

## FORMULACIÓN CINEMÁTICA DEL DAÑO

**Bibiana Luccioni**

*Laboratorio de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología  
Universidad Nacional de Tucumán, CONICET  
CC 134. Correo Central (4000) S.M. de Tucumán, Argentina*

**Sergio Oller**

*Universidad Politécnica de Cataluña, Gran Capitan S/N, edificio C1, Campus Norte  
UPC, 08034 Barcelona, España*

### RESUMEN

En este trabajo se presenta una formulación de daño, basada en transformaciones de espacios, que permite tener en cuenta la anisotropía inicial e inducida. El modelo parte de suponer que existe un espacio ficticio no dañado que puede obtenerse del real si se quita el daño. Las tensiones y deformaciones en ambos espacios están relacionadas entre sí de la misma forma que lo están las tensiones y deformaciones en la configuración material y espacial en el problema de grandes deformaciones. Basándose en una generalización de la definición de daño escalar de Kachanov, se puede obtener un tensor de daño anisótropo de cuarto orden que resulta similar a las formas simetrizadas de dicho tensor encontradas en la bibliografía.

Debido a la similitud existente, el planteo puede extenderse de manera simple al caso de grandes deformaciones. La anisotropía inicial e inducida se trata a través del concepto de mapeo de espacios en el cual se admite la existencia de espacios ficticios isótropos en correspondencia con cada uno de los espacios definidos.

En primer lugar se describe el planteo cinemático del daño, luego la consideración de la anisotropía y su extensión al caso de grandes deformaciones. El trabajo se completa con un ejemplo conceptual de daño anisótropo que muestra la potencialidad del modelo propuesto.

### ABSTRACT

A damage model based on a space transformation and that takes into account initial and induced anisotropy is presented in this paper. The model is obtained by assuming that there exists a fictitious isotropic space that is obtained from the real one by removing the damage. Stresses and strains in both spaces are related in the same way as stresses and strains in material and space configurations in finite strain problems. Based on a generalization of the Kachanov's scalar damage definition a fourth order anisotropic damage tensor, similar to those symmetrizations found in the literature, can be obtained.

Due to the similarity existent, the proposed formulation can be simply extended for finite strains. Initial and induced anisotropy are considered through the space mapping concept in which there are supposed to exist fictitious isotropic spaces in correspondence with each one of the spaces defined.

First kinematic approach of damage is described, then it is extended to consider anisotropy and finite strains. The paper is completed with a conceptual application example for anisotropic damage that shows the potential of the proposed model.

## INTRODUCCION

La mecánica del daño continuo constituye una herramienta potente para la simulación del deterioro progresivo de las propiedades mecánicas de un material. Una forma de interpretar el daño continuo, muy utilizada por diferentes autores, consiste en la definición de un *espacio ficticio no dañado* que puede ser obtenido del espacio de tensiones y deformaciones reales a través de una transformación. Normalmente, la tensión en el espacio ficticio no dañado se denomina *tensión efectiva*.

Existen distintas hipótesis para definir las transformaciones entre el espacio dañado real y el espacio ficticio no dañado<sup>1</sup>:

Equivalencia de deformaciones<sup>2,3</sup> La deformación asociada con un estado dañado bajo la tensión aplicada es equivalente a la deformación asociada con el estado ficticio no dañado bajo la tensión efectiva

Equivalencia de energía<sup>3,4</sup>: La energía de deformación asociada con un estado dañado bajo la tensión aplicada es equivalente a la energía de deformación asociada con el estado ficticio no dañado bajo la tensión efectiva.

Relaciones de tipo cinemático<sup>1,5</sup> Partiendo de una relación cinemática entre el espacio ficticio no dañado y el espacio dañado real se encuentra que la deformación en dicho espacio es similar a la que se habría obtenido con la hipótesis de equivalencia de energía. Por otro lado, a partir de la definición del cambio de volumen entre ambos espacios y por analogía con las formas simetrizadas del tensor de daño anisótropo encontrados en la bibliografía, se encuentra la forma del tensor de transformación.

Por otro lado, se puede trabajar con transformaciones escalares, tensores de segundo o de cuarto orden, de acuerdo a la simetría del material y del daño. En principio, la forma más general de hacerlo es a través de un tensor de cuarto orden en el caso de las tensiones.

El procedimiento que se propone a continuación parte de suponer que las tensiones y deformaciones en los espacios real dañado y ficticio no dañado están relacionadas entre sí de la misma forma que lo están las tensiones y deformaciones en la configuración material y espacial respectivamente en el problema de grandes deformaciones. De esa forma, a partir de una generalización del concepto de tensión efectiva de Kachanov<sup>6</sup>, se llega a un tensor de transformación de tensiones de cuarto orden similar a las formas simetrizadas de dicho tensor encontradas en la bibliografía<sup>7,8</sup>

## TRANSFORMACION DE ESPACIOS

El planteo de daño que se utiliza en este trabajo parte de la hipótesis de que existen dos espacios : un espacio dañado real y un espacio ficticio no dañado que se obtiene del real si se quita el daño. Para establecer las relaciones entre tensiones y deformaciones en ambos espacios se utiliza una analogía con el problema de grandes deformaciones. Se define un *tensor gradiente de daño*  $m_{ij}$  de tal manera que:

$$\bar{S}_{ij} = m_{ik} S_{kl} m_{jl}^t \quad (1)$$

$$\bar{E}_{ij} = m_{ik}^{-t} E_{kl} m_{jl}^{-1} \quad (2)$$

Donde  $S_{kl}$  y  $\bar{S}_{ij}$  son las tensiones en los espacios real y ficticio respectivamente,  $E_{kl}$  y  $\bar{E}_{ij}$  son las deformaciones en los espacios real y ficticio respectivamente.

Las transformaciones definidas en ecs. (1) y (2) han sido representadas en la Fig.1.

Resulta entonces:

$$\bar{S}_{ij} = m_{ik} S_{kl} m_{jl}^t = m_{ik} C_{klmn} E_{mn} m_{jl}^t = m_{ik} C_{klmn} m_{rm}^t \bar{E}_{rs} m_{sn} m_{jl}^t = \bar{C}_{ijrs} \bar{E}_{rs} \quad (3)$$

$$\bar{C}_{ijkl} = m_{im} m_{jn}^t m_{kr}^t m_{ls} C_{mnr s} \quad (4)$$

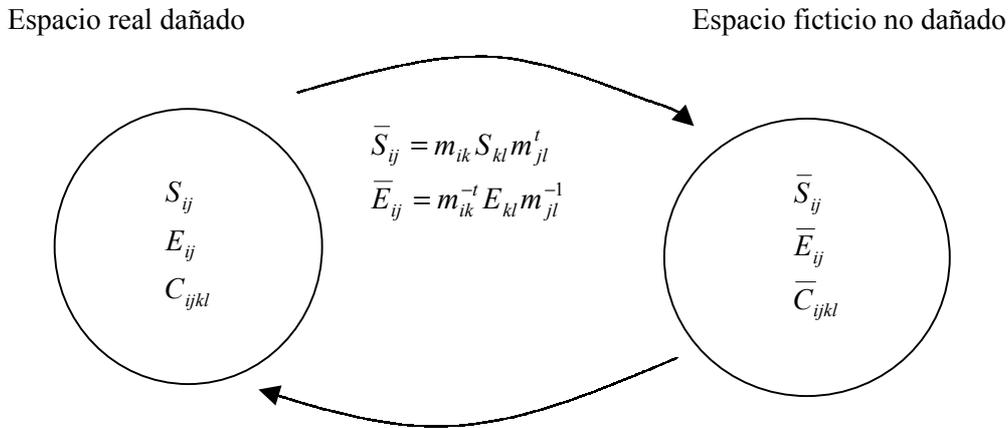


Fig.1 Representación del daño como transformación de espacios

O en forma condensada:

$$\bar{S}_{ij} = M_{ijkl} S_{kl} \quad (5)$$

$$\bar{E}_{ij} = M_{ijkl}^{-t} E_{kl} \quad (6)$$

$$\bar{C}_{ijkl} = M_{ijmn} C_{mnr s} M_{klrs}^t \quad (7)$$

Donde:

$$M_{ijkl} = m_{ik} m_{jl}^t \quad (8)$$

Es decir, que los tensores de tensión y deformación en ambos espacios están relacionados mediante un tensor de cuarto orden que, en realidad, es el producto de dos tensores de segundo orden. Por su parte, los tensores de rigidez en ambos espacios están relacionados mediante un tensor de transformación de octavo orden que puede escribirse como producto de cuatro tensores de segundo orden.

Calculando la energía de deformación:

$$W = \frac{1}{2} S_{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} M_{ijkl}^{-1} \bar{S}_{ij} M_{ijkl}^t \bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} \bar{S}_{ij} \bar{E}_{ij} \quad (9)$$

se puede ver que la relación propuesta entre las deformaciones de ambos espacios corresponde a la equivalencia de energía<sup>3,4</sup>.

Para definir el gradiente de daño  $m_{ij}$  se hace referencia a la idea original de daño de Kachanov<sup>6,9</sup>, en la cual el daño puede ser interpretado como una relación entre la superficie dañada y la superficie total (nominal) en un punto material. De acuerdo a esto, el área dañada puede escribirse como:

$$A = (1 - d) \bar{A} \quad (10)$$

donde  $\bar{A}$  es la superficie total nominal o área ficticia no dañada y  $d$  es el *daño* que varía entre cero y uno.

Partiendo de esta observación, es posible definir, a partir de la relación de áreas, al tensor gradiente de daño que es un tensor dual que relaciona las tensiones en ambos espacios. Por analogía con el problema de grandes deformaciones, el cambio de área está relacionado con el gradiente de daño de la siguiente forma<sup>10</sup>:

$$m_{ij}^{-1} = \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial A_j} \frac{1}{|m_{kl}|} \quad (11)$$

$$\text{En el caso de daño escalar resulta: } m_{ij} = (1-d)\delta_{ij}(1-d)^{-3/2} = \delta_{ij}(1-d)^{-1/2} \quad (12)$$

Reemplazando en las ec. (11) y (1), se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial A_j} = m_{ij}^{-1} |m_{kl}| = \delta_{ij} (1-d)^{1/2} (1-d)^{-3/2} = \delta_{ij} (1-d)^{-1} \quad (13)$$

$$\bar{S}_{ij} = m_{ik} S_{kl} m_{jl}^t = \frac{1}{1-d} \delta_{ik} \delta_{jl} S_{kl} \quad (14)$$

Que coinciden con las expresiones propuestas por Kachanov<sup>6</sup> para el caso de daño isótropo.

El razonamiento anterior puede ser generalizado al caso de daño anisótropo. Para ello, es necesario admitir que existen ciertas direcciones, que se denominan direcciones principales de daño, tales que, respecto de ellas, el tensor gradiente de daño resulta diagonal. Para esas direcciones, la relación entre áreas dada por ec.(13) se puede generalizar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \hat{A}_i}{\partial \hat{A}_j} = \hat{m}_{ij}^{-1} |\hat{m}_{kl}| = (\delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{jk} d_k)^{1/2} [(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)]^{-1/2} \quad (15)$$

Donde  $d_k$ , tal que  $0 \leq d_k \leq 1$ , es el daño en la dirección principal de daño  $k$  y el símbolo “ $\hat{\phantom{x}}$ ” indica que los tensores están referidos a las direcciones principales de daño.

$$\text{De la ec. (15) puede obtenerse: } \hat{m}_{ij} = (\delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{jk} d_k)^{-1/2} \quad (19)$$

El tensor de daño resulta en este caso:

$$\hat{M}_{ijkl} = \hat{m}_{ik} \hat{m}_{il}^t = (\delta_{ik} - \delta_{ir} \delta_{kr} d_r)^{-1/2} (\delta_{jl} - \delta_{js} \delta_{ls} d_s)^{-1/2} = (\delta_{ik} - d_{ik})^{-1/2} (\delta_{jl} - d_{jl})^{-1/2} \quad (16)$$

$$\text{donde: } d_{ik} = \delta_{ir} \delta_{kr} d_r \quad (17)$$

Estos tensores están referidos a las direcciones principales de daño,  $\hat{x}_k$ . Referidos a un sistema de coordenadas  $x_i$  cualquiera resultan:

$$m_{ij} = a_{ik} a_{jl} \hat{m}_{kl} \quad M_{ijkl} = m_{ik} m_{jl} = a_{im} a_{kn} \hat{m}_{mn} a_{jr} a_{ls} \hat{m}_{rs}^t = a_{im} a_{kn} a_{jr} a_{ls} \hat{M}_{mrns} \quad (18)$$

$$\text{Donde: } a_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_k} \quad (19)$$

En la bibliografía sobre daño anisótropo se encuentran distintas formas de definir las direcciones principales de daño<sup>11</sup>: coincidentes con las direcciones principales de tensión, coincidentes con las direcciones principales de deformación o direcciones principales del tensor de daño  $M_{ijkl}$ . Si bien la última alternativa pareciera ser la más adecuada, tiene el problema de que, en general, lo que se establecen son las formas de evolución de  $\hat{M}_{ijkl}$  y no de  $M_{ijkl}$ . En este trabajo se adoptan como direcciones principales de daño las direcciones principales de tensión.

Una observación importante de realizar es que la forma obtenida para el tensor de daño es similar a las formas simetrizadas del mismo tensor propuestas siguiendo caminos distintos por otros autores<sup>7,8</sup>:

$$M_{ijkl} = (\delta_{ik} - \phi_{ik})^{-1/2} (\delta_{jl} - \phi_{jl})^{-1/2} \quad (20)$$

Para completar la presente formulación es necesario definir una regla de evolución del daño. Por analogía con el problema de plasticidad, se puede definir dicha evolución a través de una regla de flujo. En este caso, lo más simple es suponer que el daño crece en las direcciones principales de tensión en forma proporcional a los valores absolutos de las tensiones principales.

$$\delta_{is} \delta_{js} \dot{d}_s = \lambda |a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}| \quad (21)$$

El umbral de daño se describe mediante una función de daño como sigue<sup>12,13</sup>:

$$G^D = g^D(\sigma_{ij}) - f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d) \leq 0 \quad (22)$$

donde  $g^D(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente,  $f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d)$  es el umbral de daño equivalente y  $\kappa^d$  es la variable interna de degradación que es una forma normalizada de la energía disipada en daño<sup>12,13</sup>.

Las condiciones de carga/descarga para los procesos plásticos y de daño se derivan de las relaciones de Khun-Tucker :

$$\begin{cases} a) \dot{\lambda} \geq 0 \\ b) G^D \leq 0 \\ c) \dot{\lambda} G^D = 0 \end{cases}$$

## ANISOTROPIA

El planteo anterior tiene en cuenta la anisotropía inducida por el daño ya que utiliza un tensor de daño de cuarto orden que resulta de considerar que el daño evoluciona de manera distinta en las tres direcciones principales de daño. Una manera conveniente de trabajar, que permite además tener en cuenta la anisotropía inicial, es admitir que para cada uno de los espacios definidos en la Fig.1 existe un espacio isótropo ficticio equivalente<sup>12, 14,15</sup>. Ese espacio isótropo ficticio se relaciona con el espacio anisótropo correspondiente a través de un tensor de cuarto orden de mapeo de espacios<sup>12, 14, 15</sup> como se indica en la Fig.2.

En el espacio isótropo ficticio la función umbral de daño resulta isótropa. La ec.(22) puede escribirse como:

$$G^D(\sigma_{ij}, \kappa^d) = G^D(A_{ijkl}^s{}^{-1} \tilde{\sigma}_{kl}, \kappa^d) = \tilde{G}^D(\tilde{\sigma}_{ij}, \kappa^d) \quad (23)$$

Donde  $\tilde{G}^D(\tilde{\sigma}_{ij}, \kappa^d)$  es una función isótropa de  $\tilde{\sigma}_{ij}$ .

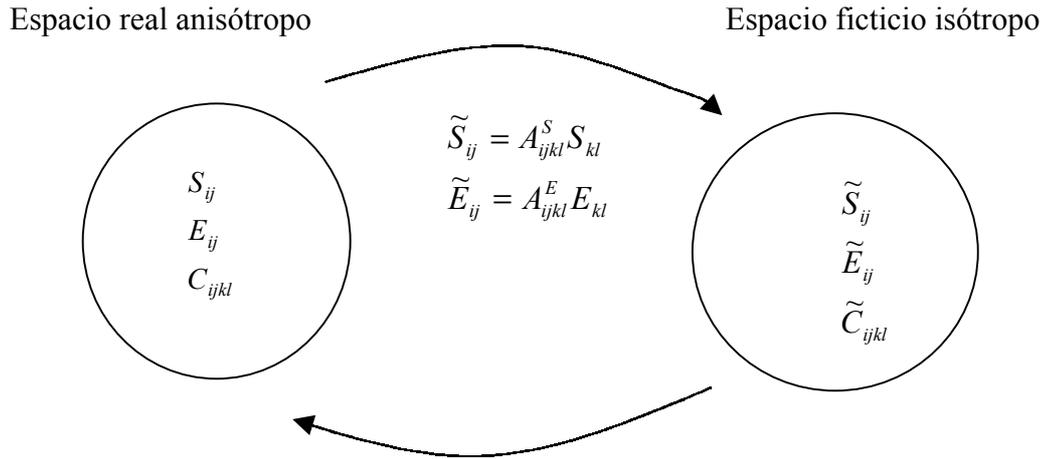


Fig.2 Mapeo de espacios para tener en cuenta la anisotropía

Teniendo en cuenta estas transformaciones, el esquema de la fig.1 se puede ampliar como se indica en la fig.3 donde:  $A^S$  y  $A^E$  son los tensores de transformación de tensiones y deformaciones del espacio dañado real al espacio isótropo ficticio dañado y tienen en cuenta toda la anisotropía.  $\bar{A}^S$  y  $\bar{A}^E$  son los tensores de transformación de tensiones y deformaciones del espacio ficticio no dañado al espacio isótropo ficticio no dañado. Tienen en cuenta sólo la anisotropía inicial y se calculan como:

$$\bar{A}^S_{ijkl} = \tilde{f}_{ij} \tilde{f}_{kl}^{-1} \quad (24)$$

$$\bar{A}^E_{ijkl} = \tilde{C}^{-1}_{ijrs} \bar{A}^S_{rsmn} \bar{C}_{mnkl} \quad (25)$$

Donde  $\tilde{f}_{ij}$ ,  $\tilde{f}_{kl}$ ,  $\tilde{C}_{ijrs}$ ,  $\bar{C}_{mnkl}$  representan los tensores de resistencia y rigidez del material no dañado ficticio isótropo y anisótropo real y son un dato de partida. Relacionando las tensiones en los distintos espacios se obtiene:

$$\bar{S}_{ij} = (\bar{A}^S_{ijkl})^{-1} \tilde{S}_{kl} = (\bar{A}^S_{ijkl})^{-1} \tilde{m}_{kr} \tilde{S}_{rs} \tilde{m}_{ls}^t = (\bar{A}^S_{ijkl})^{-1} \tilde{m}_{kr} A^S_{rsmn} S_{mn} \tilde{m}_{ls}^t = m_{im} S_{mn} m_{jn}^t \quad (26)$$

De donde:

$$A^S_{ijkl} = \tilde{M}^{-1}_{ijmn} \bar{A}^S_{mnr} M_{rskl} \quad (27)$$

En la ec. (27) se supone que:

$$\tilde{M}_{ijkl} = \tilde{m}_{ik} \tilde{m}_{jl}^t = \delta_{ik} \delta_{jl} (1-d)^{-1} \quad (28)$$

Donde  $d$  es el daño isótropo equivalente que se calcula igualando la disipación en los espacios (1) y (3).

La ec.(28) que implica que en los espacios isótropos ficticios el daño también es isótropo, es una restricción fuerte del modelo ya que condiciona la forma de la superficie límite daño a la evolución del daño. La ec.(27) resulta menos restrictiva si se admite que existen  $n$  espacios isótropos ficticio cada uno con su superficie de daño isótropo, de modo que que la superficie de daño en el espacio real es una combinación de los mapeos de esas superficies<sup>16</sup>

## GRANDES DEFORMACIONES

Las relaciones entre espacios establecidas en Fig.3 se refieren al caso de pequeñas deformaciones. En el caso de grandes deformaciones el planteo se podría extender como se ilustra en la Fig.4, de forma similar a la planteada por Voyiadjis<sup>1,5</sup>. En dicha figura, el espacio (3) se obtiene quitando ficticiamente el daño de la configuración inicial. El tensor  $m_{ij}^o$  tiene en cuenta el daño inicial. Los espacios (1) y (2) se relacionan entre sí a través del tensor gradiente

de deformación  $F_{iJ}$ . El espacio (4) se obtiene a partir del (2) quitando ficticiamente el daño para lo que utiliza el tensor gradiente de daño  $m_{ij}$  y las relaciones expresadas en ec.(1). Los espacios (3) y (4) están relacionados entre sí mediante un tensor gradiente de deformación ficticio (sin daño)  $\bar{F}_{iI}$  que constituye un gradiente de deformación elástico porque relaciona dos espacios no dañados.  $A_o^S$  y  $A_o^E$  Están relacionados con la anisotropía inicial, provocada por la estructura interna del material y el daño previo. Si el material es inicialmente isótropo y tiene sólo daño isótropo, son ambos iguales al tensor identidad.  $\bar{A}_o^S$  y  $\bar{A}_o^E$  están relacionados con la anisotropía inicial debida a la estructura inicial del material y son, por tanto, constantes.  $\tilde{m}_o$  es el gradiente de daño inicial de tipo isótropo y  $\tilde{m}$  es el gradiente de daño de tipo isótropo y varía a medida que evoluciona el daño.  $A^S$  y  $A^E$  tienen en cuenta la anisotropía total. tienen en cuenta la anisotropía inicial y la producida por la deformación

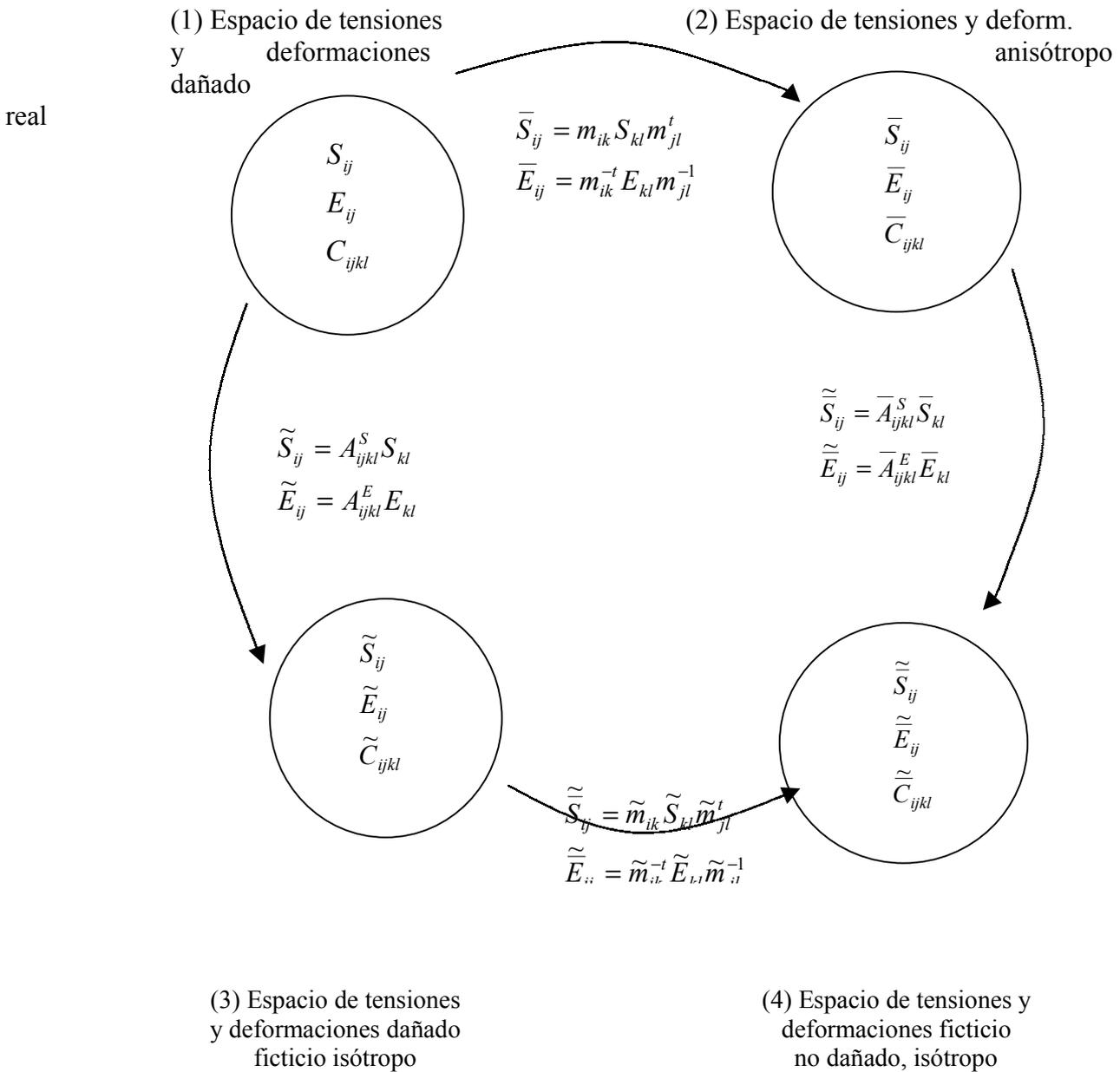


Fig.3 Transformaciones de espacios para tener en cuenta la anisotropía y el daño

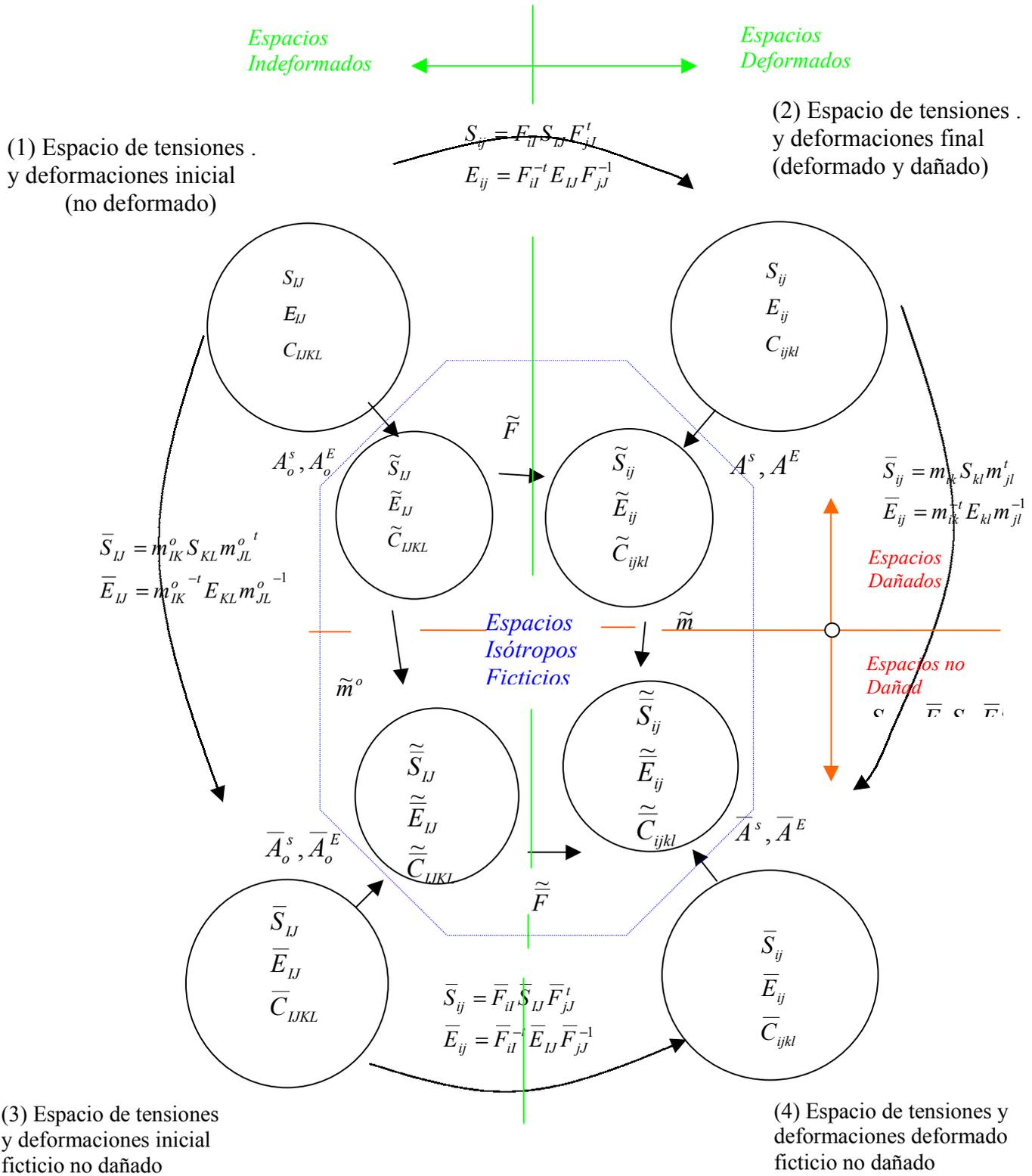


Fig.4 Transformación de espacios en el caso de grandes deformaciones  
 ~ : Ficticio isótopo      Subínd. Mayúsc.: Indeformado  
 \_ : Ficticio no dañado      Subínd. Minúsc.: Deformado

Relacionando los distintos espacios entre sí, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\bar{A}_{ijmn}^S = \tilde{F}_{il} \tilde{F}_{jt} \bar{A}_{ijkl}^{So} \bar{F}_{mk}^{-1} \bar{F}_{nl}^{-t} \quad \text{y} \quad A_{ijmn}^S = \tilde{F}_{il} \tilde{F}_{jt} A_{ijkl}^{So} F_{mk}^{-1} F_{nl}^{-t} \quad (29)$$

que pueden interpretarse como ecuaciones de transformación del tensor de mapeo de anisotropía inicial

### EJEMPLO DE APLICACION

A continuación se muestran las curvas tensión deformación obtenidas para un material inicialmente isotrópico sin endurecimiento, cuando se carga al material en una dirección, se descarga y luego se vuelve a cargar en una dirección perpendicular a la primera carga. El problema se resuelve en pequeñas deformaciones considerando: a) un espacio isotrópico ficticio y b) dos espacios isotrópicos ficticios<sup>16</sup>. En la fig.5 se presentan las curvas tensión-deformación correspondientes. Puede observarse que el material pierde más rigidez en la dirección de la carga que en la dirección perpendicular, lo cual es coincidente con lo que se observa experimentalmente en la mayoría de los materiales compuestos.

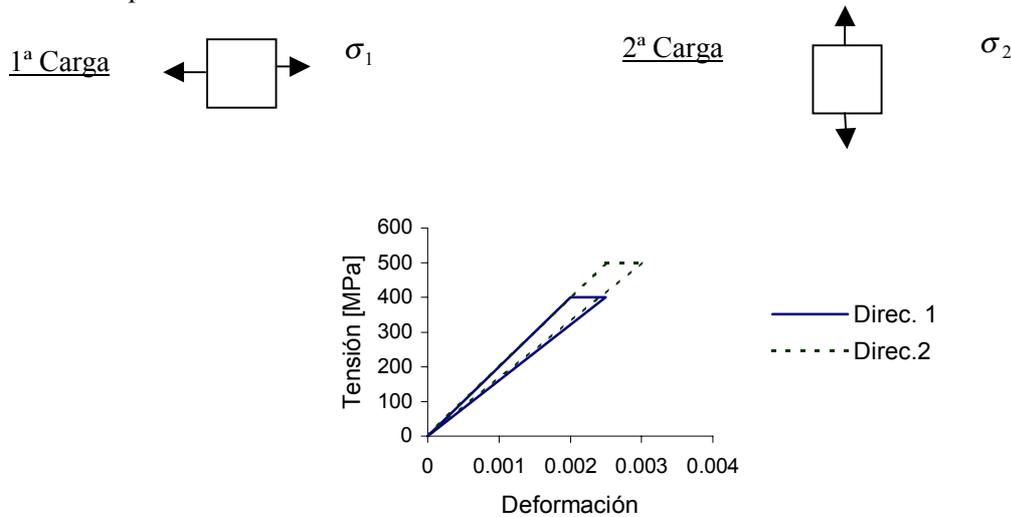
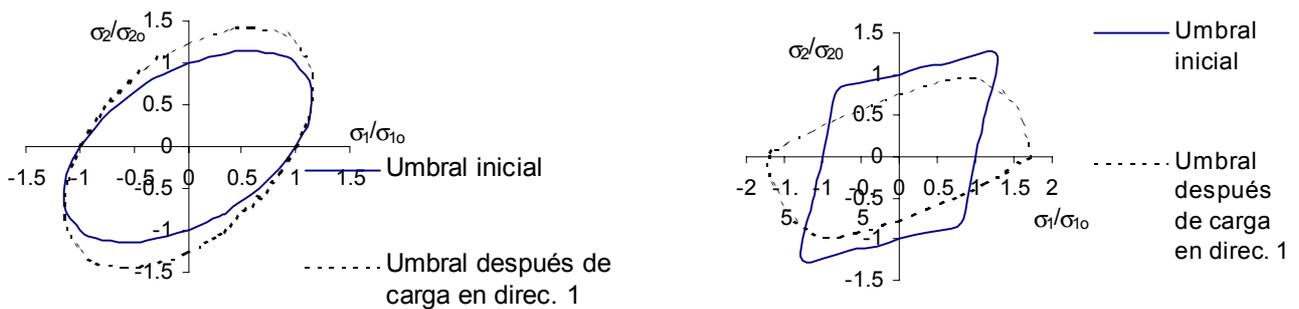


Fig. 5 Diagramas tensión-deformación



a) Un espacio ficticio isotrópico

b) Dos espacios ficticios isotrópicos

Fig. 6 Umbral inicial y dañado (Von Mises)

En las figs.5 se muestra también que al cargar en una dirección y dañar en la misma, se modifica el umbral de daño en la dirección perpendicular. Este efecto también puede observarse en las figs. 6, en donde se representan las curvas que definen el umbral inicial de daño y las correspondientes al umbral de daño luego de cargar en la dirección principal 1 para las dos opciones analizadas. La opción (b) se ajusta más a los resultados experimentales en el caso de compuestos de matriz cerámica<sup>17</sup>.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación cinemática del daño basada en una analogía con el problema de grandes deformaciones lo que hace posible extender el planteo a deformaciones finitas en forma sencilla. Dicha formulación permite tener en cuenta la anisotropía inicial e inducida.

El tensor de daño anisótropo surge de una generalización de las relaciones de áreas propuestas por Kachanov y resulta simétrico y similar a las simetrizaciones de otras formas de daño propuestas en la bibliografía. A través del método de mapeo propuesto, es posible trabajar siempre en espacios isotrópicos ficticios. Se deben estudiar más a fondo la forma de definir dichos espacios para asegurar que la superficie umbral de daño evolucione de acuerdo al comportamiento real de cada material.

Se debe profundizar más en el problema de grandes deformaciones

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico brindado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET – Argentina), para la realización del presente trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] G.Z. Voyiadjis and T. Park, Kinematics of Large Elastoplastic Damage Deformation, *Damage Mechanics in Engineering Materials*, G. Z. Voyiadjis, J.W.W. Ju and J. L. Chaboche (Eds.), Elsevier Science, pp. 45-63, 1998.
- [2] J. Lemaitre and J.L. Chaboche, Aspecta Phenoménologique de la Rupture par Endommagement, *Journal of Mecanique Théorique et Appliquée*, pp.317-365, 1978.
- [3] J. W. Ju, On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects, *Int. Journal Solids Structures* Vol.25, No.7 803-833, 1989.
- [4] F.Sideroff, Description of Anisotropic Application to Elasticity, *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, J.Hult and J. Lemaitre eds. IUTAM Series, Springer-Verlag, New York, pp.237-244, 1980.
- [5] T. Park and G.Z. Voyiadjis, Kinematic Description of Damage, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.65, pp. 93-98, 1998.
- [6] L. M. Kachanov, Time of the rupture process under creep conditions. *IVZ Akad Nauk - S.S.R. - Otd Tech Nauk* 8, 1958.
- [7] J. P. Cordebois and F. Sidoroff, Damage Induced Elastic Anisotropy, *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, Colloque Euromech 115, J.P. Boehler, de., Villard de Lans, Martinus Nijhoff, Dordrecht, The Netherlands, pp.761-774, 1979.
- [8] H. Lee, G. Li, S. Lee, The Influence of Anisotropic Damage Mechanics on the Elastic Behavior of Materials, *International Seminar on Local Approach of Fracture*, Moret-sur-Loing, France, pp.79-90, 1986.
- [9] J.C. Simo, J. Ju, Stress and Strain Based Continuum Damage Models. Part I and II. *Int. J. Solids Structures* 23, 375-400. 1987.
- [10] L. Malvern, *Introduction to the Mechanics of Continuos Medium*. Prentice Hall,U.S.A, 1969.
- [11] J. L. Chaboche, Development of Continuum Damage Mechanics for Elastic Solids Sustaining Anisotropic and Unilateral Damage, *Int. Journal of Damage Mechanics*, Vol.2, pp.311-329, 1993.
- [12] B. Luccioni, Formulaci3n de un modelo constitutivo para materiales ort3tricos. PhD. tesis - Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, 1993.
- [13] B. Luccioni, S. Oller, R. Danesi, Coupled Plastic-Damaged Model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129, págs. 81-89, 1996.

- 
- [14] S. Oller, S. Botello, J. Miquel and E. Oñate, E., An anisotropic elasto-plastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computation*, Vol.12, págs. 245-262, 1993.
- [15] B. Luccioni, P. Martín, Modelo Elastoplástico para Materiales Ortótropos, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol.13, N°4, págs. 603-614, 1997.
- [16] P.Martín, and B. Luccioni, Initial And Induced Anisotropy In Elastoplastic-Damaged Models For Composites. *Fourth World congress on Computational Mechanics, Abstracts, Volume I*, pp. 587, 1998.
- [17] Marie, J.F., Lesne, P.M., A Damage Model for Ceramic Matrix Composites, *Aerospace Science and Technology*, n°4, págs. 259-266, 1997.