ESTUDIO DE LA FRACTURA DEL HORMIGÓN MEDIANTE UN MODELO NUMÉRICO MICROMECÁNICO CON ELEMENTOS JUNTA

Carlos M. López, Ignacio Carol, Antonio Aguado

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Barcelona. Universidad Politécnica de Cataluña. c/. Gran Capitán s/n. 08034 Barcelona, España.

RESUMEN

El modelo microestructural consiste, básicamente, en representar una probeta de hormigón en dos dimensiones en la cual un arreglo de piezas irregulares correspondientes a los áridos de mayor tamaño se encuentran rodeadas por una matriz de mortero. Ambas fases se discretizan mediante elementos finitos triangulares a los cuales se les asigna un comportamiento constitutivo de tipo elástico lineal. La malla de EF incluye elementos junta sin espesor a fin de posibilitar la no linealidad de comportamiento, mecanismos de rotura y fisuración, etc. Estos elementos se distribuyen a lo largo de todos los contactos entre elementos árido-mortero (interfase), y entre algunos contactos mortero-mortero. Para el comportamiento de las juntas se utiliza una ley constitutiva no lineal con reblandecimiento por trabajo de fractura, formulada en términos de las tensiones en su plano medio y los desplazamientos relativos entre ambos lados de la junta. En este trabajo se presentan algunos resultados numéricos obtenidos en mallas sometidas a distintos estados de carga, tales como tracción pura, compresión pura y ensayo brasileño. La modelización permite reproducir con buena aproximación el comportamiento observado en los ensayos experimentales. También permite poner de relieve y analizar una gran variedad de aspectos internos del material que, en muchos casos, resultan determinantes del comportamiento macroscópico.

ABSTRACT

Basically, the microstructural model consists in a two-dimmensional representation of concrete specimens, in which an array of irregular pieces corresponding to the larger aggregates are surrounded by a mortar matrix. Both phases are discretized by triangular finite elements for which a lineal elastic constitutive behavior is assumed. The FE mesh also includes zero-thickness interface elements which provide non-linear behavior, cracking mechanisms, etc. These elements are distributed along all contacts between aggregate-mortar elements, and some mortar-mortar inter-elements boundaries. The interace behavior is represented with a non-linear constitutive law with the structure of work-softening elasto plasticity, which is formulated in terms of the normal and shear components of stresses and corresponding relative displacements across the interface. In this paper some numerical results obtained in meshes under various loading cases, such as pure tension and compression, and Brazilian test are presented. The main results obtained show very good qualitative agreement with the behavior observed in experimental tests. The model also allows to observe and understand a great variety of internal material aspects that in many cases are essential to explain the macroscopic behavior.

INTRODUCCIÓN

La fractura de materiales compuestos como el hormigón presenta algunos aspectos complejos en los que incide de manera determinante la estructura interna del material. Por ello, una manera adecuada de profundizar el estudio consiste en representar la estructura material a un nivel más básico, en el cual heterogeneidades y zonas localizadas de debilidad son consideradas explícitamente a nivel de componentes con sus características mecánicas específicas. En la bibliografía reciente pueden encontrarse algunos antecedentes de este tipo de análisis, empleando el Método de Elementos Finitos (MEF)¹⁻³.

En este trabajo, una probeta de hormigón se representa mediante piezas irregulares correspondientes a los áridos de mayor tamaño rodeadas por una matriz de mortero. Ambas fases se discretizan mediante elementos finitos triangulares a los cuales se les asigna un comportamiento constitutivo de tipo elástico lineal. A fin de posibilitar la no linealidad de comportamiento, mecanismos de rotura y fisuración, etc., la malla de EF incluye elementos junta sin espesor tal como fue sugerido en⁴. Estos elementos, con dos pares de nodos cada uno, se distribuyen a lo largo de todos los contactos entre elementos árido-mortero (interfase) y entre algunos de los contactos de elementos de mortero, de manera de representar diferentes direcciones potenciales sin determinar a priori la trayectoria de fisuración. Para modelizar el comportamiento no lineal de los elementos junta se ha utilizado la ley constitutiva que se describe brevemente en el siguiente apartado.

Se ha adoptado una topología inicial de áridos obtenida según el procedimiento propuesto en para dos tipos de distribuciones, de 16 y 36 piezas de árido dispuestas aproximadamente en arreglos de 4x4 y 6x6, respectivamente. La discretización de los elementos finitos de mortero, sin embargo, se ha planteado de una manera diferente, siguiendo la propuesta de Vonk², a fin de permitir una disposición menos intrincada de las juntas en el interior de la matriz de mortero.

En la figura 1 se presenta un ejemplo de discretización para el arreglo de 36 áridos. Las figuras 1a y 1b muestran de manera diferenciada, la discretización correspondiente a la matriz de mortero y a los áridos, respectivamente. La figura 1c presenta la disposición de las juntas, mientras que en la figura 1d puede apreciarse de manera esquemática la disposición de nodos y elementos en una zona de la malla.

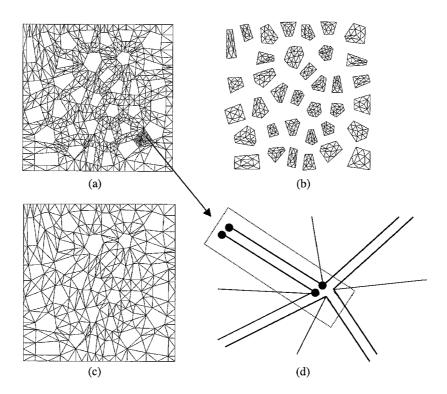


Figura 1: *Malla de EF para el arreglo de áridos de 6x6: a) elementos de mortero, b) elementos de áridos, c) disposición de las juntas, d) detalle de la discretización.*

LEY CONSTITUTIVA DE JUNTA

A partir de una ley constitutiva propuesta por Carol y Prat⁵⁻⁶ para cada plano de fisura potencial en el modelo de "multicrack" de fisuración distribuida, la formulación se ha completado con nuevas propuestas y se han introducido diversas mejoras⁷⁻⁸. El comportamiento de las juntas está formulado en términos de las componentes normal y tangencial de las tensiones en el plano de la junta, $\boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma}_N, \boldsymbol{\sigma}_T]^t y$ los desplazamientos relativos correspondientes $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_T]^t (^t = \text{transpuesta})$. El modelo, basado en la teoría de la elasto-plasticidad, incorpora los conceptos de la Mecánica de Fractura y, entonces, los desplazamientos relativos pueden ser identificados con aperturas de fisura.

Las principales características del modelo se presentan en la figura 2. La superficie de rotura F=0 se define mediante una hipérbola de tres parámetros (la resistencia a tracción χ y los parámetros c y tan ϕ de la asíntota, que representan la cohesión aparente y el ángulo de fricción interna, respectivamente). Una vez iniciada la fisuración, la superficie de rotura se contrae mediante el decrecimiento de los parámetros de la hipérbola en función de unas leyes basadas en el trabajo consumido en procesos de fractura, W^{cr} (figura 2d). La forma de evolución de la superficie de rotura depende del modo de fractura específico que se desarrolle. Para controlar este proceso, el modelo posee dos parámetros que representan la energía de fractura clásica en modo I, G_F^{II} (tracción pura) y un segundo modo denominado Modo IIa definido bajo corte y alta compresión sin dilatancia, G_F^{IIa} (figura 2c). Para tracción pura la superficie de rotura final viene dada por una hipérbola con vértice en el origen (curva "1" en la figura 2b). En el estado de situación final para el cual c=0 la superficie de fractura queda definida por un par de líneas rectas que representan la fricción pura (curva "2" en la figura 2b). El modelo es asociado en tracción F=Q, aunque no en compresión, donde se define una ley de dilatancia para que ésta disminuya progresivamente con el nivel de compresión $\sigma \rightarrow \sigma^{dil}$ (figura 2a) y con la degradación de la junta $c\rightarrow 0$. Una descripción mas detallada puede encontrarse en⁷⁻⁸.

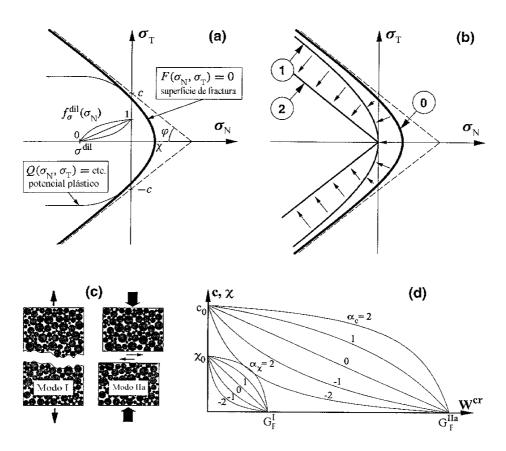


Figura 2: *Modelo de junta: (a) superficie de rotura y potencial plástico, (b) evolución de la superficie de rotura, (c) modos básicos de fractura), y (d) leyes de reblandecimiento.*

RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presenta la simulación numérica de ensayos de tracción y compresión uniaxial y de tracción indirecta o ensayo brasileño. Para llevarlos a cabo, se imponen desplazamientos uniformes de valor creciente en los nodos de la cara correspondiente de la probeta, mientras que los desplazamientos transversales se dejan libres. Los ensayos se realizan en condiciones de tensión plana. Las tensiones medias (nominales) en los bordes de la malla se obtienen sumando las correspondientes reacciones nodales y dividiéndolas por el tamaño de la muestra. Los cálculos se han realizado con el código de EF denominado DRAC y los resultados han sido representados con el post-procesador DRAC-VIU, ambos desarrollados dentro de la ETSECCPB-UPC⁹.

Tracción uniaxial

Como se ha visto en el apartado anterior, el modelo constitutivo de junta permite la posibilidad de apertura de fisura si se alcanzan ciertos niveles de tensiones normal/corte. Con las interfases insertadas en toda la malla, los elementos junta pueden abrirse, cerrarse y formar macrofisuras específicas dependiendo de la geometría, el tamaño, las condiciones de carga, etc., con la única restricción de que éstas sólo pueden desarrollarse a lo largo de las líneas divisorias de elementos de medio continuo. Puede esperarse entonces que los resultados sean sensibles a la distribución de la malla en la matriz de mortero y a la selección de divisorias de elementos en los cuales se incluyen juntas. A fin de estudiar la incidencia de la configuración de la malla, se han considerado dos tipos de discretizaciones diferentes para cada arreglo de áridos de 16 y 36 piezas: la original empleada por Stankowski¹, que no había sido concebida para ser usada con interfases dentro de la matriz puesto que el mortero en sí mismo ha sido modelizado con una ley elasto-plástica, y la estándar en este trabajo siguiendo la propuesta de Vonk², en la cual los bordes de elementos de mortero siguen tendencias mucho menos intrincadas para conectar esquinas de áridos. La figura 3 muestra el arreglo de áridos de 4x4, diferenciando los elementos de árido (figura 3a) y los de mortero con la nueva disposición de las juntas (figura 3b) y la antigua (figura 3c). En la figura 4 se muestran los gráficos similares correspondientes al arreglo de áridos de 6x6. Nótese que en la nueva malla las juntas se ubican sólo a lo largo de contactos seleccionados de elementos de mortero que permiten una conexión menos tortuosa entre las potenciales fisuras iniciadas en los bordes matriz-árido, mientras que en la malla antigua las juntas han sido insertadas entre todos los elementos de mortero.

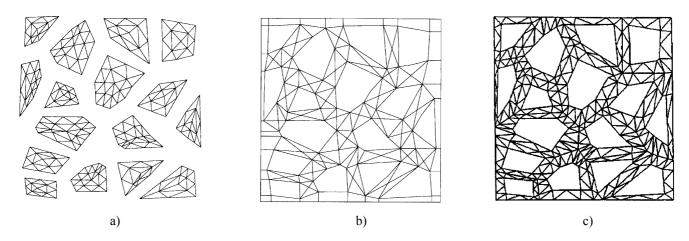


Figura 3: *Malla de EF para el arreglo de 4x4: a) elementos de árido, b) elementos de mortero con la nueva y c) la antigua disposición de las interfases.*

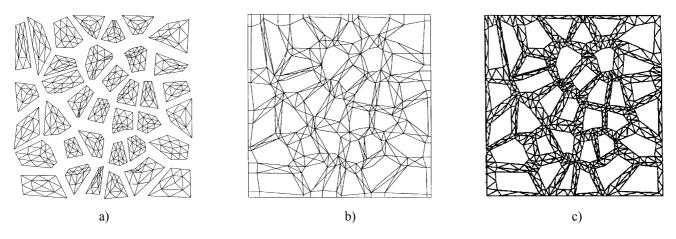


Figura 4: Malla de EF para el arreglo de 6x6: a) elementos de árido, b) elementos de mortero con la nueva y c) la antigua disposición de las interfases.

Se han obtenido los resultados correspondientes a las cuatro mallas de las figuras 3 y 4, sometidas a una tracción uniaxial a lo largo del eje x y el eje y. Los parámetros del material para los elementos de medio continuo son: E = 70000 MPa (árido), E = 25000 MPa (mortero), v = 0.18 (ambos); para las interfases árido-mortero: $K_N = K_T = 10^9$ MPa/m, resistencia a tracción $\chi_0 = 3$ MPa, $c_0 = 4.5$ MPa, $\tan \phi = 0.8$, $G_F^I = 0.00003$ MPa×m, $G_F^{IIa} = 10G_F^I$, $\sigma^{dil} = 7$ MPa, y para las interfases mortero-mortero los mismos parámetros excepto para $\chi_0 = 6$ MPa, $\kappa_0 = 9$ MPa, or resistencia para las interfases mortero-mortero que para las interfases árido-mortero. A fin de garantizar que los elementos junta no añaden más deformabilidad elástica ficticia al modelo, se ha asignado a sus coeficientes de rigidez elástica los valores mas altos posibles, compatibles con las dificultades numéricas que esto ocasiona.

En la figura 5a se presentan las curvas resultantes de tensión nominal-deformación nominal para todas las mallas y direcciones de carga. En esta figura puede apreciarse que el comportamiento prepico y el valor de la carga máxima resultan similares en todos los casos, mientras que una tendencia muy diferente se presenta en la evolución de la zona de postpico. En la rama de reblandecimiento se pone de manifiesto que las curvas obtenidas con las nuevas mallas modificadas presentan una tensión residual más baja que las obtenidas con las discretizaciones originales de Stankowski. Esto se debe a una tendencia de fisuración menos intrincada que elimina la fricción residual espúrea en estados avanzados del proceso de separación, tal como puede apreciarse más claramente en la representación detallada de las trayectorias de fisuración presentadas en las figuras 5b a 7. En las figuras 5b y 5c se presenta la configuración deformada en la nueva malla de 4x4 cargada en dirección y y en la nueva malla de 6x6 cargada en dirección x, para una situación avanzada de carga (unas cinco veces la deformación de la carga de pico).

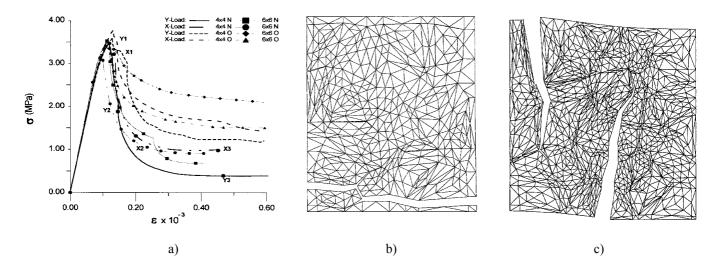
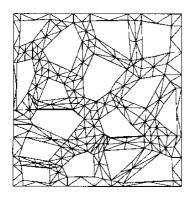
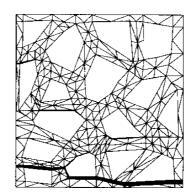


Figura 5: Tracción uniaxial: a) curvas tensión-deformación nominales para las 4 mallas cargadas en dirección y y x, b) y c) mallas deformadas de 4x4 y 6x6 nuevas cargadas en dirección y y x, respectivamente.

La evolución del proceso de fisuración en estos dos casos se presenta en las figuras 6 (malla de 4x4) y 7 (malla de 6x6), en términos del trabajo disipado durante el proceso de fractura W^{cr}, representado en los gráficos por el espesor de línea de cada junta.

Cada secuencia de izquierda a derecha corresponde a las tres etapas de carga señaladas en la figura 5a. Se puede apreciar en ambas figuras que una tendencia de fisuración inicialmente distribuida sobre todo en las interfases árido-mortero se convierte, a partir de un punto cercano a la carga de pico, en un estado altamente localizado, con una (macro) fisura que se desarrolla a través de la probeta, mientras las demás fisuras existentes se descargan. También puede observarse que la tendencia de fisuración exhibe ramificaciones y puentes entre fisuras alrededor de los áridos, que a medida que su distribución resulta mas intrincada corresponde a curvas que presentan una mayor resistencia residual en la zona de reblandecimiento. Los resultados completos, correspondientes a todas las mallas, se han incluido en⁸.





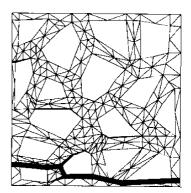
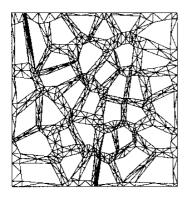
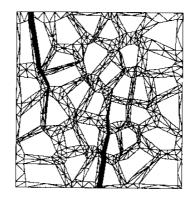


Figura 6: Fisuración progresiva de la nueva malla de 4x4 cargada en dirección y.





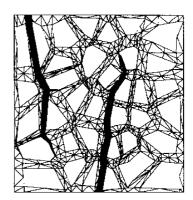


Figura 7: Fisuración progresiva de la nueva malla de 6x6 cargada en dirección x.

Compresión uniaxial

En este apartado se presenta la simulación numérica de un ensayo de compresión uniaxial en las mallas con arreglos de áridos de 4x4 y 6x6. Los parámetros del material para los elementos de medio continuo son: E = 70000 MPa (árido), E = 25000 MPa (mortero), v = 0.2 (ambos); para las interfases árido-mortero: $K_N = K_T = 10^9$ MPa/m, $\tan \phi_0 = 0.6$, $\chi_0 = 2$ MPa, $c_0 = 7$ MPa, $G_F^{I} = 0.00003$ MPa×m, $G_F^{IIa} = 10G_F^{I}$, $\sigma^{dil} = 40$ MPa, $\tan \phi_r = 0.2$, $\alpha_{\sigma}^{dil} = -2$, $\alpha_{\phi} = 1$, y demás parámetros igual a cero; para las interfases mortero-mortero los mismos parámetros excepto para $\chi_0 = 4$ MPa, $G_F^{I} = 0.00006$ MPa×m.

En la figura 8 se presentan las curvas tensión-deformación nominales correspondientes a ambas mallas. Se ha graficado la evolución de las tensiones de compresión en función de las deformaciones axial y transversal. La deformación transversal se ha obtenido a partir de los desplazamientos horizontales de los nodos de borde izquierdo y derecho situados aproximadamente en el centro de la altura de la malla. Se puede apreciar en la figura que el comportamiento de ambas mallas de la simulación numérica resulta bastante similar y que concuerda cualitativamente con los resultados típicos obtenidos en los ensayos experimentales¹⁰.

En la parte izquierda de la figura 8 puede apreciarse el comportamiento de la deformación lateral. Inicialmente, ε_2 evoluciona manteniendo aproximadamente la relación de Poisson. Antes de alcanzar la carga de pico, la deformación lateral acentúa su crecimiento que ya en la rama de reblandecimiento se hace considerable y supera los valores de la deformación axial. En la figura 9 se complementa desde otro punto de vista la característica de este comportamiento. En ensayos experimentales llevados a cabo sobre probetas cúbicas se ha podido apreciar que el comportamiento de ambas deformaciones laterales ε_2 y ε_3 resulta muy similar¹⁰⁻¹¹. Por ello, si consideramos en la simulación numérica una deformación volumétrica "ficticia" definida bajo la hipótesis de considerar $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$, las curvas resultantes presentadas en la figura 9 reproducen de forma muy adecuada el comportamiento observado experimentalmente.

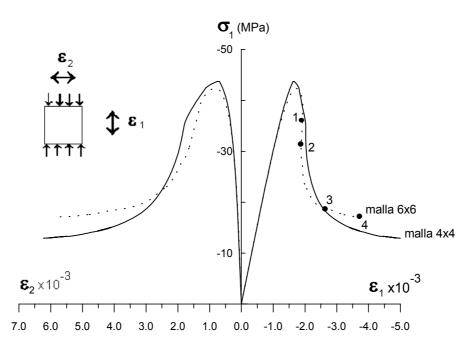


Figura 8: Curvas tensión-deformación nominales de las mallas de 4x4 y 6x6 bajo compresión uniaxial.

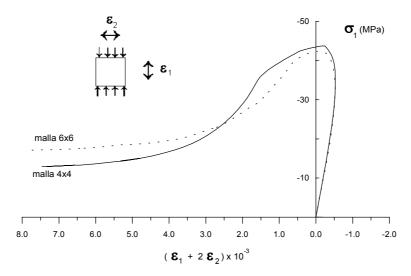


Figura 9: Curvas tensión-deformación volumétrica "ficticia".

En la figura 10 se presenta la evolución del proceso de fisuración en términos del módulo del vector desplazamiento plástico en los distintos puntos de la malla de 6x6 señalados en la figura 8. En la figura 10a se presenta el estado en el punto 1 representativo de la zona en la que comienza el proceso de localización. En el gráfico 10b correspondiente al punto 2 se puede observar que a la vez que aumenta el proceso de localización en determinadas bandas inclinadas, otras comienzan un proceso de descarga. En el punto 3, cuyo estado de fisuración se representa en la figura 10c, se puede apreciar claramente la localización en bandas preferenciales que propician el desplazamiento entre bloques de la muestra, mientras que las demás bandas presentan un proceso de descarga o se detiene su crecimiento. Nótese que el paso del punto 2 al 3 presenta un apreciable descenso de resistencia (figura 8), y que durante esta transición se completa la tendencia de fisuración mediante la conexión de tres bandas: una banda inclinada a la derecha que proviene de la cara superior, una banda izquierda que se inicia aproximadamente en la mitad de la altura de la muestra y una tendencia aproximadamente vertical que comienza en el borde inferior. Debido a la heterogeneidad del material estas tres bandas presentan cierta tendencia irregular y en la zona de conexión se producen algunas ramificaciones, comportamiento éste que es característico en los materiales cuasifrágiles. Por último, en el punto 4 (figura 10d) se observa un crecimiento de los desplazamientos plásticos debido a la degradación de los contactos.

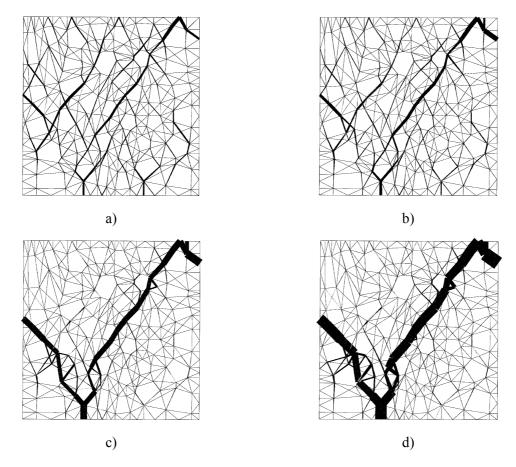


Figura 10: Evolución del proceso de localización en términos del módulo del vector desplazamiento plástico correspondiente a la malla de 6x6.

Ensayo de tracción indirecta

El ensayo de tracción indirecta o ensayo brasileño es el método más frecuentemente utilizado para estimar la resistencia a tracción del hormigón. El mismo consiste en aplicar sobre una probeta de forma cilíndrica o prismática, dos cargas de compresión opuestas y de igual valor ubicadas en el plano vertical medio (diámetro) de la muestra, tal como puede apreciarse en la figura 11. Entre la probeta y los platos de carga se dispone una lámina de madera o cartón cuya finalidad es distribuir la carga de manera de evitar efectos de concentración de tensiones alrededor de la zona de contacto.

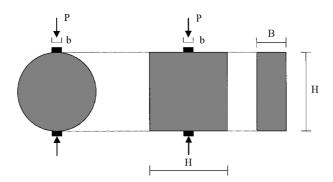


Figura 11: Esquema de la geometría y aplicación de cargas en el ensayo de tracción indirecta.

De acuerdo con la teoría de la elasticidad, esta configuración genera sobre el plano de cargas una tensión principal de tracción casi uniforme a lo largo de una buena parte de la zona central del diámetro de la muestra. Si bien el

En la figura 12 se presentan los resultados de las curvas carga por unidad de espesor-apertura de fisura (COD), en términos relativos a los valores correspondientes al primer pico de carga. Se ha adoptado como valor de la apertura de fisura, el desplazamiento normal promedio de las tres juntas situadas en la zona central de la malla, contenidas aproximadamente dentro del plano de carga. A fin de facilitar la interpretación de las curvas, la rama de prepico se presenta como la recta que une el origen y el punto que representa la carga máxima y la correspondiente apertura de junta.

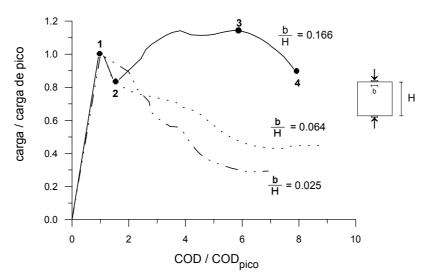


Figura 12: Diagramas de carga-COD en términos relativos a los valores de pico, para los tres anchos de reparto estudiados.

Se puede apreciar claramente en esta figura la influencia del ancho de apoyo en el comportamiento postpico, con una menor tendencia al reblandecimiento en la medida que se incrementa el ancho de apoyo, y que incluso para la mayor relación b/H registra un segundo pico de carga, lo cual concuerda con los resultados experimentales obtenidos en 14. El comportamiento puede apreciarse más claramente mediante la representación de las trayectorias de fisuración. En la figura 13 se presenta una secuencia de la evolución de la fisuración en términos del módulo del vector desplazamiento plástico en los puntos 1 a 4 señalados en la figura 12, correspondiente al mayor ancho de apoyo b/H = 0.166. En el primer pico de carga se forma una fisura en el centro de la muestra; en el punto 2 de descenso de carga se observa una evolución de la fisura hacia los extremos; alrededor del segundo pico de carga se genera un mecanismo de fisuración secundario y finalmente en la rama de la segunda descarga se aprecia la formación de una cuña en el extremo inferior. Se observa muy claramente en esta secuencia que el primer pico de carga es debido a las tensiones de tracción en el centro de la malla, mientras que el segundo pico de carga se debe a la formación del mecanismo secundario en forma de cuña 15-17. En la figura 14 que representa el estado de fisuración final para los otros dos anchos de apoyo (b/H = 0.025 y 0.064), puede apreciarse la influencia del ancho de la zona de apoyo en la formación de ambos mecanismos de rotura.

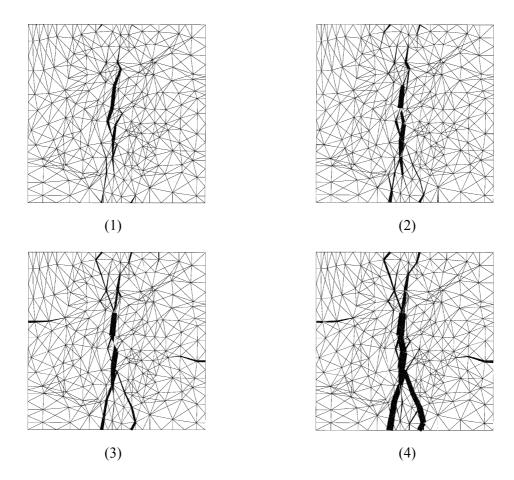


Figura 13: Estado de fisuración en los puntos 1 a 4 señalados en la figura 12, correspondientes al mayor ancho de apoyo b/H = 0.166.

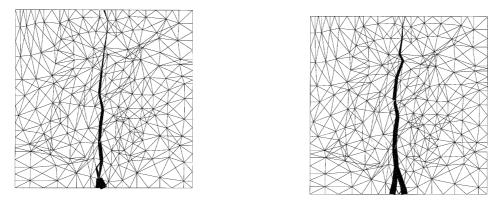


Figura 14: Estado de fisuración final para los anchos de apoyo b/H de 0.025 (izquierda) y 0.064 (derecha).

Debido a que en el ensayo brasileño el estado tensional no es uniaxial, se presentan dos efectos superpuestos que generan dos diferentes modos de fallo. El primero viene dado por las tensiones de tracción aproximadamente uniformes de la zona central de la probeta, las cuales provocan un primer pico de la curva carga-COD y la iniciación de una fisura vertical contenida en el plano de cargas que se desarrolla en modo I hacia los extremos de la muestra. El segundo modo de fallo, debido a las tensiones de compresión diametral, provoca una fisuración secundaria ubicada alrededor de la zona de aplicación de las fuerzas cuya evolución da lugar a la formación de una cuña. Mientras que la fisura principal inicial exhibe un comportamiento frágil con propagación en modo I, la fisuración secundaria en forma de cuña se encuentra en un estado de mayor confinamiento con un comportamiento más plástico que evoluciona a través de un deslizamiento friccional de los lados inclinados de la cuña. Esta diferencia de deformabilidad hace que el mecanismo de fallo secundario se presente con posterioridad al de

tracción. Este comportamiento nada trivial pone de manifiesto la capacidad del modelo microestructural para reproducir y explicar complejos aspectos de la fractura del hormigón, posibilitando la modelización de la variación del mecanismo de fractura desde modo I a mixtos con sus correspondientes cambios de deformabilidad.

CONCLUSIONES

Los principales resultados obtenidos permiten reproducir con buena aproximación el comportamiento observado en los ensayos experimentales. Además de estos resultados satisfactorios a nivel macroscópico, el modelo microestructural permite poner de relieve y analizar una gran variedad de aspectos internos del material, tales como la influencia de las fases componentes, la heterogeneidad del material, la iniciación y propagación de la microfisuración, mecanismos de rotura, etc., que resultan imposibles de detectar mediante un análisis de tipo continuo, y que en muchos casos son esenciales a fines de explicar el comportamiento macroscópico. Además de muestras de hormigón convencional, el modelo ha sido contrastado también en el análisis de hormigón de alta resistencia y hormigón de presas⁸. El modelo, así como las características de los resultados obtenidos pueden extenderse también a otros materiales cuasifrágiles, tales como rocas, algunos cerámicos, hielo, huesos, etc.¹⁸⁻¹⁹.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la DGICYT y a la CICYT (Madrid, España) la ayuda recibida a través de los proyectos de investigación PB96-0500 y AMB96-0953. Se agradece también la ayuda de la Consellería de Obres Públiques y de la Direcció General de Recerca (Grupos de Calidad) de la Generalitat de Catalunya.

REFERENCIAS

- [1] STANKOWSKI, T., 1990. Numerical simulation of progressive failure in particle composites. PhD thesis, Dept. CEAE, University of Colorado, Boulder, CO 80309-0428, USA.
- [2] VONK, R., 1992. Softening of concrete loaded in compression. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven, Netherlands.
- [3] ROELFSTRA, P.E, SADOUKI, H y WITTMANN, F., 1985. Le beton numerique. Materials & Structures RILEM, 18:309-317.
- [4] ROTS, J.G., 1988. Computational modelling of concrete fracture. PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [5] CAROL, I. y PRAT, P.C., 1990. A statically constrained microplane for the smeared analysis of concrete cracking. In Bicanic and Mang, editors, Computer aided analysis and design of concrete structures, 919-930.
- [6] CAROL, I y PRAT, P., 1991. Smeared analysis of concrete fracture using a microplane based multicrack model with static constraint. In J.G.M. van Mier, J. G. Rots, and A. Bakker, editors, Fracture processes in concrete, rock and ceramics, pages 619-628, Noordwijk, The Netherlands. E & FN SPON.
- [7] CAROL, I., PRAT, P. C. y LÓPEZ, C. M., 1997. A normal/shear cracking model. Application to discrete crack analysis. J. of Engineering Mechanics.Vol. 123,No 8.
- [8] LÓPEZ, C. M., 1999. Análisis microestructural de la fractura del hormigón utilizando elementos finitos tipo junta. Aplicación a diferentes hormigones. Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
- [9] PRAT, P.C., GENS, A., CAROL, I., LEDESMA, A. y GILI, J.A., 1993. DRAC: A computer software for the analysis of rock mechanics problems. In H. Liu, editor, Application of computer methods in rock mechanics, 2: 1361 1368, Xian, China. Shaanxi Science and Technology Press.

- [10] VAN MIER, J. G. M., 1984. Strain-softening of Concrete under Multiaxial Loading Conditions. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Holanda.
- [11] VAN MIER, J. G. M., 1997. Fracture Processes of Concrete. CRC Press.
- [12] TANG, T., SHAH, S. P. y OUYANG, C., 1992. Fracture Mechanics and Size Effect of Concrete in Tension. Journal of Structural Engineering, ASCE, 118, pp. 3169-3185.
- [13] ROCCO, C., GUINEA, G. V., PLANAS, J. y ELICES, M., 1995. Variación de la resistencia a la tracción en el ensayo brasileño. Anales de Mecánica de la Fractura, 12, pp. 227-232.
- [14] ROCCO, C., GUINEA, G. V., PLANAS, J. y ELICES, M., 1997. Estudio experimental sobre los mecanismos de rotura del ensayo de compresión diametral. Anales de Mecánica de la Fractura, 14, pp. 170-175.
- [15] BAZANT, Z. P., KAZEMI, M; HASEGAWA, T y MAZARS, J., 1991. Size effect in brazilian split cylinder test. ACI Material Journal, 88 (3). pp. 325-332.
- [16] CASTRO-MONTERO, A., JIA, Z. y SHAH, S., 1995. Evaluation of damage in brazilian test using holographic interferometry. ACI Materials Journal, 2, pp. 268-275.
- [17] CARMONA, S., 1997. Caracterización de la fractura del hormigón y de vigas de hormigón armado. Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
- [18] PINI, M., LÓPEZ, C. M., CAROL, I. y CONTRO, R., 1997. Microstructural analysis of cancellous bone using interface elements. En Rossmanith, H.P.(Ed.), Damage and Failure of Interfaces-(DFI-1), Viena, Austria.
- [19] CAROL, I. y LÓPEZ, C. M.,1999. Failure Analysis of Quasi-Brittle Materials Using Interface Elements. En Mechanics of Quasi-Brittle Materials and Structures. Gilles Pijaudier-Cabot, Zdenek Bittnar y Bruno Gérard (Eds.), pp. 289-305.