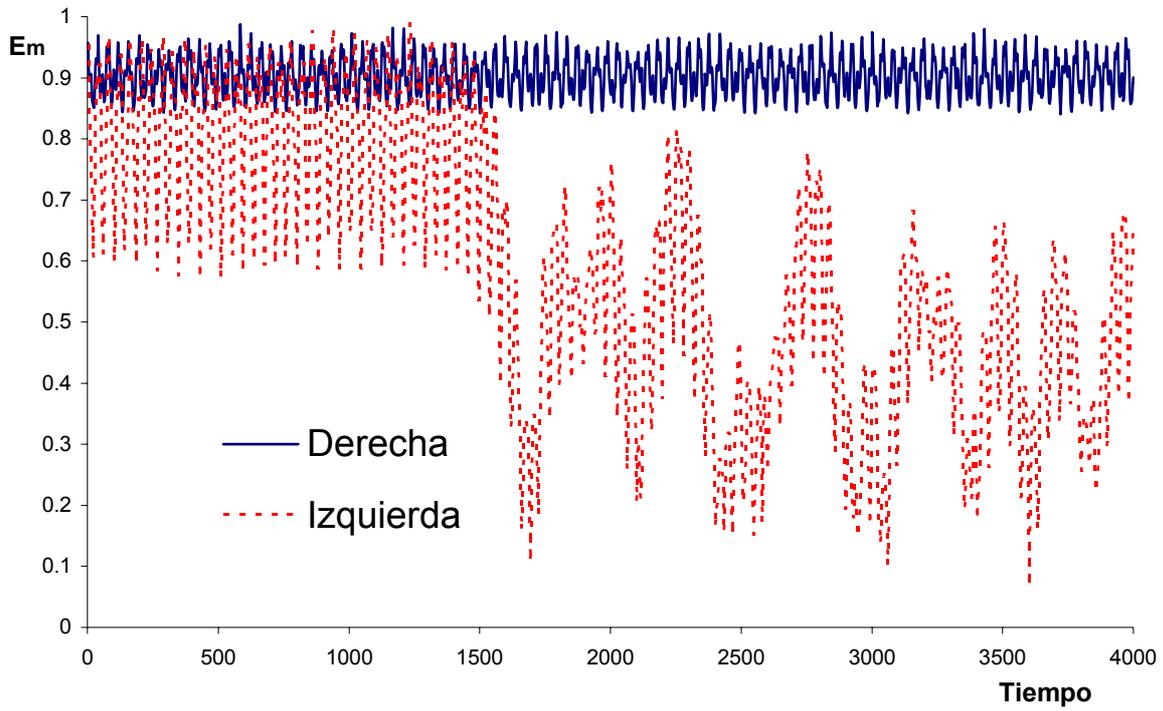


Figura 10.  $E_m$  para ondas polarizadas a izquierda y derecha.  $m = 0.1$  y  $q = 0.9$ .

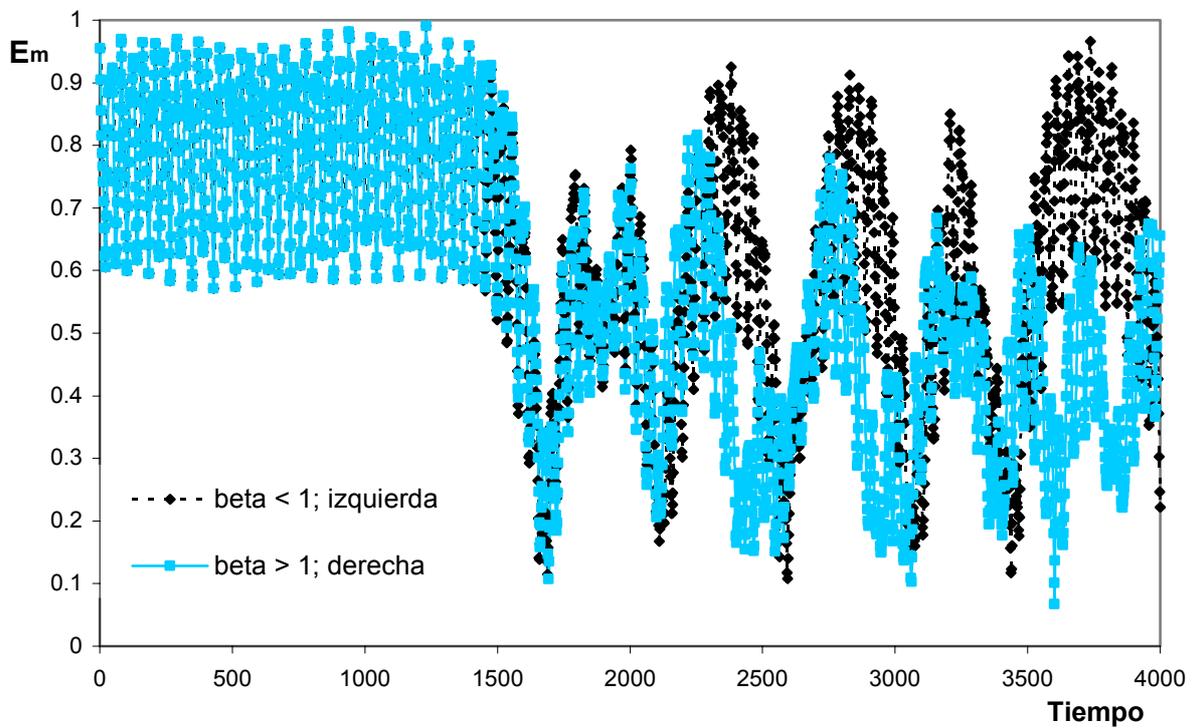


Figura 11.  $E_m$  para ondas polarizadas a izquierda y derecha,  $\beta < 1$  y  $\beta > 1$ .  $m = 0.1$  y  $q = 0.9$ .

## 7 CONCLUSIONES

En este artículo la ecuación DNLS sin efectos difusivos ha sido solucionada numéricamente por medio de técnicas espectrales para calcular las derivadas espaciales y un esquema de Runge-Kutta de 4<sup>to</sup> orden para evaluar el avance en el tiempo. Se han realizado dos análisis en función de la cantidad de ondas existentes como condición inicial: 1 – Una onda, 2 - Tres ondas cerca de resonancia ( $k_1 = k_2 + k_3$ ), la primera onda (correspondiente a  $k_1$ ) está excitada y las otras dos amortiguadas.

En el estudio de una única onda los resultados numéricos han sido comparados con las condiciones analíticas de estabilidad modular. Las simulaciones numéricas han satisfecho correctamente el rango de inestabilidad dado por el cálculo teórico. Pero además se ha encontrado que el tiempo en el que se produce la inestabilidad y las características de la evolución del sistema depende en forma no lineal, para un mismo número de onda, de la amplitud inicial siendo este un resultado no predicho por la teoría analítica de estabilidad. Además se encontró que en varias simulaciones la inestabilidad de la onda inicial da origen a un intercambio de energía entre tres ondas: la original y dos ondas hijas que satisfacen la relación  $k_1 = k_2 + k_3$ .

Durante el estudio de tres ondas como condición inicial se realizó una serie de simulaciones numéricas tanto para plasmas fríos como calientes encontrándose que aparece redistribución de energía en un gran número de nodos tanto para ondas polarizadas hacia la izquierda como hacia la derecha. Sin embargo la evolución del sistema está fuertemente influenciada de la cantidad de energía que posee y de la forma en que está distribuida la energía entre las tres ondas iniciales. Finalmente se destaca que se ha encontrado inestabilidad modular para ondas polarizadas a la derecha cuando se considera plasmas calientes y  $\beta > 1$ .

### Agradecimientos

Esta investigación ha recibido apoyo del Ministerio de Ciencia y Tecnología de España mediante el Proyecto ESP2004-01511; de CONICET por medio del proyecto PIP No 5692; de FONCYT con el Proyecto PICTO-UNRC-2005 N° 30339, de la Universidad Politécnica de Madrid y de la SECyT-Universidad Nacional de Córdoba.

### REFERENCIAS

- Acuna, M. y Ness, F., Standing Alfvén wave current system at Io: Voyager I Observations. *Journal of Geophysical Research*, 86: 8513, 1981.
- Belashov, V. y Vladimirov, S., *Solitary Waves in Dispersive Complex Media*, Springer, Berling, 2005.
- Bruno, R., Carbone, V., Veltri, A., Pietropaolo, E. y Bavassano, B., Identifying intermittency events in the solar wind. *Planetary and Space Science*. 49:1201-1210, 2001.
- Dawson, S. y Fontan, C., Soliton decay of nonlinear Alfvén waves: Numerical studies. *Physics of Fluids*, 31(1):83-89, 1988.
- Dobrowolny, M. y Melchioni, E., Electrodynamics aspects of the thrust tethered satellite mission. *Journal of Geophysical Research*, 98(13):761, 1993.
- Drell, S., Foley, H. y Ruderman, M., Drag and propulsion of large satellites in the ionosphere: An Alfvén propulsion engine in space. *Journal of Geophysical Research*, 70: 3131, 1965.

- Elaskar, S., Sanchez-Arriaga, G. y Sanmartín, J., Chaos in Non Linear Alfvén Waves Using the DNLS Equation, *2006 International Symposium on Electrohydrodynamics – 2006 ISEHD*. Buenos Aires, 4<sup>th</sup>-6<sup>th</sup> December. Publicado en los Proceedings del Congreso, pp. 131-134 (ISBN 950-29-0964-X).
- Fla, T., A numerical energy conserving method for the DNLS equation. *Journal of Computational Physics*, 101: 71-79, 1992.
- Hada, T., Kennel, C.; Buti, B. y Mjølhus, E., Chaos in driven Alfvén systems. *Physics of Fluids* B2(11): 2581-2590, 1990.
- Jatenco-Pereira, V. Alfvén Waves in Astrophysical Plasmas. *Physica Scripta*. 60: 113, 1995.
- Lakhina, G. y Buti, B. Coherent Radiation Mechanism for Cometary Kilometric Radiation. *Astrophysics Journal*, 327: 1020, 1988.
- Marsch E. y Liu, S., Structure Functions and Intermittency of Velocity Fluctuations in the Inner Solar Wind. *Ann. Geophys.*, 11: 227, 1993.
- Mjølhus, E., On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field. *Journal of Plasma Physics* 16: 321-334, 1976.
- Mjølhus, E. y Hada, T., *Nonlinear Waves and Chaos in Space Plasmas*, edited by T. Hada and H. Matsumoto (Terrapub, Tokio), 121-169, 1997.
- Passot, T. y Sulem, P., Long-Alfvén-wave trains in collisionless plasmas. I. Kinetic theory. *Physics of Plasmas* 10: 3887-3905, 2003.
- Pettini, M., Nocera, L. y Vulpiani, A., Compressible MHD Turbulence: An Efficient Mechanism to Heat Stellar Coronae. *Chaos in Astrophysics*. Eds. J. Buchler et al., Dordrecht-Reidel, 1985.
- Rogister, A., Parallel Propagation of Nonlinear Low-Frequency Waves in High- $\beta$  Plasma. *Physics of Fluids*, 14(12): 2733-2739, 1971.
- Sanchez-Arriaga, G.; Sanmartín J. y Elaskar, S. Damping models in the truncated DNLS equation. *Physics of Plasmas*. 14: 082108, 2007.
- Sanmartín, J. y Estes, R., Alfvén wave far field from steady-current tethers. *Journal of Geophysical Research*, 102-A7(14): 625, 1997.
- Sanmartín, J.; López-Rebollal, O.; del Río, E. y Elaskar, S. Hard transition to chaotic dynamics in Alfvén wave-fronts. *Physics of Plasmas*, 11(5): 2026-2035, 2004.
- Sanmartín, J.; Charro, M.; Peláez, J.; Tíno, I.; Elaskar, S.; Hilgers, A. y Martínez Sánchez, (2006), Electrically Floating Bare-Tether as Upper Atmosphere Probe. *Journal of Geophysics Research*, 111: A11310.
- Smith, E.; Balogh, A.; Neugebauer, M. y McComas, D. Ulysses Observations of Alfvén waves in the Southern and Northern Hemispheres. *Geophysical Research Letters*, 22: 3381, 1995.
- Splanger, S.; Sheerin, J. y Payne, G. A numerical study of nonlinear Alfvén waves and solitons. *Physics of Fluids*, 28: 104-109, 1985.
- Trefethen, L. *Spectral Methods in MATLAB*, SIAM, Philadelphia, 2005.
- Tsurutani, B.; Smith, E.; Marsumoto, H.; Brinca, A. y Omid, N. Highly nonlinear Magnetic Pulses at Comet Giacobini-Zinner. *Geophysical Research Letter*, 17: 757, 1990.