

VIBRACIONES NATURALES DE MEMBRANAS RECTANGULARES CON APOYOS PARCIALES INTERMEDIOS DE GEOMETRIA ARBITRARIA

C. P. Filipich^{1,2,3}, E. A. Bambill^{2,3}

⁽¹⁾Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional

⁽²⁾Departamento de Ingeniería, Area Construcciones, Universidad Nacional del Sur
Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3200

⁽³⁾Departamento de Ingeniería Civil , Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional
11 de Abril 461 B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4555220–Interno 132
e-mail: ebambill@frbb.utn.edu.ar , web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar/>

RESUMEN

Las vibraciones naturales de membranas rectangulares con apoyos parciales intermedios, son resueltas a través de un método variacional directo, que se conoce como MEC (Método del Elemento Completo). Se basa en la utilización de series trigonométricas ampliadas de convergencia uniforme. Afortunadamente, para el caso de membranas apoyadas en el contorno, como es el caso que nos ocupa, la serie más sencilla que nosotros utilizaremos se reduce, en el dominio unitario, a una de Fourier de senos en ambos sentidos coordenados. Además, continuando con una idea original de un trabajo de placas con apoyos parciales intermedios, se amplía el funcional a minimizar con multiplicadores de Lagrange, que proviene de la suposición de Trabajo Virtual nulo de la reacción del apoyo parcial intermedio. La novedad importante que probamos en el presente trabajo, es que el parámetro de frecuencia de membranas poligonales en general, no coincide con la raíz cuadrada del parámetro para placas simplemente apoyadas de igual forma. Evidentemente, esto se debe a la inclusión de apoyos intermedios. De no existir éstos, como se conoce desde el siglo pasado, se verifica la analogía de la relación cuadrática entre parámetros correspondientes. Por otro lado, y además de una serie de ejemplos que se adjuntan al trabajo, se demuestra cómo y dependiendo del algoritmo característico, es posible de manera inequívoca, identificar eventuales parámetros espurios, que el planteo, si bien exacto, podría llegar a incorporar.

Palabras claves: membranas rectangulares; apoyos parciales intermedios; frecuencias naturales; ecuación de Helmholtz.

1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Helmholtz se encuentra en múltiples campos de la ingeniería y de la física, [3],[12],[13]. Es utilizada en análisis acústica, problemas de difracción de ondas, vibraciones en membranas, campos electromagnéticos, etc.

Recientemente, las membranas delgadas están siendo utilizadas con mayor asiduidad en las estructuras espaciales, debido al creciente requerimiento de superficies reflectantes para los instrumentos solares, radares espaciales y reflectores de antenas. Estas estructuras superlivianas se han tornado sumamente atractivas pues satisfacen los requerimientos estructurales a muy bajo costo. Por lo tanto, el desarrollo y la validación de métodos de análisis que permitan predecir su comportamiento vibracional, está en la vanguardia de las actividades de investigación actuales. Entonces, esta contribución intenta desarrollar una nueva técnica de análisis para las vibraciones de estructuras membranales.

La búsqueda de autovalores, en problemas gobernados por la ecuación de Helmholtz en 2D, vibración de membranas, problemas de guías de ondas acústicas, distribución bidimensional del calor, etc, es abordado en el presente trabajo por medio de un método directo, cuyas minimizantes son series trigonométricas ampliadas de convergencia uniforme, y constituyen una metodología conocida como MEC. (ver, por ejemplo, [5],[6],[7])). Se plantea en la Sección 2 el problema para membranas rectangulares vibrantes, pero debido a la inclusión de apoyos lineales parciales intermedios, de directriz arbitraria, se adiciona un aporte al funcional clásico.

La propuesta para ampliar el funcional, que utilizamos en el método variacional, constituye una adaptación de un trabajo análogo sobre vibración de placas [4], donde dicha ampliación se justifica teóricamente a través del trabajo virtual nulo de la reacción lineal desconocida del apoyo, cuando la elástica (forma modal) es nula. En un trabajo posterior [8], [9], [10], [11], bajo la asunción de que líneas oblicuas “.....vibran armónicamente.....”, es utilizada una técnica que posee algunos puntos concordantes con nuestra propuesta, pero fuera del contexto energético que aquí adjudicamos a nuestra metodología, con una fundamentación rigurosa.

En la sección 2 se indica también, al plantear matricialmente la resolución para hallar frecuencias naturales, cómo pueden dejarse de lado los autovalores espurios que no corresponden al problema planteado. Por supuesto, la técnica, basada en teoremas más o menos conocidos del cálculo matricial, puede aplicarse a todo problema no necesariamente variacional, donde el planteo conduzca a un algoritmo formalmente análogo al que presentamos. En un apéndice incluimos la demostración de por que en este trabajo – membranas con apoyos parciales intermedios- deja de verificarse, en general, la divulgada analogía de que los parámetros de frecuencia naturales de placas poligonales apoyadas, son el cuadrado de las correspondientes a membranas de igual forma. [2]; es así que se cometería un serio error al extender la analogía aludida, a casos como el presente. Valores numéricos de la sección 3 darán sustento a lo demostrado.

En la Sección 3 se presentan los valores numéricos de frecuencias naturales y sus formas modales correspondientes para una serie de ejemplos seleccionados.

En la Sección 4, se incluyen las conclusiones y los comentarios pertinentes.

2. PLANTEO DEL PROBLEMA

El problema lineal que resolveremos por medio de una solución generalizada, es el gobernado por la siguiente ecuación.

$$\begin{cases} \nabla^2 w + \Omega^{*2} w = 0 & (a) \\ w_{\Gamma_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots) & (b) \end{cases} \quad (1.)$$

en el dominio de la figura 1.

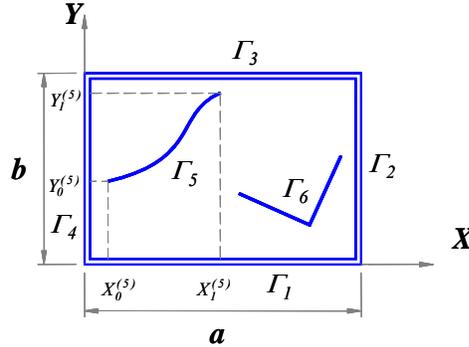


Fig. 1. Membrana rectangular simplemente apoyada con apoyos lineales intermedios

donde $\nabla^2(\bullet)$ es el operador laplaciano, en coordenadas cartesianas ortogonales (XY), $\Omega^{*2} = \omega^2 \rho / T$ es el parámetro de frecuencia adoptado, siendo ρ y T la densidad y la tensión uniformes respectivamente de la membrana, ω la frecuencia circular natural al aceptar modos normales de vibración. Además, Γ_k ($k = 1, 2, \dots$) son las regiones lineales donde la forma modal $w = \hat{w}(X, Y)$ ($0 \leq X \leq a; 0 \leq Y \leq b$) se anula.

Previamente a escribir el funcional energético, adimensionalizaremos el planteo, respecto del lado a . Entonces, si $x = X/a$ e $y = \lambda Y/a$, donde $\lambda \equiv a/b$, utilizaremos el siguiente parámetro de frecuencia

$$\Omega^2 = \Omega^{*2} a^2 = \frac{\rho}{T} \omega^2 a^2 \quad (2.)$$

Entonces, la ecuación para $w = \hat{w}(x, y)$ es

$$\begin{cases} w'' + \lambda^2 \bar{w} + \Omega^2 w = 0 & (a) \\ w_{\Gamma_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots) & (b) \end{cases} \quad (0 \leq x, y \leq 1) \quad (3.)$$

y como sabemos, el funcional correspondiente puede escribirse como

$$U = \iint_A [(w'^2 + \lambda^2 \bar{w}^2) - \Omega^2 w^2] dA \quad (4.)$$

donde dA es el elemento de área, y hemos indicado por

$$(\bullet)' = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}; \dots; (\bar{\bullet}) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial y}; \dots;$$

El funcional (4) deberá ampliarse con aquellas restricciones que la secuencia utilizada no satisfaga idénticamente. En general entonces, si sobre el apoyo Γ_j la elástica adoptada w no se anula idénticamente, proponemos lo siguiente. Sea en la figura 2 el apoyo Γ_k y su reacción dada por la función $\mu_k = \mu_k(s)$, donde por s

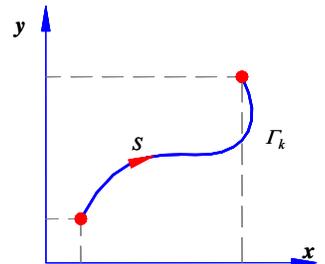


Fig. 2 – Parámetros locales

indicamos el arco de la curva. No perdemos generalidad si imponemos que

$$0 \leq s \leq l$$

La curva Γ_k se define como

$$(\Gamma_k) \begin{cases} x_k = x_k(s) \\ y_k = y_k(s) \end{cases} \quad (5.)$$

Sabemos que además deberá cumplirse, que

$$w(x_k(s), y_k(s)) = w_k(s) = 0 \quad (6.)$$

Forzosamente entonces, el trabajo virtual $(TV)_k$ deberá anularse.

$$(TV)_k = \int_0^l \mu_k(s) w_k(s) ds = 0 \quad (7.)$$

Cada una de las n regiones donde w se anule idénticamente, dará lugar a una integral como la (7) y que pasará a extender el funcional (4). Luego, el funcional extendido a utilizar es

$$U_a = U - \sum_{k=0}^n (TV)_k = 0 \quad (8.)$$

Esta forma de poner en evidencia las restricciones (extremos restringidos) conduce a una definición de multiplicadores de Lagrange para problemas continuos holónomos.

Ahora bien, conocemos de MEC que en un espacio bidimensional como el que nos ocupa, dos de las infinitas frecuencias posibles de convergencia uniforme en un dominio unitario (cuadrado) son:

$$w = w(x, y) = \sum_{i=1} A_i(y) \text{sen}(i\pi x) + x A_0(y) + a(y) \quad (9.)$$

o bien

$$w = w(x, y) = \sum_{i=1} B_i(y) \text{cos}(i\pi x) + B_0(y) \quad (10.)$$

Si a su vez en estas series trigonométricas ampliadas desarrollamos de manera análoga los coeficientes, obtendremos,

$$w(x, y) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} A_{ij} \text{sen}(i\pi x) \text{sen}(j\pi y) + y \left(\sum_{i=1} A_{i0} \text{sen}(i\pi x) + b_0 \right) + x \left(\sum_{j=1} A_{0j} \text{sen}(j\pi y) + a_0 \right) + \sum_{i=1} a_{i0} \text{sen}(i\pi x) + \sum_{j=1} a_{0j} \text{sen}(j\pi y) + A_{00}xy + \alpha \quad (11.)$$

o bien,

$$w(x, y) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} B_{ij} \text{cos}(i\pi x) \text{cos}(j\pi y) + \sum_{i=1} B_{i0} \text{cos}(i\pi x) + \sum_{j=1} B_{0j} \text{cos}(j\pi y) + B_{00} \quad (12.)$$

Estas series permiten desarrollar cualquier función continua en el dominio unitario con convergencia uniforme, adecuando (lo que es elemental), los coeficientes de (10) y (11).

Sin pretender extendernos sobre el MEC, digamos solamente que la serie (11) conserva su convergencia uniforme si la derivamos una vez; en cambio las derivadas segundas pierden su convergencia uniforme, y solo son convergentes en L_2 (en la media).

En cuanto a la (12) ya sus derivadas primeras son convergentes en L_2 . Como es bien conocido en los métodos variacionales de problemas lineales, basta con que las secuencias extremantes involucradas en el funcional sean de convergencia en L_2 , verificando únicamente las condiciones de borde esenciales o geométricas. No será el caso para membranas, ya que como dijimos, las derivadas primeras son de convergencia uniforme, pero sí serán de convergencia en L_2 , por ejemplo para el problema de placas. Afortunadamente, cuando imponemos en el presente problema que $w(x,y)$ dada por (10), se anule sobre los contornos $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ y Γ_4 (condiciones geométricas o esenciales), la serie se reduce a la muy conocida

$$w = w(x,y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \text{sen}(i\pi x) \text{sen}(j\pi y) \quad (13.)$$

que es la que utilizaremos para obtener las formas modales.

En cuanto a las reacciones $\mu_k(s)$ de cada apoyo parcial interno, de acuerdo a (9) o (10), podríamos desarrollarlo con convergencia uniforme como

$$\mu_k(s) = \sum_{p_k=1}^R \gamma_p^{(k)} \text{sen}(p_k \pi s) + \gamma_0^{(k)} s + m^{(k)} \quad (14.a)$$

$$\mu_k(s) = \sum_{p_k=0}^R \gamma_p^{(k)} \cos(p_k \pi s) \quad (14.b)$$

Sin embargo, es muy sencillo demostrar que bastaría imponer

$$\mu_k(s) = \sum_{p_k=1}^R \gamma_p^{(k)} \text{sen}(p_k \pi s) \quad (15.)$$

con convergencia en L_2 para obtener iguales $(TV)_k$ dados por (7). Nosotros en el presente trabajo emplearemos las expresiones (14b).

Entonces, el funcional ampliado valdrá:

$$U_a = \iint \left[\left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N i\pi A_{ij} c_i s_j \right)^2 + \lambda^2 \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N j\pi A_{ij} s_i c_j \right)^2 - \Omega^2 \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} s_i s_j \right)^2 \right] dA - \sum_{k=1}^n \sum_{p_k=0}^R \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_p^{(k)} A_{ij} \int_0^l \cos(p_k \pi s) \text{sen}(i\pi x(s)) \text{sen}(j\pi y(s)) ds \quad (16.)$$

De la condición de estacionaridad para U_a , es decir,

$$\delta U_a = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\partial U_a}{\partial A_{ij}} \delta A_{ij} + \sum_{k=1}^n \sum_{p_k=0}^R \frac{\partial U_a}{\partial \gamma_p^{(k)}} \delta \gamma_p^{(k)} = 0 \quad (17.)$$

y de asumir que son independientes las variaciones de los coeficientes, hallamos que debe verificarse el siguiente sistema homogéneo, que matricialmente escribimos como

$$\underline{D}\underline{V} = \underline{Q} \tag{18.}$$

donde \underline{D} es una matriz cuadrada de orden $(MN + n(R+1))$ y \underline{V} es el vector de incógnitas del mismo orden, siendo M, N y R respectivamente los límites prácticos de las sumatorias de subíndices i, j y p_k , es decir,

$$\underline{V}^T = [A_{11} A_{12} \dots A_{1N} A_{21} A_{22} \dots A_{2N} \dots A_{M1} A_{M2} \dots A_{MN} | \gamma_0^{(1)} \gamma_1^{(1)} \dots \gamma_{R_1}^{(1)} \gamma_0^{(2)} \gamma_1^{(2)} \dots \gamma_{R_2}^{(2)} \dots \gamma_0^{(n)} \gamma_1^{(n)} \dots \gamma_{R_n}^{(n)}] \tag{19.}$$

Presentamos a \underline{D} como:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{\Delta} & \underline{K} \\ \underline{L} & \underline{Q} \end{bmatrix} \tag{20.}$$

Para nuestro problema en particular,

$\underline{\Delta}$: es una matriz diagonal cuadrada, de elementos Δ_{IJ} . $I, J = 1, 2, \dots, (MN)$

\underline{Q} : es una matriz cuadrada nula. Q_{IJ} ; $I, J = 1, 2, \dots, \left(n + \sum_{k=1}^n R_k \right)$

\underline{K} : es una matriz rectangular. K_{IJ} $I = 1, 2, \dots, (MN)$: $J = 1, 2, \dots, \left(n + \sum_{k=1}^n R_k \right)$

$\underline{L} = \underline{K}^T$, con elementos K_{JI}

La matriz $\underline{\Delta}$ es diagonal debido a que la base que combinamos en (13) es ortogonal, o sea:

$$\Delta_{IJ} = \begin{cases} 0 & I \neq J \\ \frac{I}{4} [\pi^2(i^2 + \lambda^2 j^2) - \Omega^2] & I = J \end{cases} \tag{21.}$$

donde

$$I = N(i-1) + j \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, M \\ j = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

$$Q_{IJ} = 0 \quad \left(I, J = 1, 2, \dots, n + \sum_{k=1}^n R_k \right) \tag{22.}$$

Particionando a \underline{K}

$$\underline{K} = [\underline{K}^{(1)} | \underline{K}^{(2)} | \dots | \underline{K}^{(n)} |] \tag{23.}$$

tenemos que

$$K_{IJ}^{(k)} = \int_0^l \cos(p_k \pi s) \operatorname{sen}(i \pi x(s)) \operatorname{sen}(j \pi y(s)) ds \tag{24.}$$

con

$$k = 1, 2, \dots, n ; \quad I = N(i-1) + j \quad ; \quad J_k = I + p_k$$

Para el problema similar de vibración de placas, las matrices $\underline{\underline{K}}$ y $\underline{\underline{Q}}$ son las mismas. En cambio, se modifica $\Delta_{II} = \frac{I}{4} \left[\pi^4 (i^2 + \lambda^2 j^2)^2 - \frac{\rho h \omega^2}{D} a^4 \Omega^2 \right]$. El resto de los elementos de la matriz, Δ_{IJ} son nulos; h es el espesor de la placa, y D es la rigidez flexional de la placa.

La ecuación característica que nos permitirá hallar las frecuencias de la membrana rectangular con apoyos parciales intermedios, proviene de anular el determinante de $\underline{\underline{D}}$, es decir

$$|\underline{\underline{D}}| = 0 \quad (25.)$$

Por un conocido resultado del álgebra matricial [1] esto equivale a:

$$|\underline{\underline{D}}| = |\underline{\underline{\Delta}}| |\underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{L}} \underline{\underline{\Delta}}^{-1} \underline{\underline{K}}| = 0 \quad (26.)$$

y en nuestro caso se reduce a

$$|\underline{\underline{\Delta}}| |\underline{\underline{K}}^T \underline{\underline{\Delta}}^{-1} \underline{\underline{K}}| = 0 \quad (27.)$$

Las frecuencias que surgen de $|\underline{\underline{\Delta}}| = 0$ por supuesto deben descartarse, puesto que corresponden a la membrana rectangular sin apoyos intermedios y que daría lugar a autovalores espurios. Deberá imponerse para nuestro caso entonces, el siguiente determinante de orden

$$\left(n + \sum_{k=1}^n R_k \right) |\underline{\underline{K}}^T \underline{\underline{\Delta}}^{-1} \underline{\underline{K}}| = 0 \quad (28.)$$

Esto es teóricamente correcto, pero por los argumentos prácticos que incluimos en los comentarios finales, hemos preferido utilizar otra ecuación característica, que dá lugar a un

determinante de orden $\left[M \cdot N + \left(n + \sum_{k=1}^n R_k \right) \right]$ que sin embargo conduce con una mayor precisión

a las frecuencias que buscamos.

En efecto, observamos que la matriz $\underline{\underline{\Delta}}$ podría ser expresada como

$$\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\Delta}}^1 - \Omega^2 \underline{\underline{\Delta}}^2 \quad (29.a)$$

es decir

$$\Delta_{IJ} = \Delta_{IJ}^1 - \Omega^2 \Delta_{IJ}^2 \quad (29.b)$$

siendo

$$\Delta_{IJ}^1 = \frac{I}{4} \left[\pi^4 (i^2 + \lambda^2 j^2) \right] \quad ; \quad \Delta_{IJ}^2 = \frac{I}{4} \delta_{IJ} \quad (30.)$$

donde δ_{IJ} son los delta de Kronecker de segundo orden.

Entonces, $\underline{\underline{D}}$ podrá escribirse como

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_1 - \Omega^2 \underline{\underline{D}}_2 \quad (31.)$$

con

$$\underline{\underline{D}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Delta}}^I & \underline{\underline{K}} \\ \underline{\underline{K}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{D}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (32.)$$

Ahora hallamos las raíces como

$$|\underline{\underline{D}}| = |\underline{\underline{D}}_1 - \Omega^2 \underline{\underline{D}}_2| = 0 \quad (33.)$$

La particular consecuencia de caracterizar bajo esta forma la solución de nuestro problema, es que de este modo no se presentan frecuencias espurias. La ecuación característica aquí propuesta garantiza por sí misma, que las frecuencias halladas sean únicamente las correspondientes al sistema motivo de estudio.

Finalizando este ítem, indicamos un resultado matricial que puede resultar de interés por su utilidad. Para el caso en que la matriz $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{0}}$, como es el caso que aquí presentamos, debe verificarse que $MN > \left(n + \sum_{k=1}^n R_k \right)$ para que efectivamente se puedan determinar los autovalores del problema. Las otras dos posibles alternativas no proporcionan valor propio alguno. El caso en

$MN < \left(n + \sum_{k=1}^n R_k \right)$, verifica que $|\underline{\underline{D}}| = 0$. El caso particular en que $MN = \left(n + \sum_{k=1}^n R_k \right)$, atento a que $|\underline{\underline{K}}|$ y $|\underline{\underline{L}}|$ son matrices cuadradas, conduce a que $|\underline{\underline{D}}| = |\underline{\underline{K}}| |\underline{\underline{L}}|$.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS.

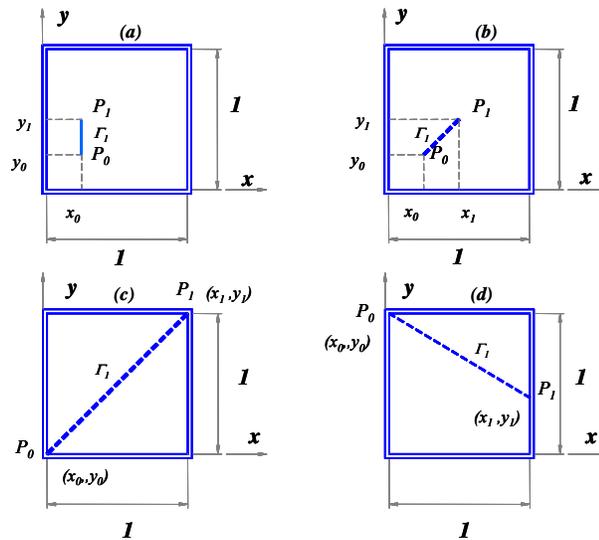


Figura 3. Membranas cuadradas con apoyos parciales internos

- (a) $M/R = 4$; $P_0 = (0.25, 0.25)$; $P_1 = (0.25, 0.50)$; (b) $M/R = 4$; $P_0 = (0.25, 0.25)$; $P_1 = (0.50, 0.50)$; (c) $M/R = 1$; $P_0 = (0; 0)$; $P_1 = (1; 1)$; (d) $M/R = 1$; $P_0 = (0, 1.00)$; $P_1 = (1, 0.40)$.

A fin de ilustrar la precisión y utilidad de nuestra propuesta, presentamos una serie de ejemplos, en los cuales determinamos las frecuencias naturales correspondientes a membranas rectangulares, con apoyos parciales intermedios de geometría arbitraria.

La Tabla 1 muestra las primeras frecuencias naturales de oscilación, correspondientes a membranas cuadradas, simplemente apoyadas en sus cuatro bordes, para apoyos lineales parciales intermedios. Los resultados derivados de nuestro algoritmo son contrastados únicamente con los resultados obtenidos con MEF

La figura 3 muestra los diferentes modelos analizados. Los resultados numéricos correspondientes una membrana cuadrada simplemente apoyada con apoyos parciales intermedios curvos son mostrados en la Tabla 2. En este caso, el apoyo interno es un arco de circunferencia de radio $r = 0.25$ y centro coincidente con el baricentro de la membrana. La Figura 4 muestra los esquemas de los diferentes modelos analizados.

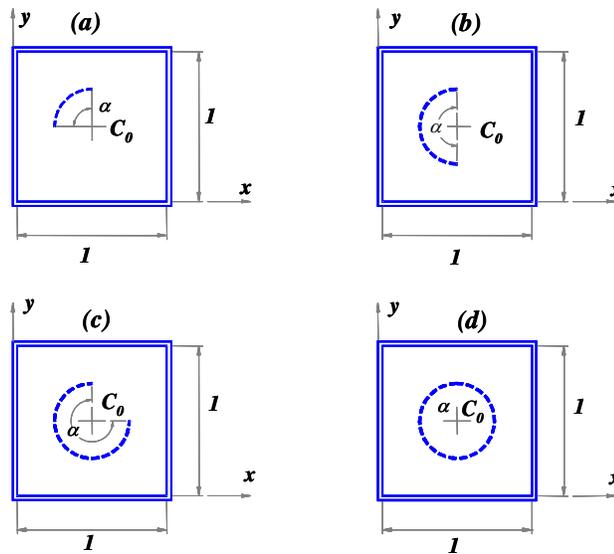


Figura 4. Membranas cuadradas con apoyos parciales internos en arco
 Centro $C_0 = (0.5, 0.5)$; $r = 0.25$. . (a) $M/R \approx 2.70$; $\alpha = \pi/2$ (b) $M/R \approx 2$; $\alpha = \pi$;
 (c) $M/R \approx 1.55$; $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ (d) $M/R \approx 1$; $\alpha = 2\pi$.

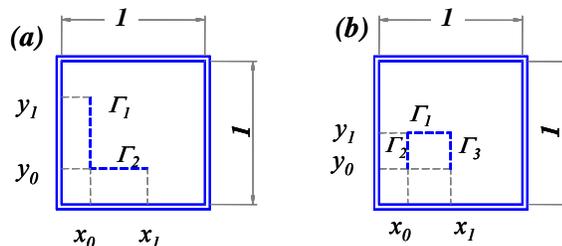


Figura 5. Membranas rectangulares con apoyos lineales intermedios múltiples
 (a) $M/R \approx 2$; $x_0 = 0.20$; $x_1 = 0.60$; $y_0 = 0.25$; $y_1 = 0.75$;
 (b) $M/R \approx 2$; $x_0 = 0.20$; $x_1 = 0.50$, $y_0 = 0.25$; $y_1 = 0.50$

Finalmente, la Tabla 3 muestra los resultados correspondientes a membranas rectangulares, con apoyos múltiples intermedios. La disposición de los apoyos se muestra en la Figura 5. Los

parámetros de frecuencia son comparados nuevamente con los obtenidos con MEF, puesto que de acuerdo al saber de los autores, no existen valores obtenidos con otras metodologías.

Es importante enfatizar aquí que la exactitud de los resultados depende del número de términos que se determinen para la serie que intenta capturar la forma modal, desde el momento que nuestra propuesta siempre tiende a la solución exacta. Desde esta perspectiva, ello implica que los autovalores se hallan con una precisión arbitraria que satisface el problema particular de estudio.

TABLA 1
Frecuencias Naturales de una membrana cuadrada con apoyos parciales intermedios
Comparación de valores entre el método propuesto MEC y MEF

Frecuencias Naturales	Modelo (a)		Modelo (b)		Modelo (c)		Modelo (d)	
	MEC	MEF	MEC	MEF	MEC	MEF	MEC	MEF
Ω_1	5.0214	4,9908	5.8759	5,7981	7.0248	7,0348	5.6620	5,6537
Ω_2	7.1705	7,1471	7.0248	7,0297	7.0726	7,0348	7.9649	7,9563
Ω_3	8.1551	8,0953	8.1539	8,1371	9.9346	9,9488	9.3642	9,3598
Ω_4	9.5294	9,5009	9.9346	9,9409	10.0021	9,9488	9.4096	9,3700
Ω_5	10.1806	10,1474	10.4010	10,3007	11.3271	11,3437	10.4984	10,4893
Ω_6	10.8500	10,7844	11.1707	11,0687	11.4042	11,3437	11.6721	11,6565
Ω_7	12.0736	11,9415	11.3271	11,3350	12.9530	12,9721	12.8780	12,8227
Ω_8	12.2980	12,1412	12.2411	12,0656	13.0409	12,9721	12.8879	12,8496
Ω_9	12.9530	12,9562	12.9530	12,9616	14.0496	14,0707	13.2018	13,1855
Ω_{10}	13.2292	13,2088	13.4977	13,4621	14.1451	14,0707	14.1460	14,1316

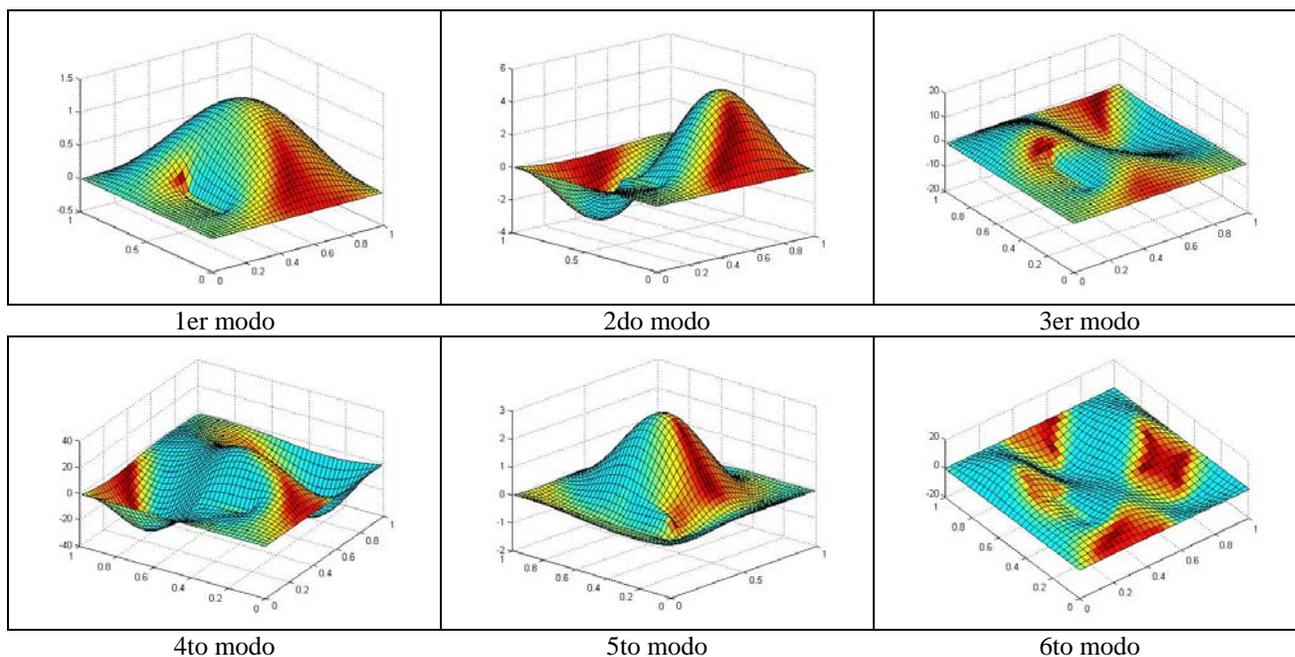


Figura.6 . Primeras seis formas modales de la membrana cuadrada Modelo (a) Tabla 1 según método propuesto

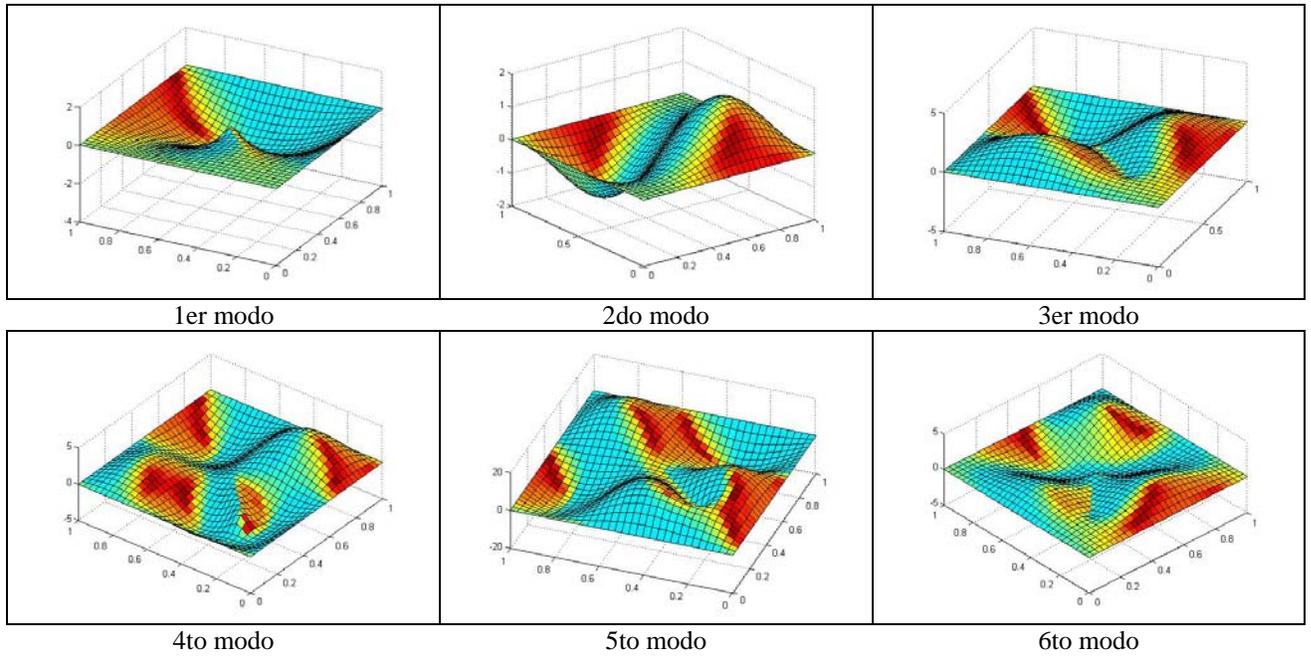


Figura 7 . Primeras seis formas modales de la membrana cuadrada Modelo (b) Tabla 1 según método propuesto

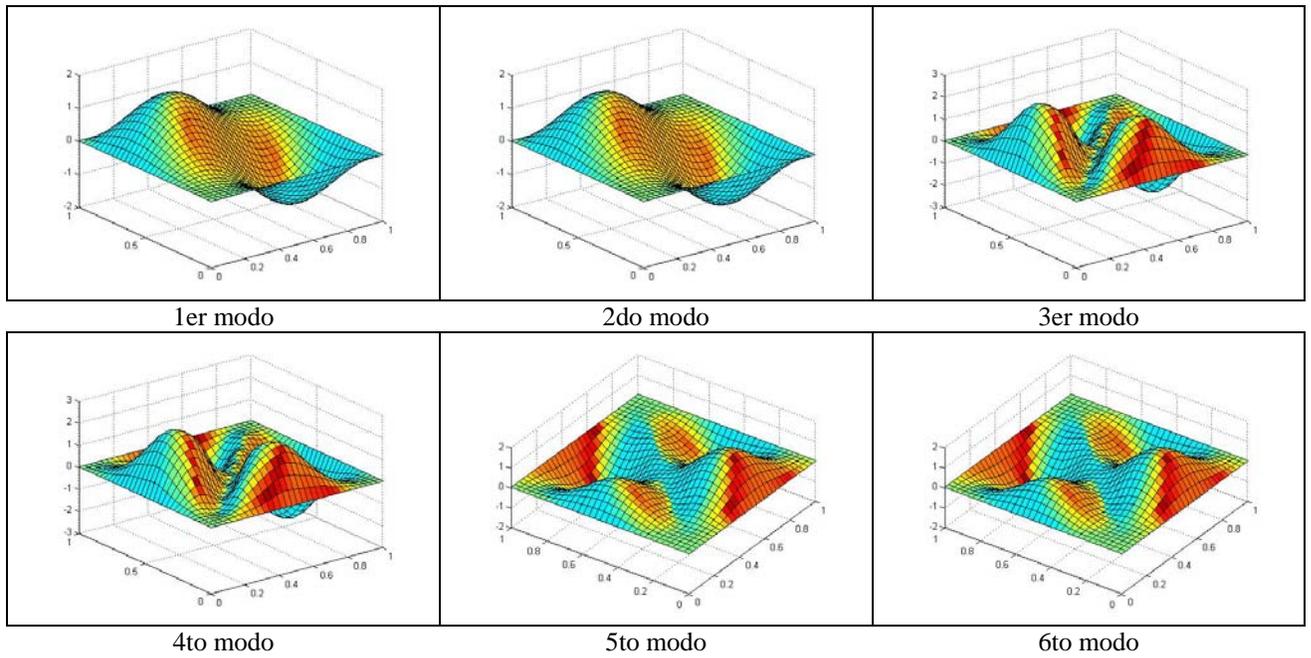


Figura.8. Primeras seis formas modales de la membrana cuadrada Modelo (c) Tabla 1 según método propuesto

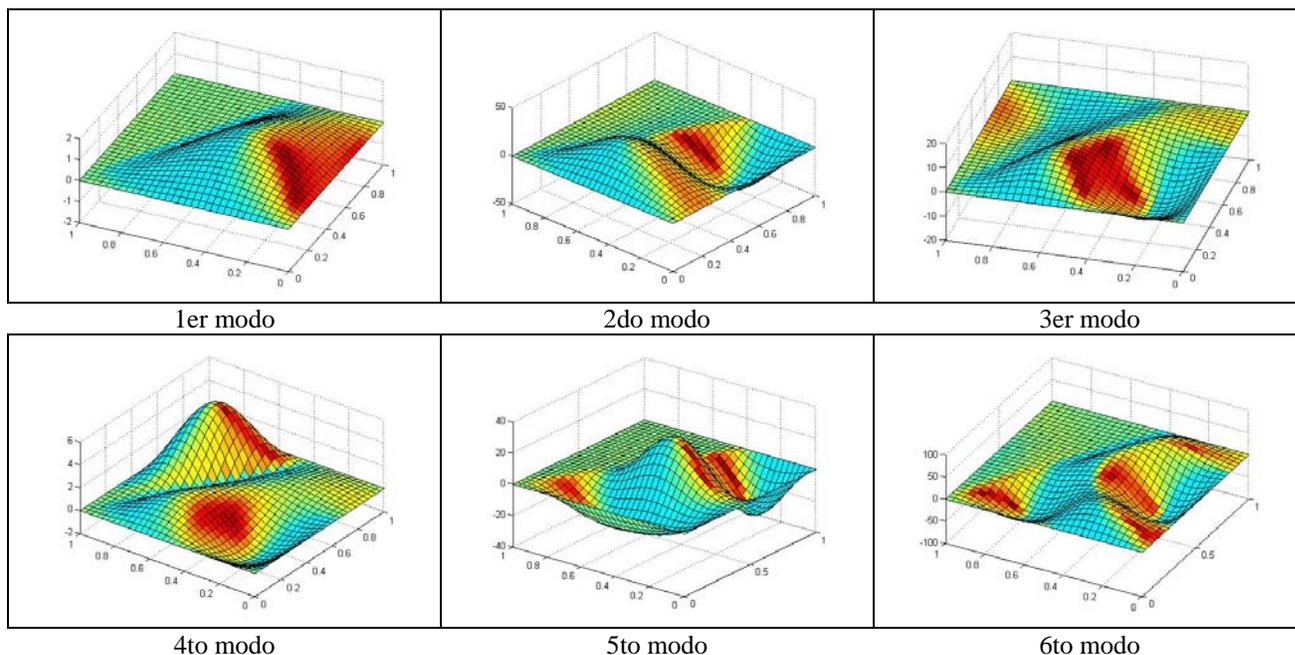


Fig.9. Primeras seis formas modales de la membrana cuadrada Modelo (d) Tabla 1 según método propuesto

TABLA 2
Frecuencias Naturales de una membrana cuadrada con apoyos parciales intermedios circunferenciales
Comparación de valores entre el método propuesto MEC y MEF

Frecuencias Naturales	Modelo (a)		Modelo (b)		Modelo (c)		Modelo (b)	
	MEC	MEF	MEC	MEF	MEC	MEF	MEC	MEF
Ω_1	5.3597	5,3151	6.1015	6,0211	7.7940	7,5381	9,6792	9,6196
Ω_2	7.5042	7,4452	8.5102	8,4139	9.8500	9,8306	10,2270	10,1759
Ω_3	8.5622	8,4953	9.8789	9,8670	10.3452	10,2561	10,6260	10,3605
Ω_4	9.9199	9,9206	10.3182	10,2443	10.4168	10,3417	12,8438	10,3605
Ω_5	10.4364	10,3785	10.5269	10,4902	10.6040	10,5524	14,6239	10,5985
Ω_6	10.6524	10,6049	11.1342	11,0464	12.3491	12,0860	14,8796	12,7777
Ω_7	11.8273	11,7433	12.7889	12,5875	13.2337	13,1357	17,0524	13,4014
Ω_8	12.5478	12,3974	13.0376	12,9461	13.3663	13,1648	18,3422	13,4014
Ω_9	13.0984	13,0884	13.3005	13,2943	13.5266	13,5031	18,5806	14,5733
Ω_{10}	13.3204	13,3152	13.5262	13,5017	14.6563	14,5605	20,1128	14,8531

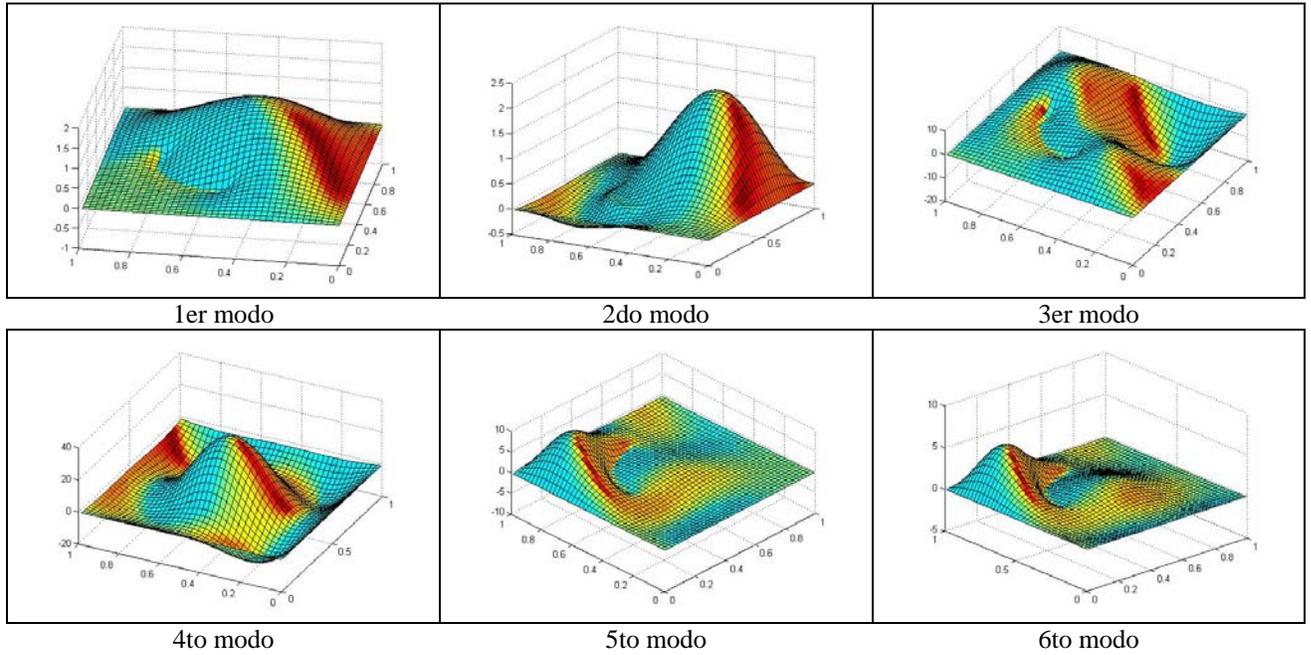


Fig.10. Primeras seis formas modales de la membrana cuadrada Modelo (a) Tabla 2 según método propuesto

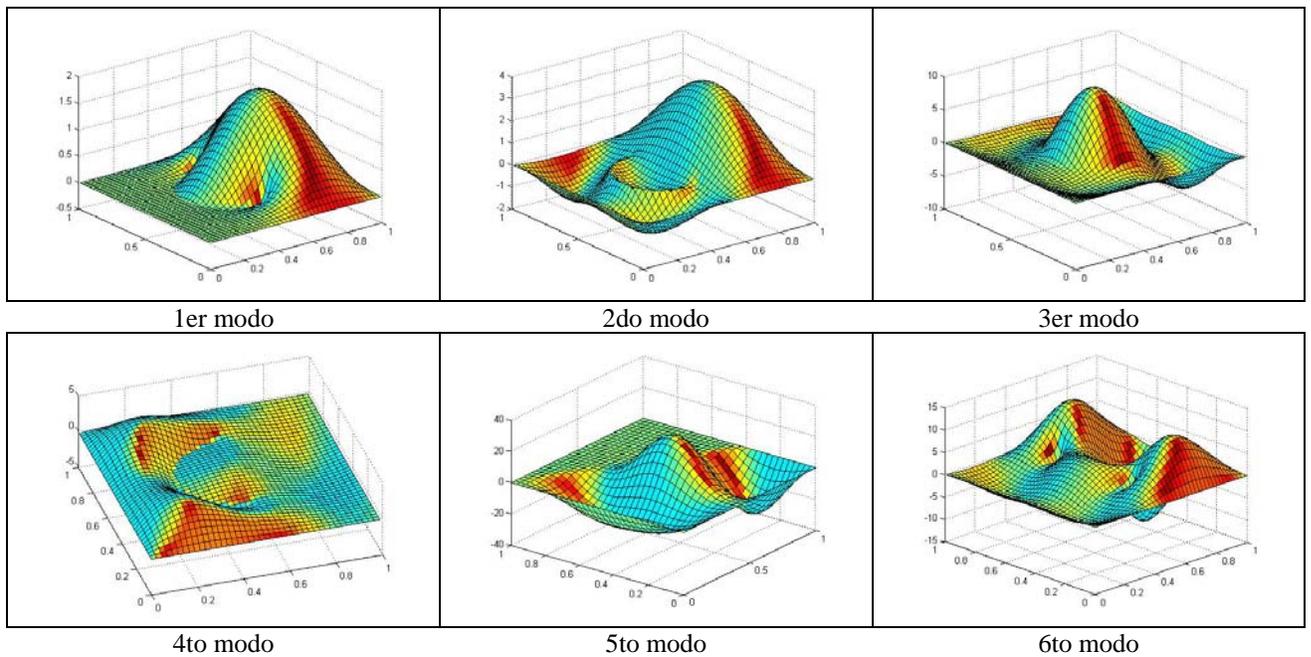


Fig.11. Primeras seis formas modales de la membrana cuadrada Modelo (b) Tabla 2 según método propuesto

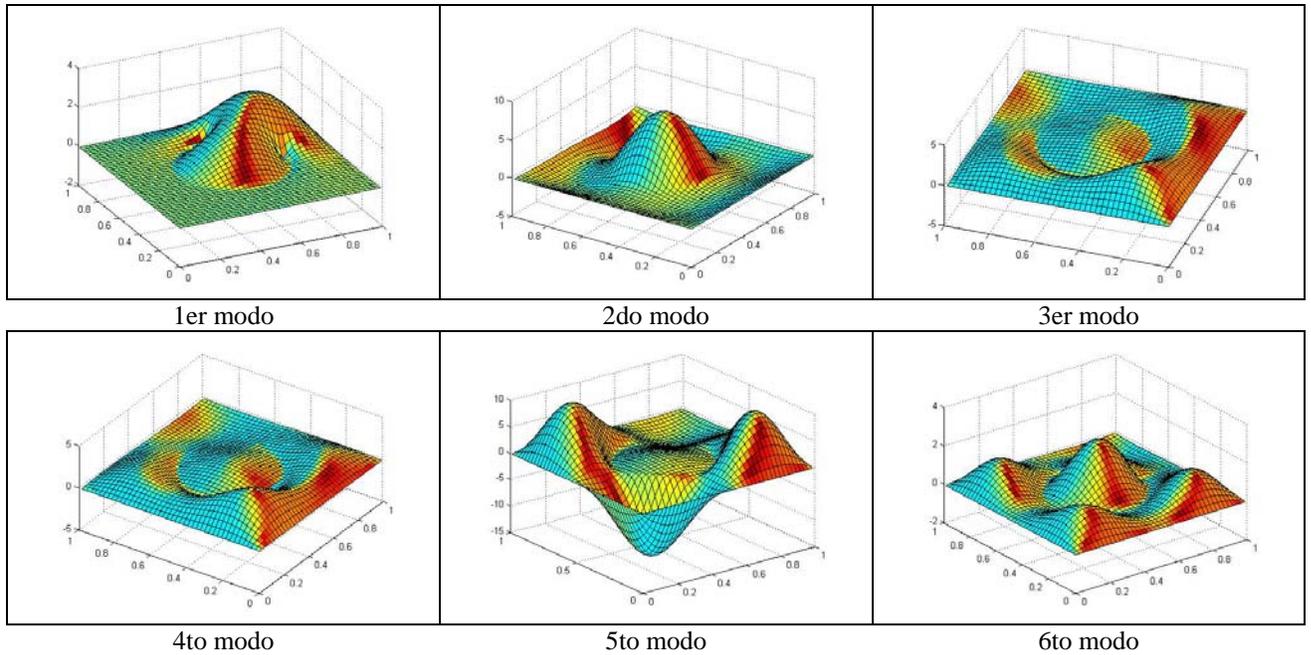


Fig.12. Primeras seis formas modales de la membrana cuadrada Modelo (c) Tabla 2 según método propuesto.

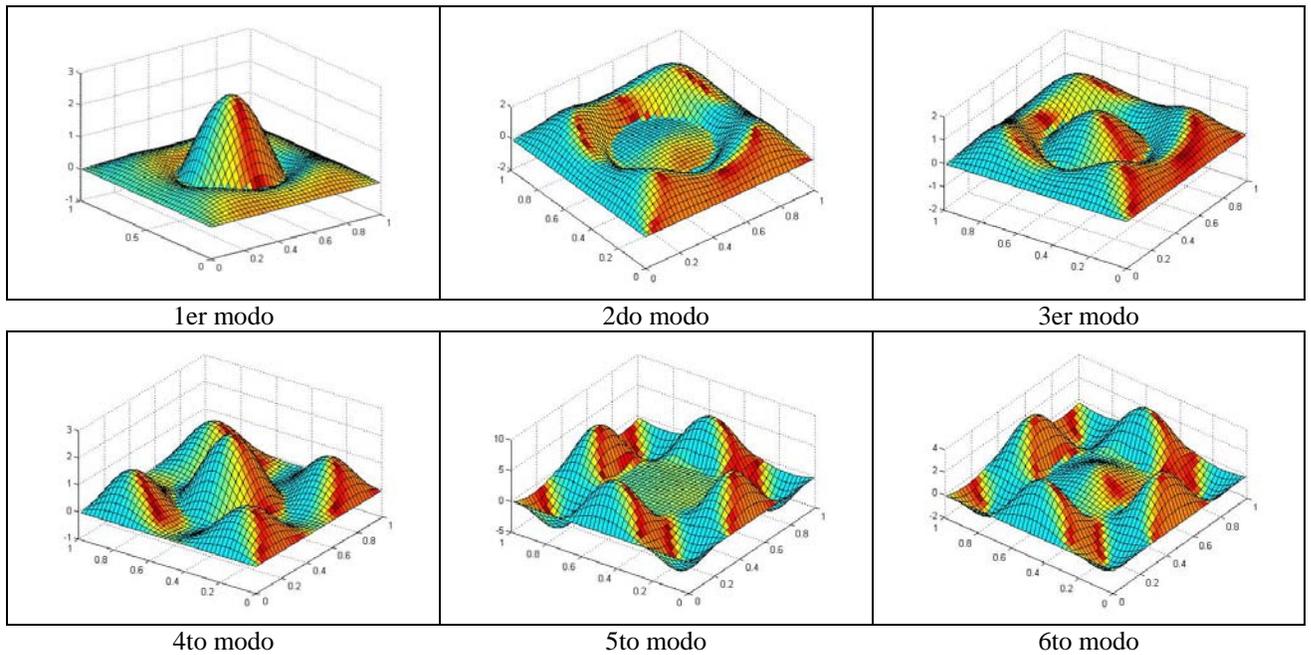


Fig.13. Primeras seis formas modales de la membrana cuadrada Modelo (d) Tabla 2 según método propuesto

TABLA 3
 Frecuencias Naturales de una membrana rectangular con apoyos parciales múltiples intermedios
 Comparación de valores entre el método propuesto MEC y MEF

Frecuencias Naturales	Modelo (a)		Modelo (b)	
	MEC	MEF	MEC	MEF
Ω_1	6.2865	6,24285	6.9109	6,87680
Ω_2	8.9571	8,90848	8.8684	8,83505
Ω_3	10.2428	10,16590	9.9681	9,93611
Ω_4	11.8417	11,80649	11.6648	11,58715
Ω_5	12.8104	12,75635	12.0644	11,84571
Ω_6	13.5769	13,53110	13.1561	13,12386
Ω_7	14.7017	14,54286	13.4755	13,42944
Ω_8	15.5032	15,18556	14.5274	14,45813
Ω_9	15.7028	15,58244	15.5919	15,44146
Ω_{10}	16.2448	16,22871	16.0256	15,92882

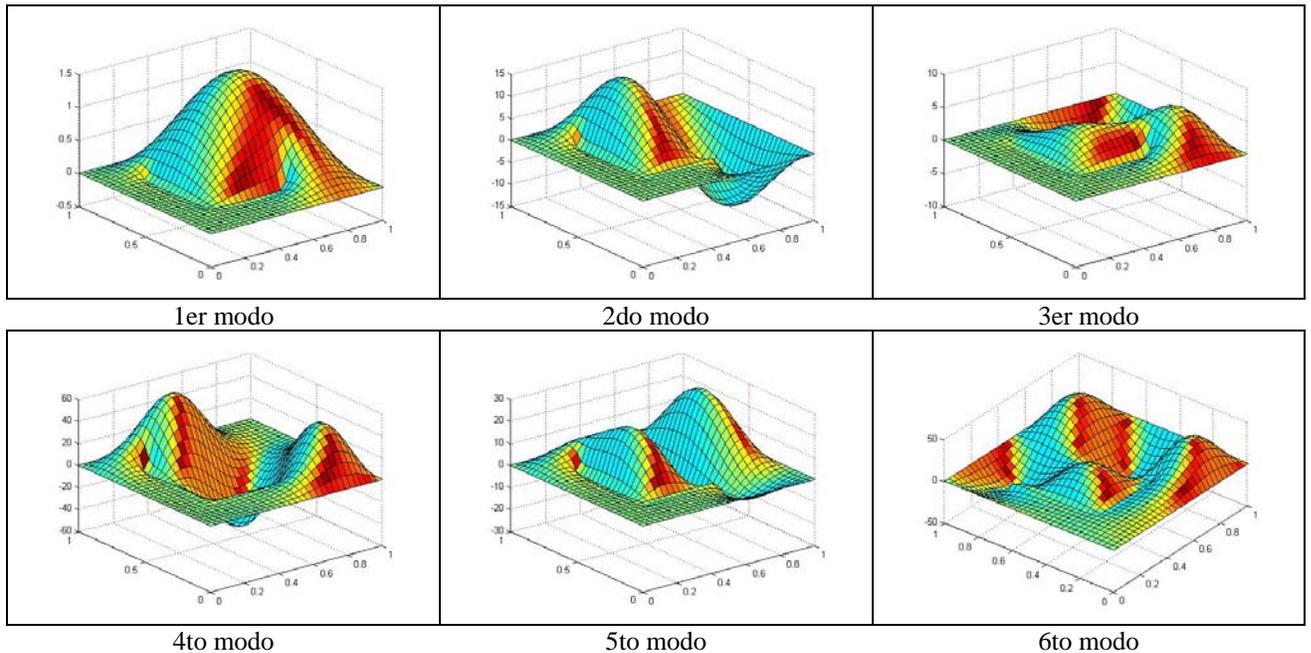


Fig.14. Primeras seis formas modales de la membrana rectangular Modelo (a) Tabla 3 según método propuesto

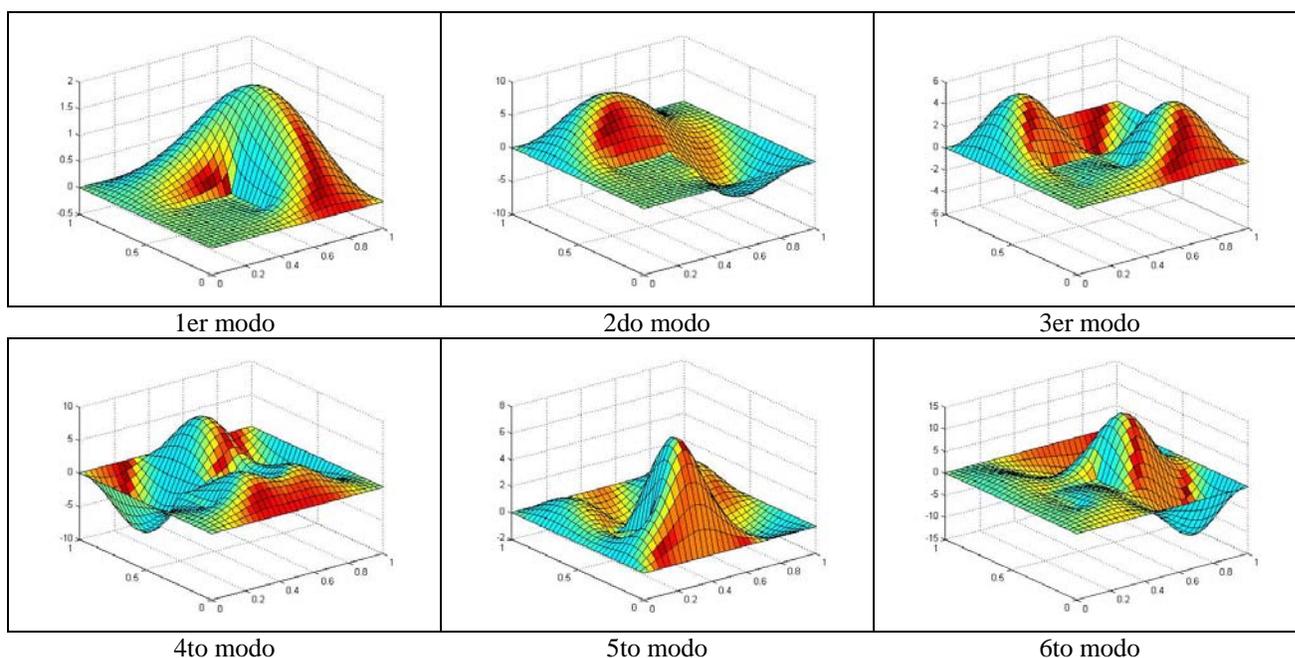


Fig.15 . Primeras seis formas modales de la membrana rectangular Modelo (b) Tabla 3 según método propuesto

5. CONCLUSIONES FINALES Y OBSERVACIONES

La herramienta que hemos presentado es un aporte más al estudio de la ecuación de Helmholtz en dominios rectangulares con ciertas complejidades. Más aún, cuando algunos códigos de elementos finitos no incluyen en forma directa las frecuencias naturales para este tipo de problemas, que en el presente trabajo hemos aplicado a las vibraciones naturales y sus formas modales de membranas homogéneas tensionadas uniformemente. También se han incluido dos teoremas. Uno de ellos mencionado en la sección 2, donde se muestra cómo pueden separarse fehacientemente las frecuencias espurias de un problema complejo, que efectivamente surgen cuando planteamos la ecuación característica correcta.

Resulta conveniente indicar brevemente las observaciones que resultaron del estudio de la convergencia del algoritmo. Efectivamente, a fin de obtener los autovalores, resulta natural la adopción de dos de los tres parámetros geométricos que definen el problema, y en función de ellos, determinar el tercero. En efecto, el estudio parte de proponer la cantidad de seminondas M y N con que se cubre el dominio rectangular de la membrana, proponiéndose luego, la cantidad de términos R considerados a fin de satisfacer la condición de TV nulo sobre cada apoyo. Sin perder generalidad, y a los fines prácticos de una mayor simplicidad, hemos impuesto que M sea igual a N , y en el caso en que hubiera más de un apoyo lineal parcial que restrinja a la membrana, consideramos el mismo R para satisfacer la condición de TV nulo en cada apoyo.

Pareciera lógico suponer a priori, que a fin de lograr una mejor adaptación de la forma modal a la geometría de la membrana restringida internamente, debiera proponerse una cantidad

grande de semiondas M . Incluso, en trabajos anteriores realizados por este grupo de investigación, esa ha sido la consigna, derivándose de ello una apreciable exigencia del tiempo computacional.

Sin embargo, de las pruebas realizadas en ocasión de calibrar el algoritmo, surge que para obtener un autovalor suficientemente preciso, existe una relación M/R , propia de cada geometría analizada, que arroja resultados que se pueden considerar de precisión aceptable, aún para valores pequeños en la cantidad de semiondas M y R , que no superaban los dos dígitos.

Esta evidencia se puso de manifiesto, en oportunidad de reproducir con nuestro algoritmo las frecuencias de placas delgadas, con y sin apoyos parciales intermedios [4]. Con valores muy bajos de M y R , pero que guardaban una cierta relación entre si, se lograban resultados aceptables desde el punto de vista ingenieril. Para una relación M/R aproximadamente constante, es posible obtener los autovalores con una precisión adecuada, aún cuando la cantidad de semiondas sea pequeña. Lógicamente, la precisión mejora también, como era de esperar, cuando aumentan los valores asignados a los parámetros M y R , estimándose que la incidencia de la relación M/R tiende a disminuir cuando M y R toman valores muy grandes.

Lo expresado indica que debe profundizarse el estudio numérico que se utiliza para mejorar la convergencia, y se trata de una tarea futura que prevén los autores.

Otro resultado es el mostrado en el Apéndice, donde demostramos que la analogía entre placas poligonales apoyadas y membranas deja de verificarse, cuando los dominios, aun poligonales, tienen apoyos parciales internos.

Las diferencias numéricas de los valores de frecuencias y formas modales entre aquellos hallados con la imposición de trabajo virtual nulo sobre las líneas de apoyos y los que surgen de imponer desplazamiento nulo en varios puntos de dichos apoyos (colocación) son irrelevantes.

APENDICE

PÉRDIDA DE LA ANALOGÍA ENTRE MEMBRANAS Y PLACAS SIMPLEMENTE APOYADAS EN DOMINIOS CON APOYOS PARCIALES INTERMEDIOS.

Presentamos una sencilla demostración de lo expuesto en el título. La ecuación para vibraciones libres de placas planas delgadas (Germain-Lagrange)

$$\nabla^2 \nabla^2 v - \lambda^2 v = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\cdot) &= (\cdot)_{xx} + (\cdot)_{yy} \\ (\cdot)_x &= \frac{\partial (\cdot)}{\partial x} ; \quad (\cdot)_y = \frac{\partial (\cdot)}{\partial y} \\ \lambda^2 &= \frac{\rho h}{D} \omega^2 ; \quad v = v(x, y) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

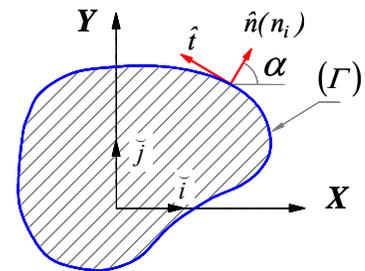


Fig. a

h es el espesor; D la rigidez flexional.

Si la placa es simplemente apoyada (SA) sobre el contorno (Γ), se verifica que:

$$v_{(\Gamma)}^{(a)} = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$M_{n(\Gamma)}^{(b)} = 0 \quad (\text{A.3b})$$

donde por M_n indicamos el momento flector en el plano (Z_n), siendo M_x , M_y y M_{xy} los momentos flectores según los ejes coordenados y el momento torsor respectivo, que por el carácter tensorial de las tensiones verifican que

$$M_n = M_x n_1^2 + 2 M_{xy} n_1 n_2 + M_y n_2^2 \quad (\text{A.4})$$

donde n_i ($i = 1,2$) son los cosenos directores.

De la teoría de placas recordamos que

$$\begin{aligned} M_x &= -D (v_{xx} + \nu v_{yy}) \\ M_y &= -D (v_{yy} + \nu v_{xx}) \\ M_{xy} &= -D (1 - \nu) v_{xy} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

en donde ν es el coeficiente de Poisson.

Las derivadas direccionales según las direcciones ortogonales \hat{s} y \hat{n} valen

$$(\cdot)_s \equiv (\cdot)_t = \text{grad}(\cdot) \hat{t} \quad (\text{A.6a})$$

$$(\cdot)_n = \text{grad}(\cdot) \hat{n} \quad (\text{A.6b})$$

siendo

$$\text{grad}(\cdot) = (\cdot)_x \hat{i} + (\cdot)_y \hat{j} \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{t} = -n_2 \hat{i} + n_1 \hat{j} \quad (\text{A.8a})$$

$$\hat{n} = n_1 \hat{i} + n_2 \hat{j} \quad (\text{A.8b})$$

Calculamos las derivadas direccionales segundas; hallamos con $\alpha = \alpha(s)$, que:

$$(\cdot)_{ss} = (\cdot)_{xx} n_2^2 - 2 (\cdot)_{xy} n_1 n_2 + (\cdot)_{yy} n_1^2 - \alpha_s (\cdot)_n \quad (\text{A.9a})$$

$$(\cdot)_{nn} = (\cdot)_{xx} n_1^2 - 2 (\cdot)_{xy} n_1 n_2 + (\cdot)_{yy} n_2^2 \quad (\text{A.9b})$$

Observamos que de (A.4), (A.5) y (A.9) que

$$M_n = -D [v_{nn} + \nu (v_{ss} + \alpha_s v_n)] \quad (\text{A.10})$$

Vamos a necesitar también la expresión del laplaciano en las coordenadas n y s ; despejamos de la suma de (A.9a) + (A.9b) y hallamos

$$\nabla^2(\cdot) = (\cdot)_{xx} + (\cdot)_{yy} = (\cdot)_{ss} + \alpha_s (\cdot)_n + (\cdot)_{nn} \quad (\text{A.11})$$

Ahora bien, pasando al contorno donde \hat{t} y \hat{n} son los versores tangente y normal respectivamente, de la condición (A.3a)

$$v_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow v_{s(\Gamma)} = v_{ss(\Gamma)} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto, la condición (A.3b) se escribe teniendo en cuenta (A.12) como:

$$M_{n(\Gamma)} = 0 \Rightarrow (v_{nn} + \nu \alpha_s v_n)_{(\Gamma)} = 0 \quad (\text{A.13})$$

puesto que $-D \neq 0$.

También, de (A.11), (A.12)

$$\left(\nabla^2 v\right)_{(\Gamma)} = \left(v_{nn} + \alpha_s v_n\right)_{(\Gamma)} = \left(\frac{v-I}{\nu}\right) \left(v_{nn}\right)_{(\Gamma)} \quad (\text{A.14})$$

Ahora recordemos la ecuación de Helmholtz para la membrana vibrante.

$$\nabla^2 w + \Omega^2 w = 0 \quad (\text{A.15})$$

sumada a la condición de borde

$$w_{(\Gamma)} = 0 \quad (\text{A.16})$$

Buscando una analogía entre ambos problemas, reescribimos (A.1) sumando y restando $(\lambda^2 \nabla^2 v)$, o sea;

$$\nabla^2 \nabla^2 v - \lambda^2 v + (\lambda^2 \nabla^2 v - \lambda^2 \nabla^2 v) = 0 \quad (\text{A.17})$$

o bien,

$$\nabla^2 (\nabla^2 v - \lambda v) + \lambda (\nabla^2 v - \lambda v) = 0 \quad (\text{A.18})$$

si denominamos como

$$w^* \equiv \nabla^2 v - \lambda v \quad (\text{A.19})$$

la ecuación (A.19) de placas vibrantes puede escribirse como

$$\nabla^2 w^* + \lambda w^* = 0 \quad (\text{A.20})$$

comparando (A.15) con (A.20), vemos que ambas ecuaciones serán iguales si $\lambda = \Omega^2$ siempre que

$$w_{(\Gamma)}^* \equiv (\nabla^2 v - \lambda v)_{(\Gamma)} = 0 \quad (\text{A.21})$$

Analicemos entonces bajo qué condiciones se verificarán (A.21)

Por (A.3) $v_{(\Gamma)} = 0$; nos resta observar cuándo $(\nabla^2 v)_{(\Gamma)} = 0$. Deducimos de (A.14) que deberá verificarse con $\left(\frac{v-I}{\nu}\right) \neq 0$

$$\left(v_{nn}\right)_{(\Gamma)} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Entonces, si aceptamos que se cumple (A.22), la condición (A.3b) de bordes de placa S.A., por (A.14) implica que deberá ser

$$\left(\alpha_s v_n\right)_{(\Gamma)} = 0 \quad (\text{A.23})$$

La derivada normal de una placa S.A. no es nula en general; por lo tanto para que se cumpla la analogía,

$$\left(\alpha_s\right)_{(\Gamma)} = 0 \quad (\text{A.24})$$

Es decir – y éste es un resultado conocido desde el siglo pasado – basta con que la forma de la placa (igual a la de la membrana) sea poligonal, o sea, un dominio formado por tramos rectos

S.A., con lo cual en cada tramo se verifica evidentemente la (A.24). De esta manera las C.B. de la placa poligonal S.A. se reducen a:

$$\begin{aligned} (v)_{(\Gamma)} &= 0 \\ (v_{nn})_{(\Gamma)} &= 0 \end{aligned} \tag{A.25}$$

y de este modo se verifica $(\nabla^2 v)_{(\Gamma)} = 0$, y con esto la (A.21).

Entonces, resolviendo las frecuencias λ de estas placas, hallamos también que:

$$\Omega = \sqrt{\lambda} \tag{A.26}$$

que son los parámetros de frecuencias de las membranas de igual forma.

Cuando tengamos una membrana con apoyos parciales intermedios (Fig. b), las condiciones que deben verificar w además de las (A.16) exclusivamente son:

$$(w)_{(\Gamma_k)} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{A.27}$$

donde n es el número de apoyos internos.

Ahora bien, en general una placa con igual forma y los mismos apoyos, no verificará la (A.21), aún si los apoyos internos son poligonales, porque la condición de $(M_n)_{(\Gamma_k)} = 0$ no se verificará. Es decir, aún aceptando $(\alpha_s)_{(\Gamma_k)} = 0$ (apoyos internos rectos), $(v_{nn})_{(\Gamma_k)} \neq 0$.

Esto demuestra que se pierde la divulgada y útil analogía.

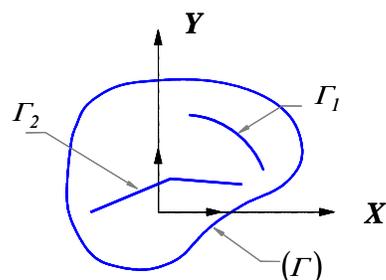


Fig. b

Referencias

- [1] R. Bellman, Introduction to matrix analysis, Mc GrawHill, N.Y, 1960.
- [2] R.D. Blevins,; Formulas for natural frequencies and modal shapes; Van Nostrand, Reinhold Company N.Y. (1979).
- [3] V. H. Cortinez, and P. A. A. Laura, , 1992 *Journal of Sound and Vibration* 156,217-225. Vibrations of non-homogeneous rectangular membranes.
- [4] M. R. Escalante, M.B. Rosales, and C.P. Filipich, Natural frecuencias of thin rectangular plates with partial intermediate supports. *Latin American Applied Research*, 34, 217-224. (2004).
- [5] C.P. Filipich and M.B. Rosales, A variational solution for an initial conditions problem. *Applied Mechanics Review* 50, S50-SS5 (1997).
- [6] C.P. Filipich and M.B. Rosales, Arbitrary precision frequencies of a free rectangular thin plate. *Journal of Sound and Vibration* 230, 521-539, (1999)
- [7] C.P. Filipich, M.B. Rosales and P. M. Bellés, Natural vibration of rectangular plates considered as tridimensional solids, *Journal of Sound and Vibration* 212, 599-610 (1998)
- [8] S. W. Kang, J. M. Lee, Y.J. and Kang,; Vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using non-dimensional dynamic influence function. *Journal of Sound of Vibratons*, 221 (1), 117-132 (1999).
- [9] S. W. Kang, J. M. Lee, Eigenmode analysis of arbitrarily shaped two-dimensional cavities by the method of point-matching, *Journal of the Accoustical Society of America*; 107, 1153-1160 (2000).

- [10] S. W. Kang, J. M. Lee, Free vibration analysis of composite rectangular membranes with oblique interface, *Journal of Sound of Vibrations*, 251 (3), 505-517 (2002).
- [11] S. W. Kang, J. M. Lee, Free vibration analysis of an unsymmetric trapezoidal membrane, *Journal of Sound of Vibrations*, 272, 450-460 (2004).
- [12] P. A. A. Laura, R. E. Rossi, and R. H. Gutierrez; 1997 *Journal of Sound and Vibration* 204, 373-376. The fundamental frequency of non-homogeneous rectangular membranes.
- [13] C. Y. Wang, ; Some exact solutions of the vibration of non-homogeneous membranes; *Journal of Sound and Vibration* 210, 555-558 (1998).