

SIMULACIONES NUMÉRICAS MEDIANTE VOLÚMENES FINITOS PARA APLICACIONES AEROESPACIALES

Mauro Grioni^a, Sergio A. Elaskar^{a,b} y Oscar A. Falcinelli^a

^a*Departamento de Aeronáutica, FCFyN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarfield 1601,
Córdoba 5000, Argentina, maurogrioni@hotmail.com*

^b*CONICET*

Palabras Clave: solver de Riemann, ecuaciones de Euler, esquema TVD, flujo supersónico, volúmenes finitos.

Resumen. Se presenta en este trabajo un análisis numérico por medio de volúmenes finitos en casos de aplicación aeroespacial. El estudio se realiza mediante el uso de un código desarrollado en la UNC con el auspicio de la UNC y de CONICET. El mencionado código permite simular flujos supersónicos inestacionarios y estacionarios utilizando la técnica de volúmenes finitos. Usa mallas no estructuradas en geometrías tridimensionales. En el código se ha implementado una nueva técnica numérica que permite reducir la viscosidad artificial sin que el esquema “Total Variation Diminishing - TVD” pierda robustez. Para verificar el desempeño del esquema numérico se modelan cuatro casos; un tubo de choque, un flujo supersónico que llega a una cuña, el flujo en el interior de un difusor y el flujo alrededor del Ala ONERA M6 transónica con la finalidad de verificar la capacidad del método para capturar discontinuidades, así como las condiciones del flujo consiguiéndose resultados satisfactorios y concordantes a los alcanzados por otros miembros de la comunidad científica.

1. INTRODUCCIÓN

En la resolución numérica de las ecuaciones de la mecánica de fluidos con la técnica de volúmenes finitos surge la necesidad de discretizar las derivadas de los flujos convectivos. Las técnicas de discretización tradicionalmente utilizadas surgen de aproximar la ley de variación de las variables con funciones polinómicas de distintos grados. Estas aproximaciones dan excelentes resultados cuando las variables presentan modificaciones suaves pero tienen serias dificultades cuando la solución es discontinua. En estos casos, los esquemas que utilizan aproximaciones de orden dos o superior presentan inconvenientes en la convergencia que, de alcanzarse, resulta en soluciones con oscilaciones en las cercanías de las discontinuidades. Por su parte, los esquemas que utilizan aproximaciones de primer orden generan soluciones sin oscilaciones pero en general con discontinuidades muy pobremente resueltas (esquemas altamente difusivos). Como solución a este problema, surgieron esquemas que implementan “funciones limitadoras” (Hirsch, 1992) para calcular localmente combinaciones lineales de las aproximaciones de primer y segundo orden según la suavidad de la variación de las variables en la zona. A estos se los conoce como esquemas TVD (Total Variation Diminishing), que tienen como criterio de utilización que la variación total de la solución no se incremente en el tiempo. En este trabajo dicho esquema, se aplica a cada onda en particular (onda a onda) de manera de alcanzar una aproximación de segundo orden en las zonas de flujo con variaciones suaves y a la vez evitar oscilaciones en cercanías de las discontinuidades. El código analiza la posibilidad de reducir la difusión numérica en las ondas de las familias dos a cuatro (ondas lineales) utilizando funciones compresivas, entendiéndose como tales a aquellas que dan una mayor ponderación a la aproximación de segundo orden del flujo numérico. Sin embargo, debido a la utilización de funciones más difusivas para las ondas de las familias uno y cinco (ondas no lineales), se comprueba que el esquema TVD no pierde robustez. Se puede afirmar que la técnica TVD propuesta conjuga las potencialidades de los esquemas que utilizan una sola clase de funciones limitadoras, consiguiéndose una adecuada definición tanto en los choques como en las discontinuidades de contacto y deslizamiento.

2. DESCRIPCIÓN DEL ESQUEMA USADO

El código con el que se trabajó utiliza la técnica de volúmenes finitos para la resolución numérica de las ecuaciones de Euler tridimensionales dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial h(\mathbf{U})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (1)$$

donde \mathbf{U} es el vector de variables conservativas, $f(\mathbf{U})$, $g(\mathbf{U})$ y $h(\mathbf{U})$ las componentes según las tres direcciones coordenadas del vector flujo \mathbf{F} . Se discretiza el dominio en celdas e integrando la ecuación anterior en un volumen cerrado y utilizando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\int_{Vol} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \partial V + \int_{Area} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \partial A = 0 \quad (2)$$

donde \mathbf{n} es el versor normal a la superficie y saliente del volumen. Estas integrales se realizan en cada una de las celdas que conforma la malla, siendo los volúmenes de integración tetraedros.

Al utilizar una formulación centrada en las celdas de una malla fija, las variables toman un único valor dentro de cada celda al igual que el flujo numérico en cada cara. Teniendo en cuenta estas hipótesis y adoptando una discretización tipo Euler hacia adelante para la derivada

temporal, la Ec. (2) puede discretizarse del siguiente modo:

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} Vol + \sum_{j=1}^{ncaras} \mathbf{F}_j^* \cdot \mathbf{n}_j A_j = 0 \quad (3)$$

aquí \mathbf{U}^n y \mathbf{U}^{n+1} son los vectores de variables conservativas en los pasos de tiempo n y $n + 1$ respectivamente, Vol el volumen de la celda, Δt el paso de tiempo, \mathbf{F}_j^* el vector flujo numérico en la cara j , \mathbf{n}_j la normal y A_j su área. \mathbf{U}^n es la solución aproximada de la Ec. (1) al tiempo t_n .

La fórmula de actualización temporal del vector de variables conservativas se deduce de la Ec. (3):

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \frac{\Delta t}{Vol} \sum_{j=1}^{ncaras} \mathbf{F}_j^* \cdot \mathbf{n}_j A_j \quad (4)$$

La proyección del vector flujo numérico sobre la normal $\mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{n}_i$ que en adelante llamaremos $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^*$ se calcula basándose en el esquema TVD propuesto por Harten (Harten, 1982, 1983) y modificado luego por Yee (Yee y Harten, 1985). Si bien este método fue originalmente desarrollado para esquemas de diferencias finitas, se lo ha extendido exitosamente para formulaciones de volúmenes finitos (Udrea, 1984).

Para calcular el flujo numérico propuesto por Harten-Yee, suponiendo que la cara en que se evalúa el flujo numérico separa dos celdas que llamaremos i e $i + 1$, se debe comenzar desde los estados derecho e izquierdo (\mathbf{U}_{i+1} y \mathbf{U}_i), calcular el estado promedio de Roe (Roe, 1981; Roe y Pike, 1984) ($\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}$), calcular los autovalores ($\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m$) y autovectores ($\overline{\mathbf{r}}_{i+\frac{1}{2}}^m$) de la matriz jacobiana y expresar un salto de \mathbf{U} a través de la cara como combinación lineal de los autovectores del estado intermedio:

$$\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i = \sum_m \alpha_{i+\frac{1}{2}} \overline{\mathbf{r}}_{i+\frac{1}{2}}^m \quad (5)$$

Posteriormente, el flujo numérico se calcula según:

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1}}{2} + \frac{1}{2} \sum_m \Phi_{i+\frac{1}{2}}^m \overline{\mathbf{r}}_{i+\frac{1}{2}}^m \quad (6)$$

donde \mathbf{f}_i y \mathbf{f}_{i+1} son los flujos teóricos (físicos) normales a las caras en cada una de las celdas que dicha cara separa y $\Phi_{i+\frac{1}{2}}^m$ es el limitador de flujo que en el esquema original de Harten-Yee se calcula como:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^m = g_i^m + g_{i+1}^m - \left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^m \right| \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \quad (7)$$

siendo:

$$g_i^m = \frac{S}{2} \max \left[0, \min \left(\left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \right|, S \left| \lambda_{i-\frac{1}{2}}^m \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m \right| \right) \right] \quad (8)$$

$$S = \text{sign} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \right) \quad (9)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^m = \begin{cases} \frac{g_{i+1}^m - g_i^m}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m} & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m = 0 \end{cases} \quad (10)$$

La función limitadora utilizada en este esquema (Ec. (8)) se conoce popularmente como “minmod” (Sweeby, 1984; Leveque, 1992; Hirsch, 1992; Toro, 1999) y es la más difusiva, ya que toma el mínimo valor posible para que el esquema mantenga su condición TVD. Esto implica que en las discontinuidades el peso que se da en la combinación lineal al flujo de bajo orden es alto comparado con el que se da al de alto orden, con lo que el esquema resulta muy robusto pero con tendencia a ser demasiado difusivo. El otro extremo es la función limitadora “superbee” (Hirsch, 1992) que pondera mayormente la contribución del flujo de alto orden. La implementación de esta función conduce a esquemas excesivamente compresivos y con una tendencia a oscilaciones que hace que resulte muy poco robusto para aplicaciones prácticas generales.

En la solución numérica de las ecuaciones de Euler tridimensional aparecen cinco familias de ondas. Si se las enumera según su velocidad, siendo la uno la más lenta y la cinco la más rápida, se demuestra (Hirsch, 1992; Toro, 1999) que en las ondas de la familia dos a cuatro, la velocidad de las características a uno y otro lado de la discontinuidad son iguales e igual a la velocidad de movimiento de la discontinuidad. Esto hace que resulte muy difícil resolverlas numéricamente con precisión y que tiendan a resultar difusamente resueltas.

En el desarrollo del código se procuró mejorar la solución de las discontinuidades asociadas con las familias dos a cuatro usando funciones limitadoras compresivas (superbee) sin perder robustez gracias al uso de funciones limitadoras más difusivas (minmod) para las familias de ondas uno y cinco.

Para introducir la función limitadora “superbee” en el esquema de Harten-Yee se reemplaza la Ec. (8) por la Ec. (11):

$$g_i^m = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m < 0 \\ \max [0, \min(2r, 1), \min(r, 2)] \frac{1}{2} \left| \lambda_{i-\frac{1}{2}}^m \right| \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

siendo:

$$r = \frac{\left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \right| \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m}{\left| \lambda_{i-\frac{1}{2}}^m \right| \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m} \quad (12)$$

Para aumentar la robustez del esquema, la implementación de esta idea se lleva a cabo utilizando diferentes funciones limitadoras sólo en aquellas interfaces en que las discontinuidades de mayor intensidad relativa son las registradas en las ondas centrales y utilizando el esquema de Harten-Yee tradicional en el resto de los casos. Surge la necesidad entonces de comparar la intensidad de las distintas ondas. Para lograrlo no se pueden comparar directamente los coeficientes de la descomposición espectral $(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m)$ ya que estos dependen del módulo que se haya dado a cada autovector.

El esquema adopta un sistema de coordenadas local en cada cara donde el versor \mathbf{i} coincide con la normal, y los versores \mathbf{j} y \mathbf{k} indican dos direcciones tangenciales a la cara en cuestión. Teniendo en cuenta este sistema de coordenadas, los autovectores utilizados fueron:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ v \\ w \\ H - ua \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ \frac{u^2+v^2+w^2}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ w \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ v \\ w \\ H + ua \end{bmatrix} \quad (13)$$

siendo H la entalpía de estancamiento.

De la Ec. (13) puede deducirse que $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1$, $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^2$ y $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^5$ miden el salto de densidad en las ondas 1, 2 y 5 respectivamente y que $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^3$ y $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^4$ miden el salto en ambas componentes de la velocidad tangencial en las ondas tres y cuatro. Para comparar estos saltos se hace necesario la elección de una densidad de referencia ρ_{ref} y una velocidad de referencia u_{ref} para así comparar las intensidades:

$$I_1 = \frac{|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1|}{\rho_{ref}} \quad I_2 = \frac{|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^2|}{\rho_{ref}} \quad I_3 = \frac{|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^3|}{u_{ref}} \quad I_4 = \frac{|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^4|}{u_{ref}} \quad I_5 = \frac{|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^5|}{\rho_{ref}} \quad (14)$$

En el esquema utilizado en este trabajo se fijó como densidad de referencia a la media de los estados que la celda separa y como velocidad de referencia al promedio de las velocidades del sonido de dichas celdas.

Finalmente, si el máximo de I_1 , I_5 es mayor que el máximo de I_2 , I_3 , I_4 se utiliza el esquema Harten-Yee sin modificar; en caso contrario, los valores de g_i^2 , g_i^3 y g_i^4 se calculan con la función limitadora superbee (Ecs. (11) y (12)) y los de g_i^1 y g_i^5 con la función limitadora “minmod” (Ec. (8)).

3. IMPLEMENTACIÓN

3.1. Evaluación de las funciones limitadoras

Para el cálculo de la Ec. (7), es necesario evaluar las descomposiciones espectrales de los incrementos de las variables conservativas (Ec. (5)) no sólo en la interface $i + \frac{1}{2}$ sino también en la interface $i - \frac{1}{2}$ para el cálculo de g_i^m y en la interface $i + \frac{3}{2}$ para el cálculo de g_{i+1}^m . Como se comentara anteriormente, el método de Harten-Yee fue desarrollado originalmente para esquemas de diferencias finitas en donde está claramente definido qué valores toman las variables a ambos lados de las interfaces $i - \frac{1}{2}$ e $i + \frac{3}{2}$. Sin embargo, en el contexto de mallas no estructuradas tridimensionales en general de tetraedros, la identificación de las celdas i e $i + 1$ resulta intuitiva (las dos celdas que la cara separa) pero no la de las celdas $i - 1$ e $i + 2$, ya que alejándose de la cara, no hay dos únicas celdas en contacto con lo que ella separa.

Para alcanzar segundo orden de exactitud, el esquema necesita recabar información acerca de cómo están variando las variables conservativas hacia la derecha de la celda derecha y hacia la izquierda de la celda izquierda.

Si se analizan dos tetraedros iguales con una cara en común, se ve que los nodos no pertenecientes a la cara en común son puntos del espacio representativos del lugar en que se busca dicha información. Luego, si valiéndose de algún criterio, a esos nodos se les asignan valores de variables conservativas, pueden usarse como “celdas imaginarias” $i - 1$ e $i + 2$.

El esquema con el que se trabajó ha implementado estas ideas, calculándose los valores nodales como un promedio ponderado de las variables conservativas entre todas las celdas que tocan a cada nodo. El criterio de ponderación utilizado fue la inversa de las distancias:

$$U_{nodok} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{U_{celdai}}{d_{cg_{celda}-nodok}}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_{cg_{celda}-nodok}}} \quad (15)$$

donde $d_{cg_{celda}-nodok}$ es la distancia que separa al CG de la celda i y al nodo k y n es el número de celdas que tocan al nodo k .

Variable	Entrada subsónica (caso 1)	Entrada supersónica (caso 2)	Salida subsónica (caso 3)	Salida supersónica (caso 4)	Contorno sólido (caso 5)
densidad	Impone	Impone	Extrapolación	Extrapolación	Extrapolación
u	Impone	Impone	Extrapolación	Extrapolación	Extrapolación
v	Impone	Impone	Extrapolación	Extrapolación	Extrapolación
w	Impone	Impone	Extrapolación	Extrapolación	Extrapolación
presión	Extrapolación	Impone	Impone	Extrapolación	Extrapolación

Tabla 1: Criterios seguidos en el tratamiento de los contornos.

3.2. Imposición de las Condiciones de Contorno

El tratamiento de los contornos se hace a través de la técnica de celdas imaginarias (Hirsch, 1992; Toro, 1999). Se contemplan cinco tipos de contornos diferentes.

1. Entrada Subsónica
2. Entrada Supersónica
3. Salida Subsónica
4. Salida Supersónica
5. No penetración (Contorno sólido y simetría)

La determinación de los valores de las variables primitivas en las celdas imaginarias se hace o por extrapolación desde el interior del dominio o a partir de los valores impuestos en el contorno, dependiendo del número de características entrantes al dominio en cada caso.

En caso de tener que extrapolar el valor de una variable cualquiera V desde el interior del dominio, a la celda imaginaria se le asigna el mismo valor V de la celda adyacente al contorno. Como el flujo en la cara del contorno se calcula exactamente igual que el flujo en una cara interna, debe asignarse no sólo valor a la celda imaginaria sino también al cuarto nodo de la misma no incluido en la cara en cuestión. A éste se le asigna el mismo valor del cuarto nodo de la celda adyacente al contorno no incluido en la cara en cuestión.

En el caso de imponerse variables tomando información de la condición impuesta en el contorno, para determinar el valor en el centro de la celda imaginaria ($V_{celda\ imaginaria}$), se hace una interpolación lineal entre el valor en el centro de la V en la celda del contorno ($V_{celda\ real}$) y el impuesto en el contorno ($V_{impuesto\ contorno}$) calculándose:

$$V_{celda\ imaginaria} = 2V_{impuesto\ contorno} - V_{celda\ real} \quad (16)$$

Llamando u , v , y w a las tres componentes del vector velocidad, para el contorno de tipo uno a cuatro, las variables que se imponen y extrapolan son:

Para los contornos en que se impone no penetración, se proyecta la velocidad en las direcciones del sistema normal-tangente y se extrapolan todas las variables excepto la velocidad normal que se impone igual a cero en el contorno.

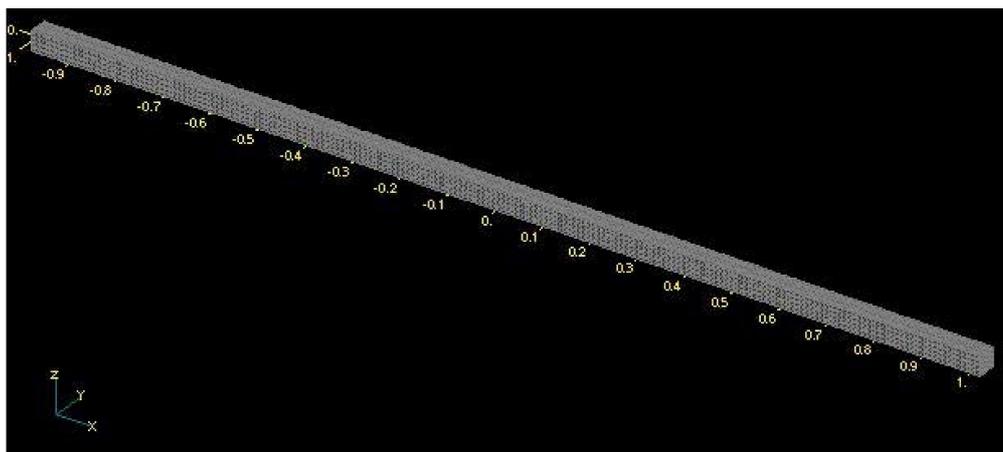


Figura 1: Malla utilizada para el modelo del flujo en el interior del tubo de choque

4. CASOS DE PRUEBA ANALIZADOS

Con el objeto de verificar el desempeño y la robustez del código, se modelaron cuatro casos clásicos de validación de códigos de CFD. El primero es el flujo en un tubo de choque que representa la materialización de un problema de Riemann. Con él se pretende explorar la capacidad del esquema para modelar discontinuidades de contacto en las que el flujo no tiene velocidad relativa respecto de la discontinuidad (discontinuidad en ondas de la familia 2). El segundo es el modelado del flujo supersónico sobre una cuña cuyo ángulo es de quince grados, obteniéndose en el borde de ataque de la cuña la formación de una onda de choque oblicua. El tercer caso es el flujo de aire a través de un difusor convergente-divergente, pudiéndose observar que en función de la presión de salida de la tobera, dependerá la intensidad de la onda de choque formada en el divergente. El último caso es el flujo transónico alrededor del ala ONERA M6. Esta ala es un caso clásico para la validación de códigos de CFD por tener una geometría simple combinada con las complejidades inherentes al régimen transónico, a saber: región supersónica en un campo de velocidades predominantemente subsónico, onda de choque y separación de capa límite.

4.1. Flujo en el interior de un tubo de choque

El modelo a analizar es un tubo de sección rectangular de 4 cm x 4 cm y de 2 m de longitud lleno con aire. Se parte de una condición inicial atmosférica en la mitad izquierda del tubo y presión de 0,1atm. y temperatura ambiente en la mitad derecha.

La evolución temporal del flujo tiene solución analítica conocida (Toro, 1999) consistente en un sistema de tres ondas, un choque que avanza hacia la derecha a una velocidad de $543,4 \frac{m}{s}$, una discontinuidad de contacto que también se mueve hacia la derecha a una velocidad de $277,6 \frac{m}{s}$ y un abanico de expansión que avanza hacia la izquierda a velocidades de entre $338,1$ y $4,9 \frac{m}{s}$.

La discretización espacial utilizada parte de una “célula generadora” constituida por 6 tetraedros que forman un cubo de 1 cm de lado que se repite en un arreglo de $4 \times 4 \times 200$ para formar la malla completa:

4.2. Onda de choque oblicua en una cuña

El modelo a analizar consiste en un flujo de aire de entrada supersónica ($M = 2,5$) con una densidad de $1,222 \frac{kg}{m^3}$, una velocidad de $851,9 \frac{m}{s}$ y una presión de 101352,9 Pa que alcanza una

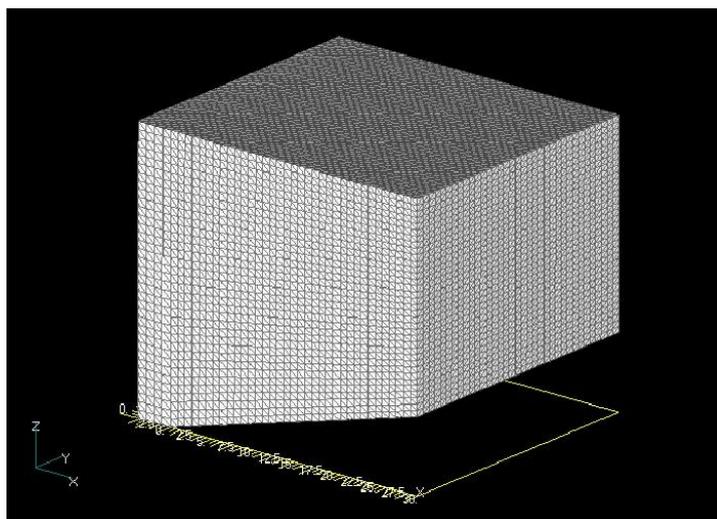


Figura 2: Mallado del volumen de trabajo para la simulación de la cuña.

cuña que se encuentra a 15° con respecto al flujo libre.

La malla utilizada para este caso tiene un total de 108.727 celdas con 22.078 nodos. Como se puede ver en la Figura 2, se puso 4 celdas aguas arriba de la cuña (no hay información que vuelva por ser flujo supersónico), minimizando así la cantidad de celdas que quedan por delante de dicha cuña que agregan un costo computacional adicional sin que incidan en los resultados.

El volumen de control tiene 34 cm en la dirección de avance del flujo, 30 cm de alto y 30 cm de ancho.

Las condiciones de contorno utilizadas fueron entrada supersónica (contorno tipo 2) en toda la cara delantera del volumen de control, salida supersónica (contorno tipo 4) en el plano trasero y no penetración (contorno tipo 5) en la cuña y los planos $x - y$ y $x - z$.

La solución numérica para este caso fue comparada con resultados analíticos obtenidos con anterioridad (Anderson, 1982) y son los mostrados en la Tabla 2.

Ángulo de la onda de choque oblicua	36,944490°
Número de Mach detrás del choque	1,873526
Relación de presión (p_2/p_1)	2,467500
Relación de densidad (ρ_2/ρ_1)	1,866549
Relación de temperatura (T_2/T_1)	1,321958

Tabla 2: Solución analítica para el flujo supersónico no viscoso sobre una cuña.

4.3. Flujo en el interior de un difusor

Este caso en estudio consiste en un flujo de aire que fluye dentro de una tobera convergente-divergente. Esta tobera tiene una garganta de radio igual a 44 mm, la entrada al convergente tiene un radio de 1,4 veces el radio de la garganta y la salida del divergente de 1,5 veces. La malla utilizada para este caso (ver Figura 3) tiene un total de 26.038 celdas tetraedros y 6.185 nodos.

Se trabajo con un flujo de entrada con un $M = 0,315$ (dado por la relación de áreas entre la garganta y la de entrada), una presión total de 134999,3 Pa y una temperatura total de 277,78 K

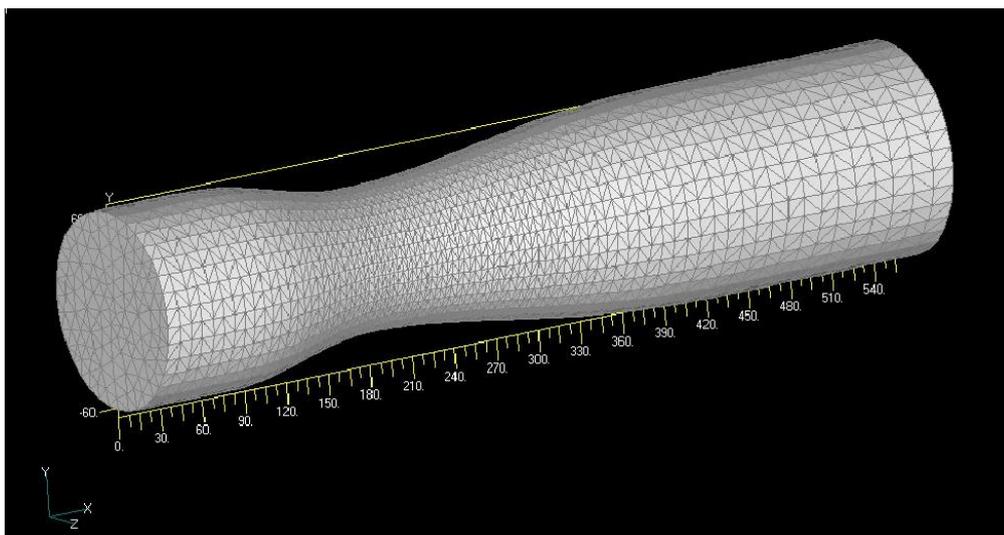


Figura 3: Malla utilizada para el flujo dentro del difusor

resultando entonces las condiciones de contorno que son entrada subsónica (tipo 1), con lo cual la densidad y la velocidad en sus tres componentes son definidas con valores:

$$\rho = 1,5803 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad u = 105,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v = w = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La presión no es definida, ya que es calculada por el programa.

En los nodos de la superficie exterior se impuso condición de no penetración y en el plano de salida se impuso salida subsónica, por lo cual, se impone solamente la presión.

En esta simulación se presentan dos estudios diferentes. El primero es el correspondiente a la formación de una onda de choque débil que se consigue imponiendo una presión estática de salida igual a 110660,9 Pa. El otro corresponde a la formación de una onda de choque fuerte por medio de una presión de salida de 97216,8 Pa. Los resultados obtenidos son comparados con la solución analítica dada por el flujo compresible estacionario y unidimensional.

4.4. Ala ONERA M6

Este caso hace referencia al flujo transónico en torno de un ala, ONERA M6. Ésta es un ala con flecha pero sin torsión. Su sección transversal es dada por el perfil simétrico ONERA D, y su geometría es mostrada en la Figura 4. La geometría de este perfil puede ser encontrada en la literatura correspondiente (Schmitt y Charpin, 1979).

Para el desarrollo de la malla (Figura 5), se hizo uso de la información dada para el ala modelándose un volumen de control que encierre a dicha ala conformando un total de 98.136 celdas y 18.929 nodos.

El volumen de control que encierra el ala es un paralelepípedo rectangular que se obtuvo extendiéndose en 10 cuerdas por delante del borde de ataque del ala, 30 cuerdas por detrás del borde de fuga, 10 cuerdas por encima y por debajo del plano de simetría del ala y 6 envergaduras en dirección a la misma. Estas dimensiones fueron establecidas de manera que no exista influencia del contorno del volumen en los resultados a obtener y además, porque, en un radio de una cuerda del ala se encuentra aproximadamente el 75 % de los elementos del modelo y tan sólo un 25 % en el resto del modelo, lo cual, no agrega un costo computacional significativo.

Las condiciones de contorno utilizadas fueron entrada subsónica en toda la parte delantera del volumen de control, salida subsónica en el plano trasero y no penetración en el ala y los planos y-x y z-x.

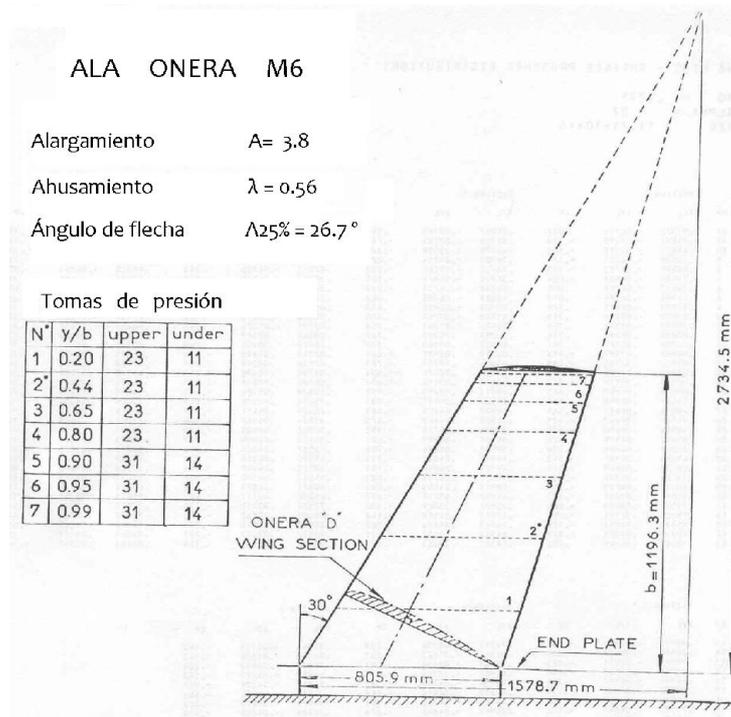


Figura 4: Geometría del ala ONERA M6

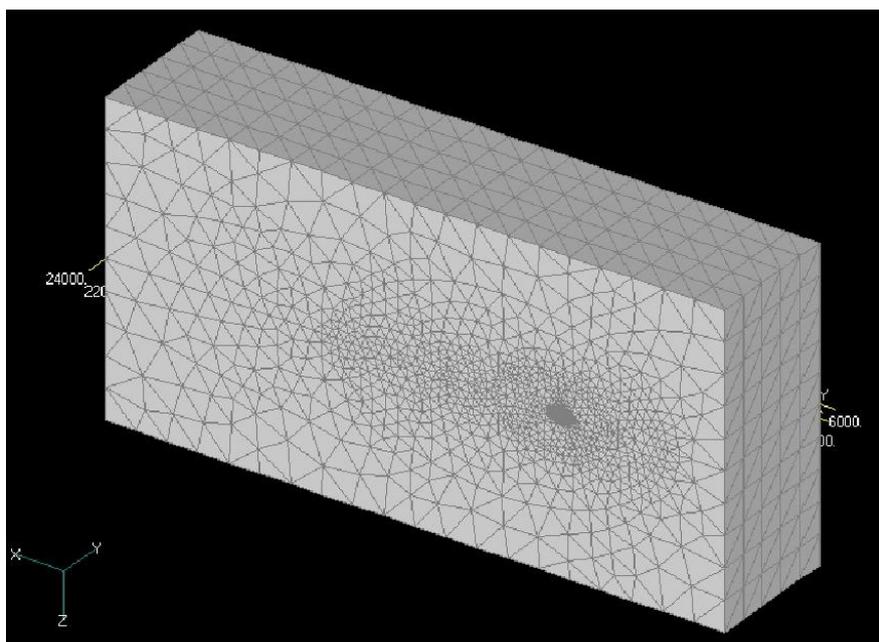


Figura 5: Malla utilizada para el modelado del flujo alrededor del ala Onera M6.

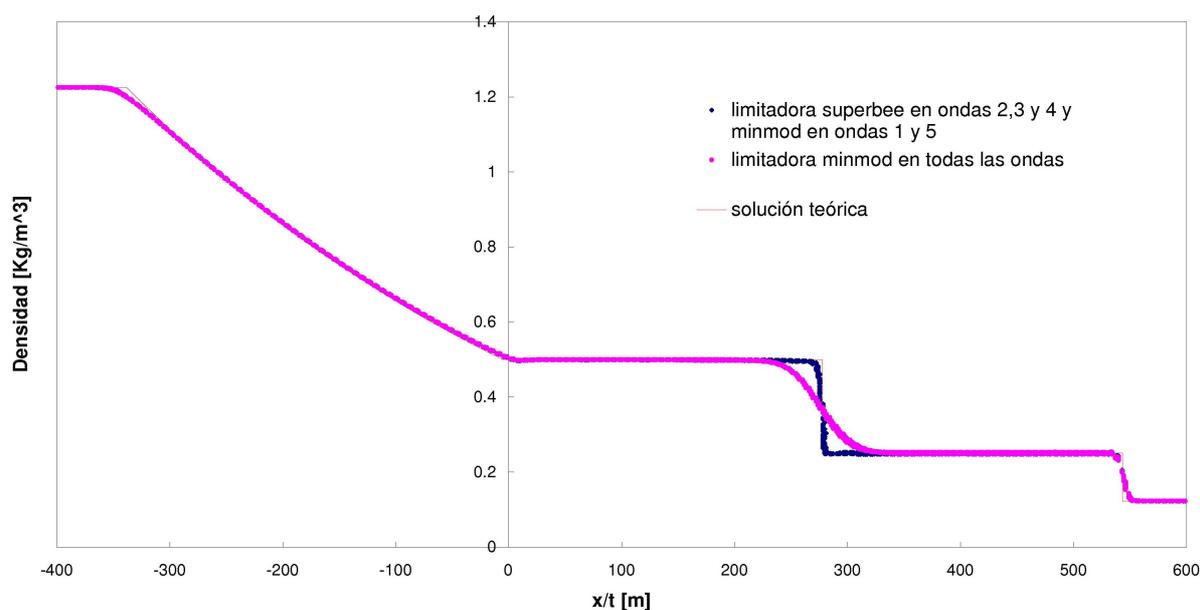


Figura 6: Resultado tubo de choque

Para el flujo de entrada se utilizó aire con una densidad de $4,307 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ y una presión de $315979,8$ Pa, las componentes de velocidad impuesta en las direcciones z e y fueron cero y la componente según x fue de $260,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ considerando las condiciones de flujo del test 2308 (Schmitt y Charpin, 1979), que vienen dada por un Mach de entrada de $0,8395$, con una presión de $45,82899$ psia, una temperatura de 460 R y con un ángulo de ataque del ala de $3,06^\circ$.

5. RESULTADOS OBTENIDOS

5.1. Flujo en el interior del tubo de choque

Como se sabe (Leveque, 1992; Hirsch, 1992; Toro, 1999) la solución de los problemas de Riemann para el caso de las ecuaciones de Euler conduce a un problema de similitud, por lo que las variables no son funciones del espacio y del tiempo independientemente sino de su cociente. Su solución general es un sistema formado por tres tipos de ondas (choques y/o abanicos de expansión en los extremos y discontinuidad de contacto en la zona central). Para analizar el desempeño del esquema en la predicción de ondas de las tres familias, en la Figura 6 se grafica la variación de la densidad como función de x/t . Se presenta la solución analítica en línea roja llena, en rombos azules los resultados obtenidos por el esquema propuesto en este trabajo y en cuadrados magenta los obtenidos con el esquema de Harten-Yee tradicional.

En la Figura 6 se grafica la variación de la densidad como función de x/t . Puede apreciarse que el modelado de las ondas no lineales es exactamente igual para ambos esquemas pero el modelado de la discontinuidad de contacto ha sido notablemente mejorado gracias al cambio de función limitadora en las ondas centrales.

Se destaca la ausencia de oscilaciones en las cercanías de las discontinuidades en las predicciones de ambos esquemas y la exactitud en el cálculo de las velocidades de propagación de las ondas.

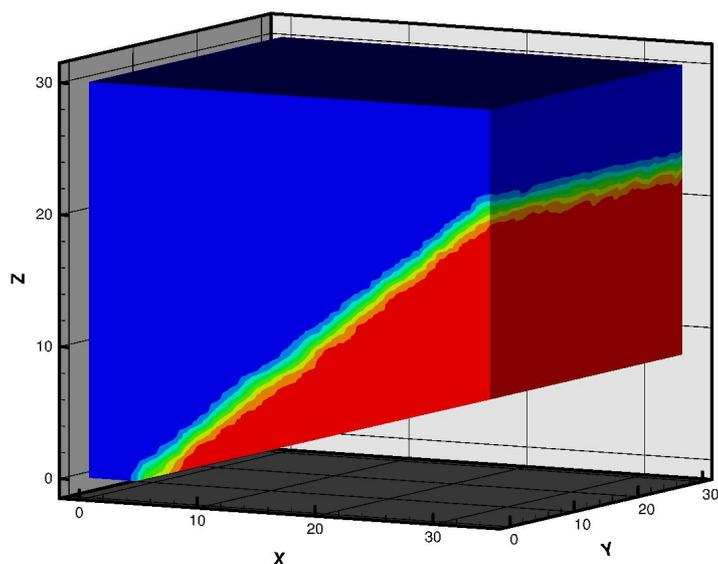


Figura 7: Visualización de la presión en todo en volumen de control

5.2. Onda de choque oblicua en una cuña

En la Figura 7 se presenta la visualización de la presión en todo el volumen de control en donde se puede ver claramente la formación de la onda de choque en el extremo de la cuña. Se destaca en la figura la adecuada distribución de las presiones y la excelente visualización del choque.

Si se aproxima una recta que contenga la zona de la onda de choque y se mide el ángulo entre la recta y el plano $x - y$, los resultados obtenidos con el código de trabajo forman un ángulo de inclinación de la onda de $37,10^\circ$, mientras que el obtenido en forma analítica (Anderson, 1982) es de $36,945^\circ$, consiguiéndose un error porcentual aproximado del 0,4.

Analizando lo que pasa delante y detrás la onda de la onda oblicua se tiene:

Delante de la onda de choque

$$p_{del} = 101352,9 \text{ Pa}$$

$$\rho_{del} = 1,222 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$T_{del} = 288,89 \text{ K}$$

Detrás de la onda de choque

$$p_{det} = 249750 \text{ Pa}$$

$$\rho_{det} = 2,287 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$T_{det} = 380,42 \text{ K}$$

En la Tabla 3 se compara los distintas relaciones obtenidas en este trabajo, las dadas por Anderson y el error porcentual entre ambos.

Relación	Código	Anderson	Error porcentual
de presión	2,4642	2,4675	0,1
de densidad	1,8715	1,8665	0,26
de temperatura	1,3168	1,3220	0,25

Tabla 3: Resultados dados por el código, por Anderson y el error porcentual entre ambos.

Y comparando por último el Mach detrás de la onda ($M = 1,881$) con la solución analítica ($M = 1,8735$) se alcanza un error porcentual de 0,4. Se constata entonces que se alcanzaron excelentes resultados.

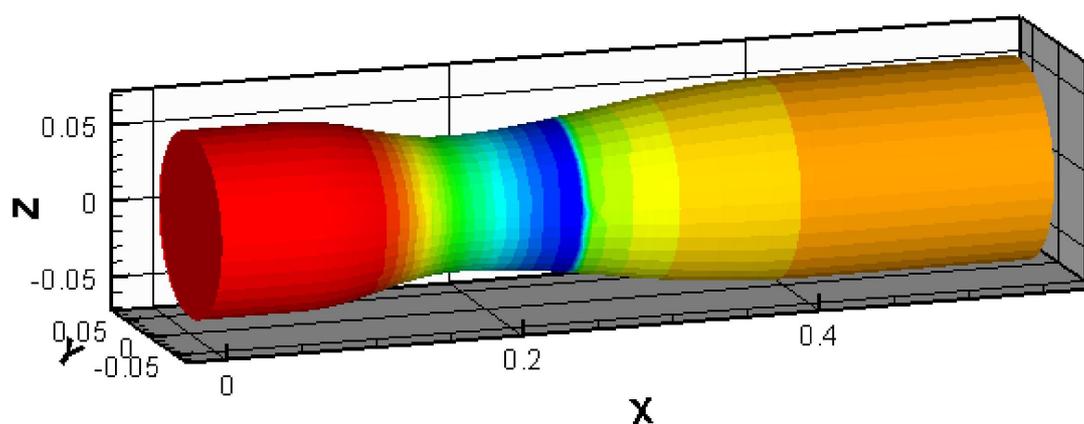


Figura 8: Distribución de presiones dentro del difusor

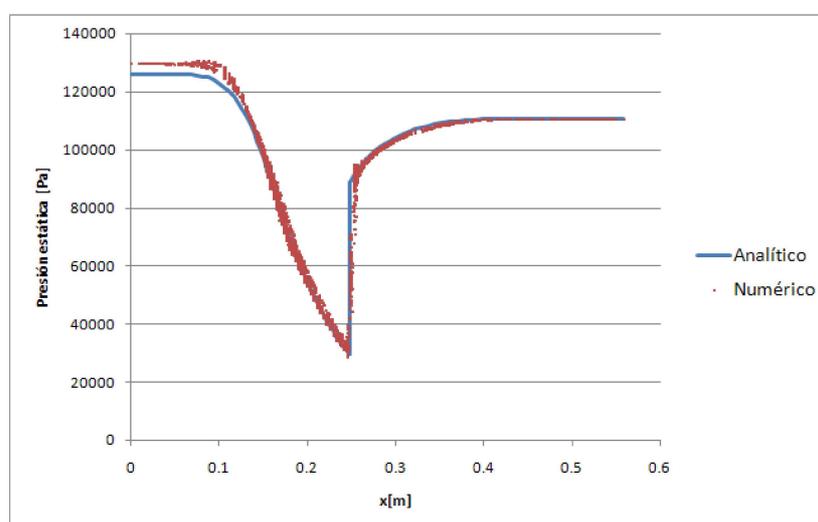


Figura 9: Resultados del Difusor para la onda de choque débil

5.3. Flujo en el interior del Difusor

En la Figura 8 se presenta la visualización de la presión en todo el difusor para la onda de choque débil en donde se puede ver la formación de la onda de choque aguas arriba de la garganta.

En la Figura 9 y 10 se grafica la variación de la presión a lo largo del difusor donde se puede apreciar las ondas de choque para ambos casos. Se presenta la solución analítica (flujo compresible estacionario y unidimensional) en línea azul y en línea roja los resultados obtenidos por el esquema propuesto en este trabajo.

Puede apreciarse en la Figura 9 y 10 que el modelado del difusor presenta una excelente correlación con los valores teóricos dados considerando flujo compresible estacionario unidimensional para ambos casos.

En la zona de entrada se aprecia una diferencia en los resultados obtenidos, esto se debe a que el programa trabajó en esta zona con el esquema FVS que es más difusivo que el de Harten-Yee.

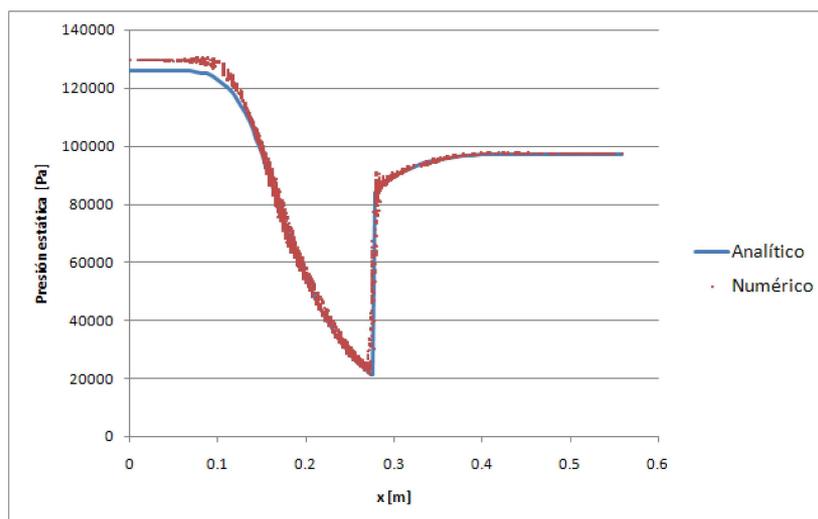


Figura 10: Resultados del Difusor para la onda de choque fuerte

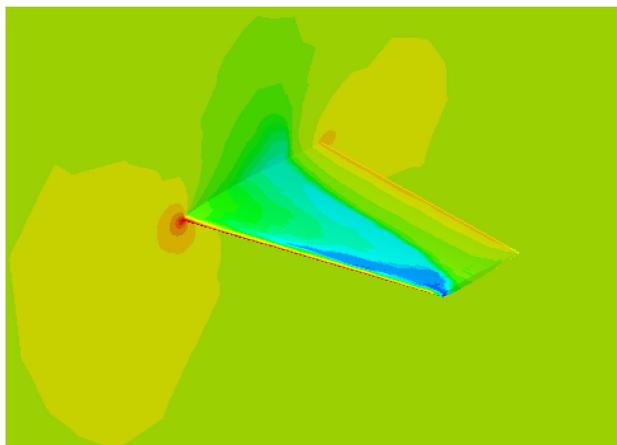


Figura 11: Presión en la superficie y plano de simetría del ala Onera M6

5.4. Ala ONERA M6

Este caso fue analizado solamente para un ángulo de ataque del ala de $3,06^\circ$, en donde en la Figura 11 se puede ver la distribución de presiones a lo largo del extradós del ala.

En la Figura 11 se aprecia la formación de una onda de choque en la plano de simetría del ala que se distribuye aguas arriba a lo largo de la envergadura y de otra onda de choque próxima al borde de ataque que se posiciona aguas abajo a medida de que barre la envergadura hasta una zona en donde se encuentran dichas ondas, estableciéndose una única onda que llega hasta la puntera del ala.

La distribución de presiones sobre el ala fue comparada con los datos experimentales (Schmitt y Charpin, 1979). En las Figuras 12, 13, y 14 se grafica el coeficiente de presión en función de la relación $(\frac{x}{c})$ para el intradós y extradós del ala en diferentes secciones de la envergadura.

Como puede apreciarse, la resolución de las discontinuidades es satisfactoria, pudiéndose captar las dos ondas de choques que se generan sobre la superficie del ala, pero, en la zona correspondiente a la elevada succión, próxima al borde de ataque, los resultados se alejan un poco de los dados en forma experimental.

Una forma más clara de poder visualizar como cambia el C_p a lo largo de la envergadura,

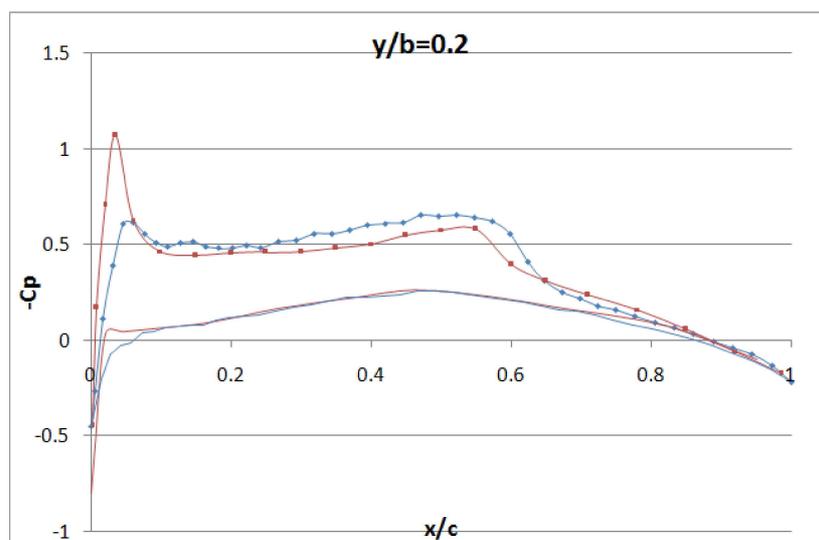


Figura 12: Gráfico del coeficiente de presión en la superficie del ala para la sección $y/b=0.2$

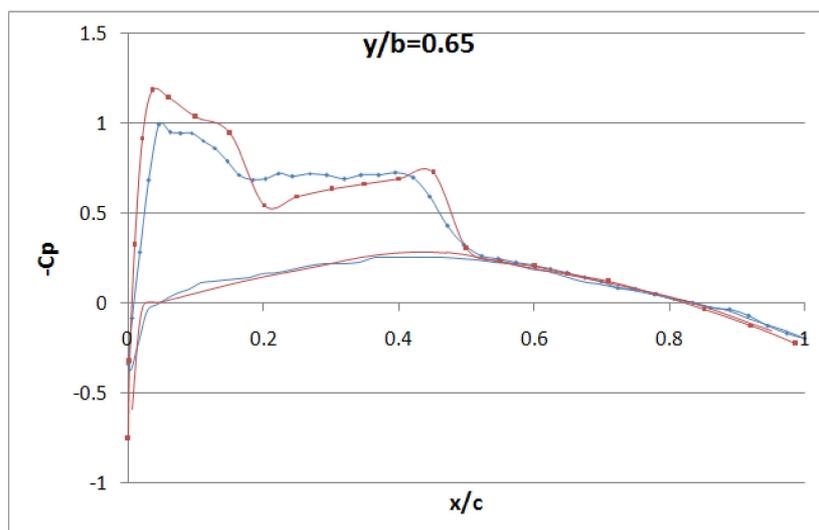


Figura 13: Gráfico del coeficiente de presión en la superficie del ala para la sección $y/b=0.65$

es realizando una visualización 3D. Esto se puede ver en la Figura 15 en donde se presenta el coeficiente de presión para cada sección escalado con respecto a la cuerda del ala para una mejor visualización.

Si observamos ahora la Figura 16, se ve que la discretización del sector cercano al borde de ataque en la raíz del ala se encuentra notablemente densificado. Pero, realizando cortes en las estaciones correspondiente al 20 y 65 % de la envergadura y , graficando los elementos tal cual son cortados (ver Figura 17 y 18), se aprecia, que el mallado por dentro no es tan interesante como el del plano de simetría, ya que a pesar de ser la discretización en el plano correspondiente a la raíz del ala densificada, aparecen unos elementos de tamaños excesivos que no son los indicados como para satisfacer una adecuada captación de lo que ocurre en dicha zona.

Estos elementos desproporcionados próximos a la superficie del ala nos conduce a que el programa no pueda desplegar todo su potencial en la determinación de las variables en cada punto espacial del volumen de control, ya que dichos elementos exagerados no podrían captar con claridad lo que ocurre en la zona que ellos cubren. No obstante esto, los resultados obtenidos

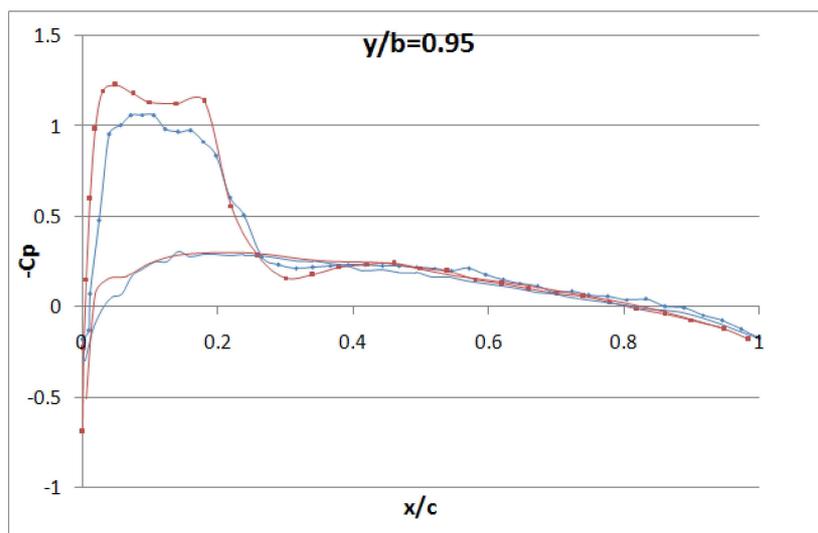


Figura 14: Gráfico del coeficiente de presión en la superficie del ala para la sección $y/b=0.95$

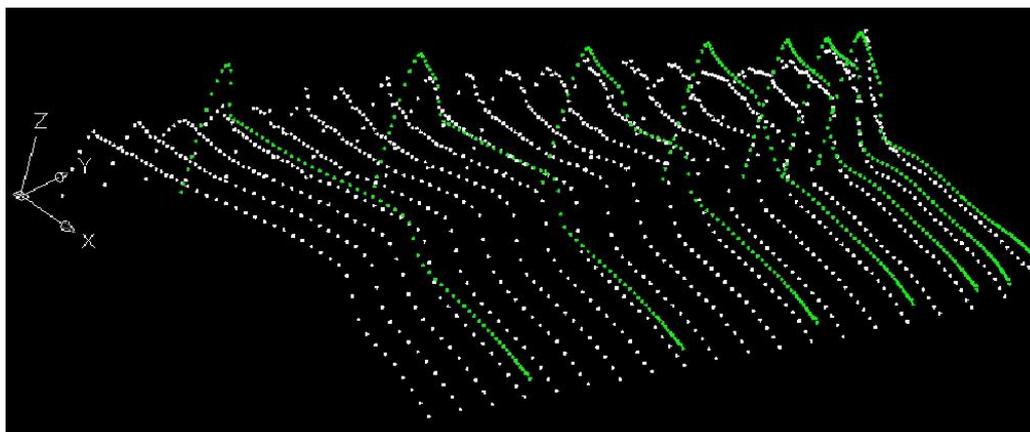


Figura 15: Coeficiente de presión a lo largo de la cuerda y envergadura del ala

muestran que el programa logró aproximarse a los datos en forma experimental.

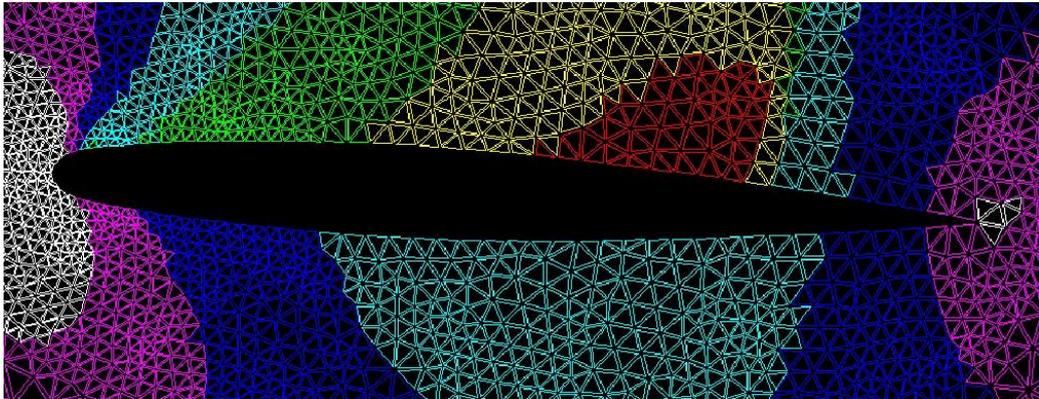


Figura 16: Visualización de los elementos para el modelo en el plano de simetría.

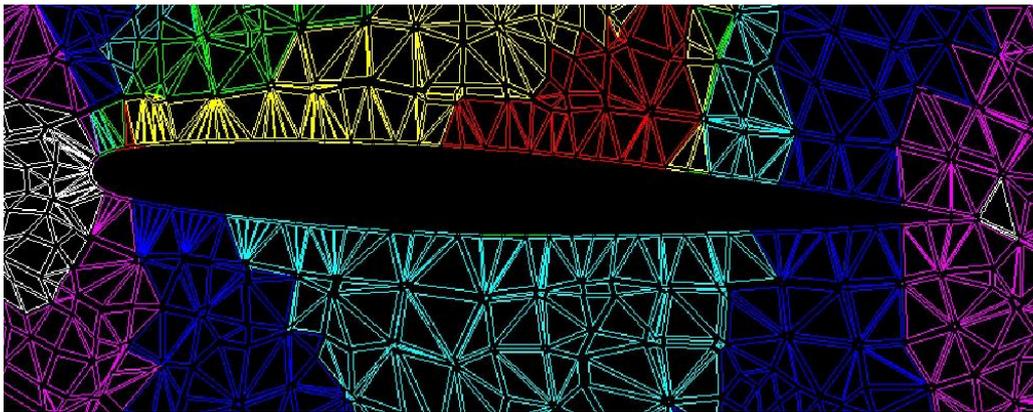


Figura 17: Visualización de los elementos para el modelo en la sección $y/b=0.2$

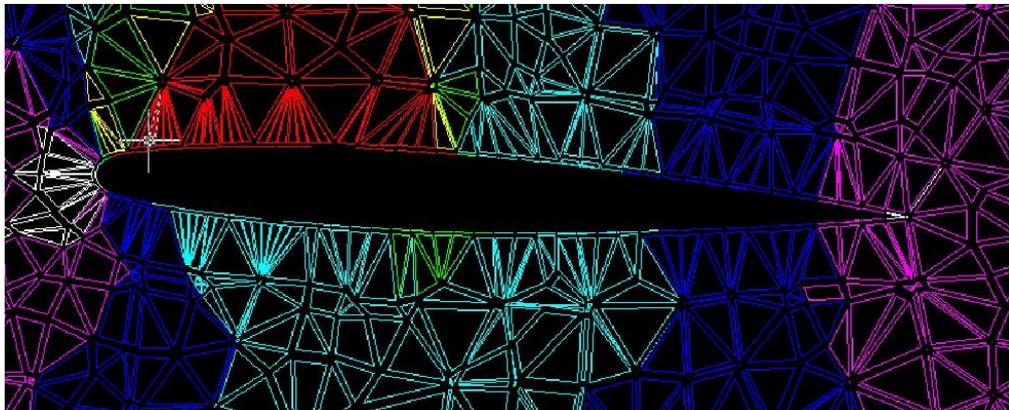


Figura 18: Visualización de los elementos para el modelo en la sección $y/b=0.65$

6. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en el modelado del flujo en el tubo de choque muestra que el esquema propuesto disminuye considerablemente la viscosidad numérica del esquema de Harten-Yee en el modelado de discontinuidades de contacto asociadas con ondas de la familia dos.

Conclusiones similares se desprenden del modelado de la onda de choque oblicua sobre la cuña en donde la Tabla 3 muestra que el esquema de trabajo soluciona con buena precisión las condiciones del flujo. Se constata entonces que el esquema resulta notablemente adecuado para este tipo de casos, en donde aparecen ondas de choque generadas por cuñas, como podría ser la entrada a una tobera de un motor a reacción.

Respecto al modelado del difusor, la conclusión más destacable es la adecuada correlación entre los resultados obtenidos numéricamente y los analíticos por medio del flujo compresible estacionario y unidimensional. Así mismo, es destacable la determinación de la posición en donde se encuentra las ondas de choque que aparecen en la zona divergente.

Las conclusiones respecto del ala Onera M6 es que, debido a que no se trabajo con un mallado óptimo para definir lo que ocurre en cada sector específico del ala, los resultados han mostrado una buena aproximación en la captación de las ondas de choque, así como también las características del flujo.

Finalmente, cabe destacar que los resultados obtenidos muestran la capacidad que tiene el código para simular, tanto casos estacionarios, como también inestacionarios.

REFERENCIAS

- Anderson J. *Modern Compressible Flow*. McGraw Hill, 1982.
- Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite difference schemes. *Technical report, NYU*, 1982.
- Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. 49:250–257, 1983.
- Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. 1992.
- Leveque R.J. Numerical methods for conservation law. 1992.
- Roe P.L. Approximate riemann solver, parameter vectors, and difference schemes. 43:357–372, 1981.
- Roe P.L. y Pike J. Efficient construction and utilization of approximate riemann solutions. *In Computing Methods in Applied Science and Engineering*, 1984.
- Schmitt V. y Charpin F. Pressure distributions on the onera-m6-wing at transonic mach numbers. 1979.
- Sweeby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. on Numerical Anal.*, 21:995–1011, 1984.
- Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. 1999.
- Udrea B. An advanced implicit solver for mhd. 22:465–474, 1984.
- Yee H.C. R.W. y Harten A. Implicit total variation diminishing (tvd) schemes for steady-state calculations. 57:327–360, 1985.