

MODELO DE DAÑO UNILATERAL

Pablo E. Martín, Bibiana M. Luccioni, Rodolfo F. Danesi

*Laboratorio de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán,
CONICET Casilla de Correo 134, Correo Central, 4000 San Miguel de Tucumán, Argentina*

RESUMEN

El deterioro progresivo de los materiales puede ser descripto de manera simple dentro de la Mecánica del Daño Continuo. El modelo debe tener en cuenta dos aspectos importantes que aparecen en la mayoría de los materiales dañados: la naturaleza anisótropa del daño aún en materiales inicialmente isótropos y el carácter unilateral del daño. Si bien el daño es irreversible, puede estar activo o no dependiendo de las condiciones de carga. Se ha probado experimentalmente que la reversión de la carga puede cerrar las fisuras dando como resultado una recuperación de rigidez.

En este trabajo se presenta un modelo de daño escalar unilateral que permite considerar daño en tracción y compresión. Incorporado dentro de un marco adecuado, este modelo permite simular daño anisótropo unilateral.

En primer lugar, se describe el modelo de daño escalar y la condición unilateral. A continuación, se prueba que el mismo surge de un potencial energético bien definido y no da lugar a disipación espuria en una historia cerrada de carga. Se demuestra además, que satisface las condiciones de simetría del tensor de flexibilidad elástica y continuidad del campo de tensiones y deformaciones para condiciones unilaterales. Se esquematiza luego la utilización de dicho modelo para simular daño anisótropo. El trabajo se completa con un ejemplo de aplicación que muestran que el modelo reproduce adecuadamente la condición de daño unilateral.

ABSTRACT

Progressive deterioration of materials can be simply described within Continuum Damage Mechanics. The model must take into account two important features that are present in many damaged materials: the anisotropic nature of damage even in initially isotropic materials and the unilateral character of damage. Although damage is irreversible, its effects can be active or inactive depending on the applied loading conditions. It has been experimentally confirmed that reversal of load can close cracks with the resultant stiffness recovery.

A unilateral scalar damage model is presented in this paper. It takes into account not only tension damage but also compression damage and incorporated into an adequate frame it can be used to simulate anisotropic unilateral damage.

First, the scalar damage model and the unilateral condition are described. Then, the proposed model is proved to follow from a well defined energy potential, that is, no dissipation takes place in a closed load history. The conditions of symmetry of the elastic compliance and continuity of the stress and strain fields for unilateral conditions are also shown to be satisfied. After that, the use of this model to simulate anisotropic damage is briefly described. The paper is completed with an application example to show that the proposed model accurately reproduces the unilateral damage condition.

INTRODUCCION

La Mecánica del Daño Continuo es una herramienta atractiva para describir el deterioro progresivo de las propiedades mecánicas de los materiales que fue ampliamente desarrollada y aplicada a numerosas situaciones durante las últimas dos décadas. Un caso interesante de aplicación es el relacionado con materiales cuyas propiedades elásticas evolucionan con el daño. Esta es una situación típica para el hormigón y para muchos

materiales compuestos frágiles. Como primera aproximación, se puede considerar que el comportamiento no lineal de estos materiales y sus cambios internos pueden asociarse con el proceso de daño. El modelo debe tener en cuenta dos aspectos muy importantes que aparecen en la mayoría de estos materiales¹:

- La naturaleza anisótropa del daño, aún en materiales inicialmente isotropos
- El carácter unilateral del daño que está relacionado con el hecho de que el daño, si bien es irreversible, puede estar activo o inactivo dependiendo de las condiciones de carga. En muchos materiales la reducción de la rigidez en tracción es debida al desarrollo de microfisuras y se ha confirmado experimentalmente que la reversión de la carga puede cerrar dichas fisuras, con la consiguiente recuperación de rigidez.

La simulación del efecto de apertura y cerrado de microfisuras presenta ciertas dificultades. En las últimas décadas se han propuesto numerosos modelos que intentan tener en cuenta dicho efecto^{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 12, 13}.

En trabajos recientes, Chaboche^{1, 12, 13} revisó la capacidad de varias teorías, basadas en escalares, vectores, tensores de segundo y cuarto orden para modelar anisotropía y recuperación de rigidez y concluyó que ninguno de estos desarrollos era capaz de describir estas dos características del comportamiento simultáneamente. Indicó además que los modelos debían satisfacer dos condiciones adicionales: simetría de la matriz de flexibilidad y continuidad de la respuesta cuando se producen condiciones unilaterales. Chaboche^{12, 13} propuso una condición unilateral para daño activo/pasivo. Si se combina esta condición con la ecuación de evolución del daño anisótropo, se obtiene una herramienta poderosa para describir anisotropía inducida por el daño en materiales inicialmente isotropos bajo historias de carga no proporcionales complejas.

Por otro lado, Carol¹⁴ remarcó que, debido a la naturaleza no disipativa del fenómeno de apertura y cerrado de microfisuras para un dado estado de daño, la formulación de la recuperación debía, de acuerdo a la hiperelasticidad, derivarse de un potencial bien definido de manera que la energía se conserve en ciclos cerrados de carga. Propuso una forma, basada en el cálculo de la disipación espuria para verificar el cumplimiento de esta condición y demostró que la mayoría de los modelos de daño unilateral encontrados en la bibliografía, basados en operadores de proyección, se comportan bien en el caso de daño escalar pero exhiben disipación espuria cuando son utilizados para simular daño anisótropo.

En este trabajo se incorpora la condición de daño unilateral propuesta por Chaboche^{12, 13}, extendida para considerar daño en compresión, en un modelo de daño escalar¹⁵ antes desarrollado por los autores. Dicho modelo es incorporado luego en un marco adecuado que permite simular daño anisótropo. Se prueba que el mismo se deriva de un potencial bien definido y, en consecuencia no se produce disipación en una historia de carga cerrada. También se demuestra que las condiciones de simetría del tensor de flexibilidad elástica y continuidad de los campos de tensiones y deformaciones para condiciones unilaterales se satisfacen.

MODELO DE DAÑO UNILATERAL PROPUESTO

El modelo utilizado es termodinámicamente consistente y surge de una generalización la teoría de daño escalar^{16, 15} a la que se incorpora la condición de daño unilateral propuesta por Chaboche^{12, 13}, extendida para considerar daño en compresión.

Para pequeñas deformaciones y problemas térmicamente estables, la energía libre se escribe como una función cuadrática:

$$\Psi^e(\varepsilon_{ij}^e; \beta) = \frac{1}{2m} [\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}(\beta) \varepsilon_{kl}^e] \quad (1)$$

donde m es la densidad del material, ε_{ij} es el tensor deformaciones elásticas y $C_{ijkl}(\varepsilon_{mn}, \beta_r)$ es el tensor constitutivo secante afectado por la evolución de las variables internas de daño β_r . En este trabajo se propone para el mismo la siguiente expresión^{12, 13}:

$$C_{ijkl} = (1 - d^- - d^+) C_{ijkl}^0 + \xi \sum_{\alpha=1}^3 H[tr(P_{rstu}^{\alpha} \varepsilon_{tu})] P_{ijmn}^{\alpha} (d^- C_{mnpq}^0) P_{pqkl}^{\alpha} + \eta \sum_{\alpha=1}^3 H[-tr(P_{rstu}^{\alpha} \varepsilon_{tu})] P_{ijmn}^{\alpha} (d^+ C_{mnpq}^0) P_{pqkl}^{\alpha} \quad (2)$$

Donde d^+ es la *variable interna de daño en tracción* y d^- es la *variable interna de daño en compresión*, que pueden variar entre 0 para el material virgen, no dañado, hasta 1 para el material completamente dañado, en tracción y compresión respectivamente. Tomando $d^- = 0$ se obtiene la forma propuesta por Chaboche^{12, 13} para el tensor secante.

C_{ijkl}^0 es el tensor constitutivo del material virgen, ξ tiene en cuenta la influencia del daño en compresión en un proceso de tracción y η tiene en cuenta la influencia del daño en tracción en un proceso de compresión. Ambos son parámetros materiales que deben ser ajustados a partir de resultados experimentales de ensayos con reversión de deformaciones y cumplen las siguientes relaciones:

$$0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3)$$

Los casos más simples corresponden a:

- $\xi = \eta = 1$ en el que las dos formas de activación del daño están desacopladas.
- $\xi = \eta = 0$ en el que las dos formas activación de daño están totalmente acopladas y se recupera la forma del daño escalar:

$$C_{ijkl} = (1 - d^- - d^+) C_{ijkl}^0 = (1 - d) C_{ijkl}^0 \quad \text{con} \quad d = d^+ + d^-$$

P_{ijkl}^{α} es el operador proyección en la dirección del autovector n_i^{α} del tensor de deformaciones ε_{ij} y se calcula como:

$$P_{ijkl}^{\alpha} = n_i^{\alpha} n_j^{\alpha} n_k^{\alpha} n_l^{\alpha} \quad (4)$$

$$\text{y} \quad H(x) = \begin{cases} = 1 & \text{si } x > 0 \\ = 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

es la función escalón.

De la expresión (2) se puede deducir que, en un proceso en el que todas las deformaciones principales son positivas, $H[-tr(P_{rstu}^{\alpha} \varepsilon)] = 0$ y $H[tr(P_{rstu}^{\alpha} \varepsilon)] = 1$ y el tensor secante resulta :

$$C_{ijkl} = [1 - d^- (1 - \xi) - d^+] C_{ijkl}^0 \quad (6)$$

donde se ve claramente el significado del parámetro ξ . Si se considera que el daño en compresión no afecta el comportamiento en tracción: $\xi = 1$ y

$$C_{ijkl} = (1 - d^+) C_{ijkl}^0 \quad (7)$$

Un análisis similar puede realizarse para el caso en que todas las deformaciones principales sean de compresión.

Si se satisfacen las ecuaciones, conocidas como relaciones de Coleman¹⁷ se asegura el cumplimiento de la desigualdad de Clasius-Duhem para un dado estado termodinámico:

$$\sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (9)$$

Por otro lado, para problemas termomecánicos desacoplados, las desigualdades de Clasius-Duhem deben satisfacerse independientemente. La disipación mecánica puede escribirse como sigue:

$$\Xi = -m \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \quad (10)$$

$$\Xi = m \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial d^+} \dot{d}^+ - \frac{\partial \Psi}{\partial d^-} \dot{d}^- \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Xi = m \Psi_0 \cdot \dot{d}^+ - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left\{ \eta \sum_{\alpha=1}^3 H[-tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs})] P_{ijmn}^\alpha Co_{mnpq} P_{pqkl}^\alpha \right\} \varepsilon_{kl} \dot{d}^+ + \\ + m \Psi_0 \cdot \dot{d}^- - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left\{ \xi \sum_{\alpha=1}^3 H[tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs})] P_{ijmn}^\alpha Co_{mnpq} P_{pqkl}^\alpha \right\} \varepsilon_{kl} \dot{d}^- \end{aligned} \quad (12)$$

Donde:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2m} \varepsilon_{ij} Co_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Xi = m \Psi_0 \cdot \dot{d}^+ - \frac{1}{2} \left\{ \eta \sum_{\alpha=1}^3 H[tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs})] \varepsilon_{mn}^\alpha Co_{mnpq} \varepsilon_{pq}^\alpha \right\} \dot{d}^+ + \\ + m \Psi_0 \cdot \dot{d}^- - \frac{1}{2} \left\{ \xi \sum_{\alpha=1}^3 H[-tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs})] \varepsilon_{mn}^\alpha Co_{mnpq} \varepsilon_{pq}^\alpha \right\} \dot{d}^- \end{aligned} \quad (14)$$

El umbral de daño se describe mediante una función de daño G^d como sigue^{15, 18}:

$$G^d(\sigma_{ij}, \kappa^d) = g(\sigma_{ij}) - \sigma(\kappa^d) = 0 \quad (15)$$

donde $g(\sigma_{ij})$ es la tensión equivalente, $\sigma(\kappa^d)$ es el umbral de daño equivalente y κ^d es la variable interna de degradación que varía desde 0 para el material virgen hasta 1 para el material completamente dañado y se obtiene normalizando la energía disipada en daño a la unidad^{15, 18}:

$$\kappa^d = \frac{1}{C} \left\{ m \Psi_0 \cdot \dot{d}^+ - \frac{1}{2} \left\{ \eta \sum_{\alpha=1}^3 H[-tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs})] \varepsilon_{mn}^\alpha Co_{mnpq} \varepsilon_{pq}^\alpha \right\} \dot{d}^+ + m \Psi_0 \cdot \dot{d}^- - \frac{1}{2} \left\{ \xi \sum_{\alpha=1}^3 H[tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs})] \varepsilon_{mn}^\alpha Co_{mnpq} \varepsilon_{pq}^\alpha \right\} \dot{d}^- \right\} \quad (16)$$

Donde: el factor $\frac{1}{C}$ adimensionaliza a la unidad la disipación y se calcula como:

$$C = g_f^d r(\sigma_{ij}) \frac{m \Psi_0 \cdot -\frac{1}{2} \eta \sum_{\alpha=1}^3 H[-tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs})] \varepsilon_{mn}^\alpha Co_{mnpq} \varepsilon_{pq}^\alpha}{m \Psi_0^f - \eta (\varepsilon^2)^2 (\lambda + 2\mu)} + g_c^d [1 - r(\sigma_{ij})] \frac{m \Psi_0 - \frac{1}{2} \xi \sum_{\alpha=1}^3 H[tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs})] \varepsilon_{mn}^\alpha Co_{mnpq} \varepsilon_{pq}^\alpha}{m \Psi_0^c - \xi (\varepsilon^1)^2 (\lambda + 2\mu)} \quad (17)$$

Donde Ψ_0^f y Ψ_0^c son las energías libres no dañadas equivalentes en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente; ε^2 y ε^1 son las deformaciones transversales en los mismos ensayos; g_f^d y g_c^d son las máximas

densidades de energía disipadas en daño en procesos tracción y compresión respectivamente y se pueden evaluar como sigue:

$$g_f^p = \frac{G_f}{l_c} \quad \text{and} \quad g_c^p = \frac{G_c}{l_c} \quad (18)$$

Donde G_f y G_c son las energías de fractura y de aplastamiento respectivamente y l_c es un parámetro externo que depende del tamaño característico de la malla de elementos finitos y que se introduce con el objeto de lograr objetividad de la respuesta del sólido respecto del tamaño de la malla.

$$r(\sigma_{ij}) = \frac{\sum_{\alpha=1}^3 \langle tr(P_{rsst}^{\alpha} \sigma_{rs}) \rangle}{\sum_{\alpha=1}^3 |tr(P_{rsst}^{\alpha} \sigma_{rs})|} \quad \text{y} \quad \langle x \rangle = \frac{(x + |x|)}{2} \quad (19)$$

Se establece la siguiente regla de evolución del daño:

$$\begin{Bmatrix} \dot{d}^+ \\ \dot{d}^- \end{Bmatrix} = \dot{\Lambda} \begin{Bmatrix} r(\sigma_{ij}) \\ 1 - r(\sigma_{ij}) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

y $\dot{\Lambda} \geq 0$ es el parámetro de consistencia de daño.

El umbral de daño se actualiza de la siguiente manera:

$$\sigma(\kappa^d) = r(\sigma_{ij}) \sigma_t(\kappa^d) + [1 - r(\sigma_{ij})] \sigma_c(\kappa^d) \quad (21)$$

Donde $\sigma_t(\kappa^d)$ y $\sigma_c(\kappa^d)$ representan la evolución de los umbrales de daño en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente.

Las condiciones de carga/descarga se derivan de las relaciones de Khun Tucker formuladas par problemas con restricciones unilaterales:

$$\begin{cases} a) \dot{\Lambda} \geq 0 \\ b) G^d \leq 0 \\ c) \dot{\Lambda} G^d = 0 \end{cases} \quad (22)$$

El parámetro de consistencia de daño puede obtenerse de la condición de consistencia de daño.

Disipación Espuria

En un trabajo reciente Carol¹⁴ señaló que estos modelos deben satisfacer la conservación de la energía. Esta condición puede ser analizada para un dado estado de microfisuración e historias de carga que producen la apertura o cerrado de estas microfisuras sin producir fisuración adicional. En el modelo de daño unilateral propuesto esto corresponde a historias de tensión o deformación que no alcanzan la superficie de carga en daño descrita por la ecuación (15). Bajo estas condiciones, para carga no proporcional, se obtiene, en general, una respuesta no lineal debido al carácter unilateral del daño. Sin embargo, como el daño no se propaga, la energía debe conservarse en ciclos cerrados de carga¹⁴. Carol¹⁴ propone la siguiente forma para calcular la disipación espuria para un ciclo de carga en modelos de daño unilateral como el propuesto:

$$\dot{d}^{sp} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \dot{C}_{ijkl} \Big|_{(d=cte)} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (23)$$

Para el modelo propuesto resulta:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{ijkl} \Big|_{(d=cte)} &= 2\xi \sum_{\alpha=1}^3 H \left[\text{tr} \left(P_{rstu}^{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^{\alpha} \left(d^{-} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{\alpha} + \\ &+ 2\eta \sum_{\alpha=1}^3 H \left[-\text{tr} \left(P_{rstu}^{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^{\alpha} \left(d^{+} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{\alpha} + \\ &+ \xi \sum_{\alpha=1}^3 H \left[\text{tr} \left(P_{rstu}^{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^{\alpha} \left(d^{-} Co_{mnpq} \right) P_{pqkl}^{\alpha} + \\ &+ \eta \sum_{\alpha=1}^3 H \left[-\text{tr} \left(P_{rstu}^{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^{\alpha} \left(d^{+} Co_{mnpq} \right) P_{pqkl}^{\alpha} \end{aligned} \quad (24)$$

En el caso de isotropía inicial, el tensor de rigidez elástico no dañado, es:

$$Co_{mnpq} = \lambda \delta_{mn} \delta_{pq} + \mu (\delta_{mp} \delta_{nq} + \delta_{mq} \delta_{np}) \quad (25)$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé.

Teniendo en cuenta que

$$\text{tr} \left(P_{ijkl}^s \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \right) = P_{iikl}^s \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} = \boldsymbol{\varepsilon}^s, \quad (26)$$

se analizan las siguientes situaciones:

$$\text{a.- } \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} > 0; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \leq 0; \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \leq 0$$

$$\dot{d}^{sp} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \left[2\xi P_{ijmn}^{(1)} \left(d^{-} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(1)} + 2\eta P_{ijmn}^{(2)} \left(d^{+} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(2)} + 2\eta P_{ijmn}^{(3)} \left(d^{+} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(3)} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (27)$$

$$\text{b.- } \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} > 0; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} > 0; \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \leq 0$$

$$\dot{d}^{sp} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \left[2\xi P_{ijmn}^{(1)} \left(d^{-} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(1)} + 2\xi P_{ijmn}^{(2)} \left(d^{-} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(2)} + 2\eta P_{ijmn}^{(3)} \left(d^{+} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(3)} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (28)$$

$$\text{c.- } \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} > 0; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} > 0; \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} > 0$$

$$\dot{d}^{sp} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \left[2\xi P_{ijmn}^{(1)} \left(d^{-} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(1)} + 2\xi P_{ijmn}^{(2)} \left(d^{-} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(2)} + 2\xi P_{ijmn}^{(3)} \left(d^{-} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(3)} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (29)$$

$$\text{d.- } \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \leq 0; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \leq 0; \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \leq 0$$

$$\dot{d}^{sp} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \left[2\eta P_{ijmn}^{(1)} \left(d^{+} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(1)} + 2\eta P_{ijmn}^{(2)} \left(d^{+} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(2)} + 2\eta P_{ijmn}^{(3)} \left(d^{+} Co_{mnpq} \right) \dot{P}_{pqkl}^{(3)} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (30)$$

En cualquiera de estos casos, desarrollando las expresiones de la disipación espuria y teniendo en cuenta que $\dot{n}_k^{\alpha} n_l^{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} = 0$, $n_k^{\alpha} n_l^{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}$ y $\dot{n}_k n_k = 0$ resulta $\dot{d}^{sp} = 0$ (31)

O sea que la disipación espuria es nula en todos los casos. Se puede demostrar que en el caso de ortotropía elástica se llega a idénticas conclusiones.

Simetría del tensor secante y continuidad de los campos de tensiones y deformaciones para condiciones unilaterales.

Entre otras condiciones que debe cumplir un modelo de daño unilateral para materiales inicialmente isótropos, Chaboche^{1, 12, 13}, señala que es deseable que:

- a) El tensor de rigidez secante sea simétrico
 - b) Los campos de tensión (deformación) sean simétricos para condiciones unilaterales
- a) Reemplazando en la expresión del tensor de rigidez no dañado (25) para el caso isótropo en la expresión del tensor de rigidez secante (2) resulta:

$$C_{ijkl} = (1 - d^- - d^+) [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] + (\lambda + 2\mu) \left\{ \xi d^- \sum_{\alpha=1}^3 H(\varepsilon^\alpha) (n_i^\alpha n_j^\alpha n_k^\alpha n_l^\alpha) + \eta d^+ \sum_{\alpha=1}^3 H(-\varepsilon^\alpha) (n_i^\alpha n_j^\alpha n_k^\alpha n_l^\alpha) \right\} \quad (32)$$

Si se analiza el factor $(n_i^\alpha n_j^\alpha n_k^\alpha n_l^\alpha)$ para distintas situaciones, se puede ver que el mismo es distinto de cero únicamente cuando $i = j = k = l$.

Por lo tanto se observa que los valores que se encuentran fuera de diagonal principal sólo conservan el primer término, que es simétrico. En consecuencia, el tensor de rigidez secante descrito en ec.(2) es simétrico.

b) Para analizar la continuidad del campo de tensiones bajo condiciones unilaterales se analiza la siguiente situaciones:

i.- $\varepsilon^{(1)} \leq 0; \varepsilon^{(2)} > 0; \varepsilon^{(3)} = 0$ Cuando $\varepsilon^{(1)} \rightarrow 0$ Resulta:

$$\sigma_{ij} = \left\{ (1 - d^- - d^+) [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] + (\lambda + 2\mu) [\eta d^+ (n_i^{(2)} n_j^{(2)} n_k^{(2)} n_l^{(2)})] \right\} \varepsilon_{kl} \quad (33)$$

ii.- $\varepsilon^{(1)} > 0; \varepsilon^{(2)} > 0; \varepsilon^{(3)} = 0$ Cuando $\varepsilon^{(1)} \rightarrow 0$ Resulta:

$$\sigma_{ij} = \left\{ (1 - d^- - d^+) [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] + (\lambda + 2\mu) [\eta d^+ (n_i^{(2)} n_j^{(2)} n_k^{(2)} n_l^{(2)})] \right\} \varepsilon_{kl} \quad (34)$$

Las ecuaciones (33) y (34) resultan idénticas, lo que demuestra la continuidad del campo de tensiones cuando $\varepsilon^{(1)}$ cambia de signo. De la misma forma se puede demostrar que la continuidad del tensor de tensiones se mantiene para cualquier otro cambio de signo de las deformaciones principales.

DAÑO ANISOTROPO

En este punto se propone aplicar la teoría de mezclas^{19,20} para simular el comportamiento de materiales que exhiben daño anisótropo, a partir del modelo de daño escalar unilateral propuesto. La teoría de mezclas ha sido utilizada particularmente para la simulación del comportamiento de materiales compuestos^{18, 19,20,21}. En este caso, se supone que el material está formado por componentes ficticias, que coexisten en cada punto de acuerdo a una proporción de volumen, cada una de ellas con un comportamiento que responde al modelo de daño escalar unilateral propuesto en el apartado anterior. Mediante la teoría de mezclas, se tiene en cuenta la interacción entre las componentes y se obtiene una respuesta de conjunto más compleja que logra reproducir el efecto de la anisotropía inicial e inducida por el daño.

De acuerdo a la teoría de mezclas, la tensión en el compuesto resulta:

$$\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^n k_c (\sigma_{ij})_c = \sum_{c=1}^n k_c (C_{ijkl})_c \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (35)$$

Donde $(C_{ijkl})_c$ es el tensor secante de una componente ficticia c que se calcula según la ecuación (2)

$$\text{El tensor secante resulta:} \quad C_{ijkl} = M_{ijmn}^{-1} C_{mnl}^o \quad (36)$$

Donde C_{mnl}^o es el tensor de rigidez del material no dañado y M_{ijmn}^{-1} el tensor de daño que puede escribirse como:

$$M_{ijmn}^{-1} = \delta_{im} \delta_{jn} - D_{ijmn} = \left[\sum_{c=1}^n k_c (C_{ijkl})_c \right] \left[C_{klmn}^o \right]^{-1} \quad (37)$$

y que, salvo en casos muy particulares, representa daño anisótropo.

EJEMPLO DE APLICACION

Se presentan a continuación, en la fig.1, las curvas tensión – deformación obtenidas para un material cargado inicialmente en tracción hasta producir cierto grado de daño, descargado y cargado luego en compresión más allá del umbral de daño. Se analizan tres casos: a) $\xi = \eta = 1$, b) $\xi = \eta = 0.5$ y c) $\xi = \eta = 0$ (no tiene en cuenta el carácter unilateral del daño).

Se observa que al invertir el sentido de la carga, en el caso a) se recupera la rigidez inicial, en el caso b) se recupera, en parte, la rigidez inicial y en el caso c) no se recupera la rigidez inicial. También se observa que al incurrir en daño en un sentido, se modifica el umbral de daño en el sentido opuesto. Esa modificación depende también de los valores adoptados para ξ y η y puede controlarse si se incorpora endurecimiento cinemático en la función de daño.

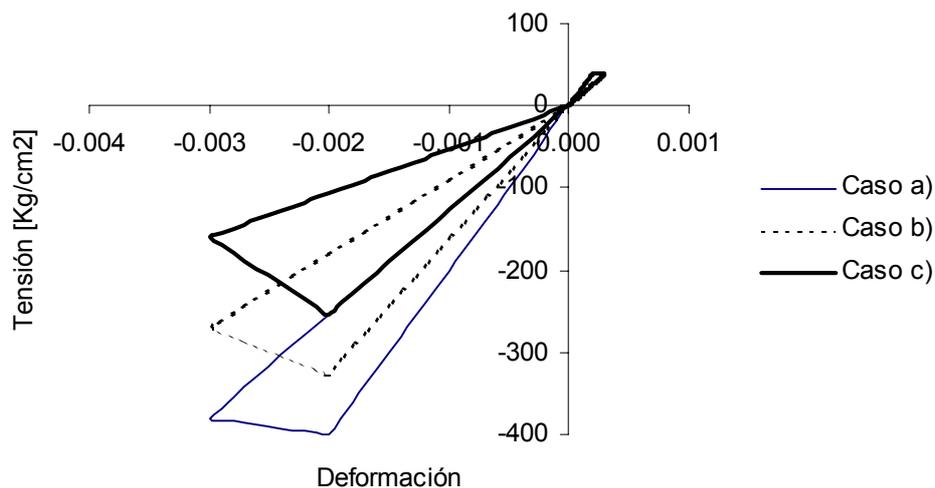


Fig.1 Curvas tensión-deformación para historias de carga uniaxiales con reversión del sentido de la carga

CONCLUSIONES

Se ha propuesto un modelo de daño unilateral que cumple con las condiciones de simetría del tensor de rigidez y continuidad del campo de tensiones y deformaciones para condiciones unilaterales. Como la condición de daño unilateral es introducida en un modelo de daño escalar se asegura la no existencia de disipación espuria en ciclos de carga que no producen daño adicional.

En el modelo propuesto el progreso del daño está regido por el estado de tensiones es por ello que la condición de daño y la regla de flujo del daño dependen del tensor de tensiones. Sin embargo, la activación o no del daño está relacionada con el estado de deformación.

El modelo reproduce adecuadamente la activación y desactivación del daño para historias con reversión del sentido de la carga.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico brindado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET – Argentina), para la realización del presente trabajo.

REFERENCIAS

- [1] J. L. Chaboche, Damage Induced Anisotropy: On the Difficulties Associated with Active/Passive Unilateral Condition, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol.1, No. 2, pp. 148-171, 1992
- [2] J. P. Cordebois and F. Sidoroff, Anisotropie Élastique Induite par Endommagement, *Euromech. 115*, Grenoble, Edition du CNRS, No. 295, 1979.
- [3] D. Krajcinovic and G.U. Fonseca, The Continuous Damage Theory of Brittle materials, Parts I and II, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 48, pp. 809-824, 1981.
- [4] M. Ortiz, A Constitutive Theory for Inelastic Behaviour of Concrete, *Mech. Mater.*, 4, 1985.
- [5] P. Ladeveze and J. Lemaitre.. Damage Effective Stress in Quasi-Unilateral Material Conditions, IUTAM Congress, Lyngby, Denmark. 1984
- [6] S. Andrieux., Y. Bamberger and J.J. Marigo, Un Modèle de Matériau microfissuré pour les betons et les roches, *J. Mécanique Théorique et Appliquée*, 5(3), pp. 471-513. 1986.
- [7] J. Mazars, A Model of Unilateral Elastic Damageable Material and its Application to Concrete, RILEM Int. Conf. Fracure Mechanics of Concrete, Lausanne; Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete, 1985, New York, Elsevier.
- [8] J.C. Simo, J. Ju, Stress and Strain Based Continuum Damage Models. Part I and II. *Int. J. Solids Structures* 23, 375-400. 1987.
- [9] J. Mazars and G. Pijaudier-Cabot, Continuum Damage Theory – application to concrete. *J. Engng. Mech. ASCE* 115, 354-365, 1989.
- [10] J. Ju, On energy-based coupled elastoplastic damage theories, *Int. J. Solids Structures* 25, 803-833, 1989
- [11] C. La Borderie, I. Berthaud, G. Pijaudier-Cabot, Crack Closure Effects in Continuum Damage Mechanics. Numerical implementation. In *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures* (Edited by Bicanic and H. Mang), Pineridge Press, Zell-am-See, 975-986, 1990.

- [12] J. L. Chaboche, Development of Continuum Damage Mechanics for Elastic Solids Sustaining Anisotropic and Unilateral Damage, *Int. Journal of Damage Mechanics*, Vol.2, pp.311-329, 1993.
- [13] J.L. Chaboche, A Continuum Damage Theory with Anisotropic and Unilateral Damage, *La Recherche Aéronautique*, No.2, 139-147, 1995.
- [14] I. Carol, K. Willam 1996. Spurious Energy Dissipation/Generation in Stiffness Recovery Models for Elastic Degradation and Damage, *Int. J. Solids Structures*, Vol.33, No.20-22, pp. 2939-2957, 1996.
- [15] B. Luccioni, S. Oller, R. Danesi, Coupled Plastic-Damaged Model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129, págs. 81-89, 1996.
- [16] L. M. Kachanov, Time of the rupture process under creep conditions. *IVZ Akad Nauk - S.S.R. - Otd Tech Nauk* 8 (1958).
- [17] J. Lubliner, On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Mechanics, *Int. Journal Non Linear Mechanics*, Vol.7, (1972), 237-254.
- [18] B.M. Luccioni, *Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos*. Thesis presented in partial fulfillment to the Ph.D - Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, 1993.
- [19] C. Truesdell and R. Toupin, *The classical field theories*. Ed. by S.Flugge - *Handbuch der Physik II/I* - Springer Verlag - Berlin, 1960.
- [20] M. Ortiz, *A Constitutive Theory for the Inelastic Behaviour of Concrete*, *Mechanics of Materials* 4, 1985, págs.67-93.
- [21] S. Oller, E. Oñate, J. Miquel, S. Botello, *A Plastic Damage Constitutive Model for Composite Materials*, *Int. J. Sol. Struc.*, Vol.3, No.17, 1996, págs. 2501-2518.