

INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA PARA EL MODELO DE CAM-CLAY

Francisco R. Segura, Bibiana M. Luccioni*, Rodolfo F. Danesi*

*Laboratorio de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, *CONICET
CC. 134 . Correo Central. (4000) S.M. de Tucumán . Argentina*

RESUMEN

En un principio los modelos *Cam-clay* se desarrollaron para ser aplicados a las arcillas normalmente consolidadas o ligeramente sobreconsolidadas, sin embargo han tenido considerable éxito por su capacidad de modelar las características más importantes de muchos suelos en base a hipótesis sencillas y con pocos parámetros. La integración de la ecuación constitutiva correspondiente al modelo presenta algunas dificultades adicionales respecto a la de los modelos plásticos clásicos. En este trabajo se propone un algoritmo de tipo retorno mapeado para la integración de dicha ecuación. El mismo se implementa en un programa de elementos finitos plano, para problemas con no linealidad física. Con dicho programa se resuelven ejemplos de aplicación y se comparan los resultados con los obtenidos experimentalmente o con otros algoritmos de integración.

En primer lugar se describe brevemente el modelo de *Cam-clay*. A continuación se presenta el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva propuesto y se esquematiza el proceso de cálculo. Se desarrolla, además, la expresión del módulo tangente. Finalmente, se presentan ejemplos de aplicación que prueban la validez del algoritmo propuesto.

ABSTRACT

At the beginning *Cam-clay* models were developed to be applied to normally consolidated or lightly overconsolidated clays. However, they have been quite successful due to their capacity to model more important characteristics of many soils based on simple hypothesis and with few parameters. Integration of the constitutive equation corresponding to the model presents some additional difficulties with respect to those of classical plastic models. A return mapping algorithm for the integration of the cam-clay model is proposed in this paper. This algorithm is implemented in 2D finite element program for physical non linear problems. Application examples are solved with this program and the results are compared with experimental ones or with those obtained with other integration algorithms.

First, *Cam-clay* model is briefly described. Then the integration algorithm proposed is presented and the calculation process is outlined. The expression of the tangent module is also developed. Finally, application examples that prove the validity of the proposed algorithm are presented.

INTRODUCCION

El estudio del comportamiento de los suelos presenta ciertas complejidades comparado con el de otros materiales, principalmente debido a que los suelos están formados por partículas. Entre los modelos empleados para suelos más utilizados se encuentra el de *Mohr – Coulomb* y el de *Drucker – Prager*. Sin embargo, tanto el criterio de *Mohr – Coulomb* como el de *Drucker Prager*, constituyen modelos incompletos para el análisis de la fluencia de suelos (Brito and Gun¹).

Cuando un suelo es ensayado, el camino de tensiones atraviesa progresivos estados de fluencia antes de alcanzar el de colapso, lo que da lugar a deformaciones plásticas. La fluencia continúa hasta que el material alcanza un valor de relación de vacíos a partir del cual permanece constante, es decir se alcanza un estado de acomodamiento de las

partículas tal que ningún cambio de volumen tiene lugar durante el corte. Este particular valor de la relación de vacíos es el que se denomina como “relación de vacíos crítica”.

Los modelos de *estado crítico* abrieron el camino a la aplicación con éxito de la *teoría de la plasticidad* para la modelación del comportamiento mecánico de los suelos saturados. Los primeros en presentar un modelo de estas características fueron Roscoe, Schofield y Wroth² en 1958 que propusieron un modelo en el cual se produce la rotura elástica del suelo para un volumen específico crítico. Se considera que la rotura se lleva a cabo cuando la combinación del esfuerzo efectivo ($\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$) y el volumen específico (v) coincide con una “superficie límite de estado”. Esta superficie límite se puede ser considerada como una analogía tridimensional de una envolvente de falla, como por ejemplo la de Mohr–Coulomb. Con posterioridad aparecieron otros modelos como el *Granta-gravel*, el *Cam-clay* (Roscoe y Schofield³) y (Schofield y Wroth⁴) y el *Cam-clay modificado* (Roscoe y Burland⁵).

En un principio, los modelos *Cam-Clay* se desarrollaron para ser aplicados a las arcillas normalmente consolidadas o ligeramente sobreconsolidadas, sin embargo han tenido considerable éxito por su capacidad de modelar las características más importantes de muchos suelos sobre la base de hipótesis sencillas y con pocos parámetros.

En la actualidad es común encontrar este modelo disponible en programas de elementos finitos como ser: ABAQUS⁶, PAK⁷, CRISP⁸, etc. En cada uno de ellos se aplican distintos algoritmos de integración de la ecuación constitutiva. En este trabajo se propone un algoritmo de tipo retorno mapeado para la integración de dicha ecuación. El mismo se implementa en un programa de elementos finitos plano, para problemas con no linealidad física.

MODELO DE CAM – CLAY

Comportamiento Tensión - Deformación

Para un ensayo de compresión triaxial, se definen la tensión normal promedio “ p ” y a la tensión desviadora de corte “ q ” en función de las tensiones principales de la siguiente forma:

$$p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 \quad (1)$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (2)$$

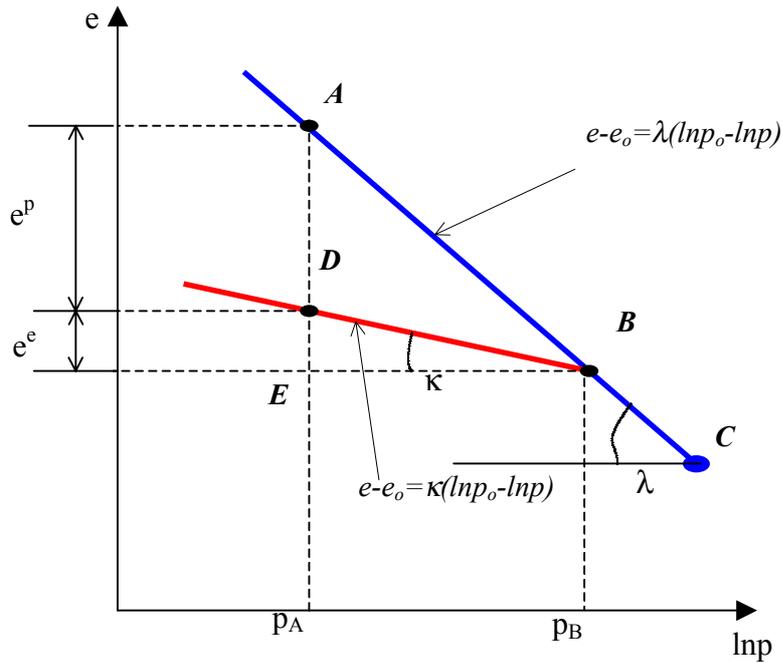
En la figura 1 se muestra la curva e (relación de vacíos) vs $\ln p$ (logaritmo de la tensión normal promedio) de una arcilla saturada normalmente consolidada sometida a compresión hidrostática. Partiendo de A la carga hidrostática sigue el camino $A-B$. Si en B se realiza la descarga hasta la presión media p_A , debido a la naturaleza elastoplástica, el camino de descarga es $B-D$. Cuando el material es recargado desde la presión p_A a p_B , el camino de recarga coincide con el de descarga, $D-B$, indicando un comportamiento elástico.

El cambio total de la relación de vacíos e durante el ciclo de carga y descarga vendrá dado por:

$$e = e_A - e_B = \lambda \ln \left(\frac{p_B}{p_A} \right) = \lambda (\ln p_B - \ln p_A) \quad (3)$$

$$e^e = e_D - e_D = \kappa \ln \left(\frac{p_B}{p_A} \right) = \kappa (\ln p_B - \ln p_A) \quad (4)$$

Donde λ y κ indican las pendientes de los caminos de carga y descarga y recarga respectivamente y el superíndice e indica que se trata de la componente elástica.

Fig. 1 Ensayo de Consolidación, e vs. $\ln p$

Diferenciando las dos expresiones (3) y (4), se tiene:

$$de = -\lambda \frac{dp}{p} \quad (5)$$

$$de^e = -\kappa \frac{dp}{p} \quad (6)$$

La componente plástica de la variación en la relación de vacíos vendrá dada por:

$$de^p = de - de^e = -(\lambda - \kappa) \frac{dp}{p} \quad (7)$$

La deformación volumétrica puede expresarse como: se considera negativa la deformación de compresión:

$$d\varepsilon_v = -\frac{de}{1+e_o} = \frac{\lambda}{1+e_o} \frac{dp}{p} \quad (8)$$

$$d\varepsilon_v^e = -\frac{de^e}{1+e} = \frac{\kappa}{1+e} \frac{dp}{p} \quad (9)$$

El comportamiento tensión – deformación basado en el estado crítico, se asume que en el punto crítico la energía asociada con la distorsión no se recupera (o sea $d\varepsilon_s^e = 0$). Se tiene entonces:

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_s^p \quad d\varepsilon_v^p = 0 \quad (10)$$

En cualquier otro punto, considerando flujo asociado, la dirección del incremento de la deformación plástica se obtiene a partir de:

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} = -\frac{dp}{dq} \quad (11)$$

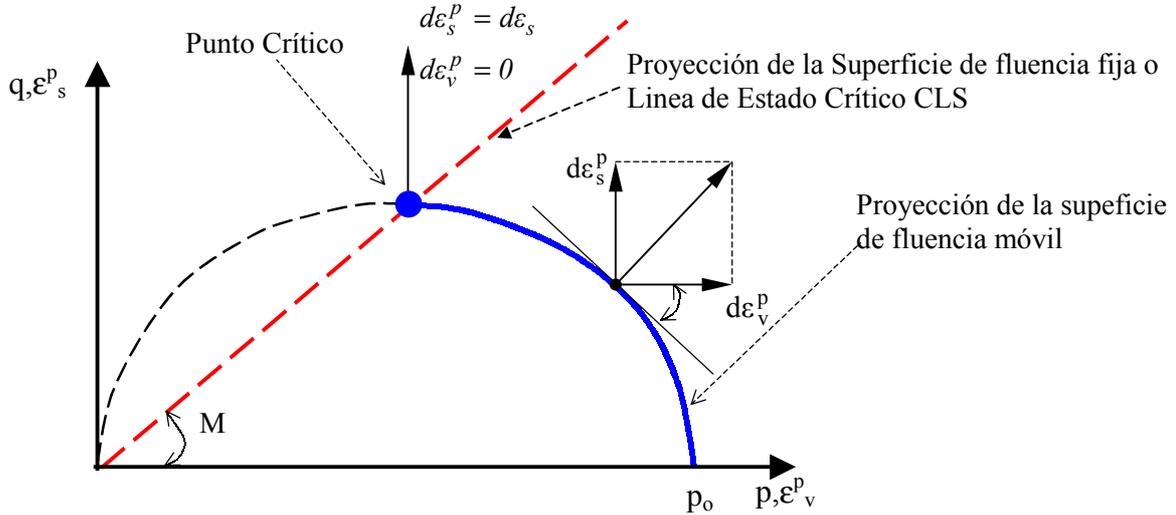


Fig. 2. Curva de Fluencia en el plano p vs. q .

Curva de fluencia

Definiendo la relación de tensiones:

$$\eta = \frac{q}{p} \quad (12)$$

diferenciando y llamando:

$$\frac{dq}{dp} = -\psi \quad (13)$$

Resulta:

$$\frac{dp}{p} + \frac{d\eta}{\eta + \psi} = 0 \quad (14)$$

Las sucesivas curvas de fluencia son geoméricamente similares por lo que ψ es sólo función de η y cualquier curva de fluencia que pase por un punto conocido puede ser obtenida integrando la última expresión:

$$\ln p - \ln p_o + \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta + \psi} = 0 \quad (15)$$

La expresión (15) representa una curva de fluencia que pasa por el punto $(p_o, 0)$, siendo p_o el parámetro de endurecimiento.

La relación ψ puede ser obtenida considerando la energía disipada por deformación en un punto de la superficie límite. En el modelo de Cam Clay se supone que la energía disipada dW está dada por:

$$dW = M p d\varepsilon_s \quad (16)$$

Donde M es la pendiente de la línea de estado crítico, ver figura 2.

Mientras que para el modelo de Cam Clay modificado, la energía disipada viene dada por:

$$dW = p\sqrt{(d\varepsilon_v^p)^2 + M^2(d\varepsilon_s^p)^2} \quad (17)$$

Teniendo en cuenta la expresión de la cantidad de trabajo que se realiza en cualquier punto:

$$pd\varepsilon_v^p + qd\varepsilon_s^p = dW \quad (18)$$

Es posible obtener ψ_{cm} para el modelo Cam clay modificado. Se puede llegar así a la siguiente expresión para la función de fluencia.

$$F = M^2 p^2 - M^2 p_o p + q^2 = 0 \quad (19)$$

Esta expresión representa la ecuación de una elipse en un sistema $p - q$.

EXPRESIÓN DEL MÓDULO TANGENTE

La ecuación constitutiva tangente se expresa como: $\sigma = C_T^{ep} \varepsilon$ (20)

Utilizando la condición de consistencia plástica, se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij} = \left[\underbrace{C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} C_{rskl}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} - \frac{\partial F}{\partial p_o} \frac{\partial p_o}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ii}}}}_{C_T^{ep}} \right] \varepsilon_{kl} \quad (21)$$

Donde:

C_{ijkl} : Es la matriz tangente elástica:

$$\frac{dp_o}{d\varepsilon_v^p} = -\left(\frac{1 + e_o}{\lambda - \kappa} \right) p \quad (22)$$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \frac{M^2}{3} \left(\frac{2}{3} J_1 - p_o \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_o} = -M^2 \frac{J_1}{3} \quad (24)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ii}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ii}} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ii}} = M^2 \left(\frac{2}{3} J_1 - p_o \right) + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (25)$$

Para el caso en que $J_1/3 > p_0/2$, para obtener la expresión del módulo tangente en este sector, se aplica la condición de estado crítico dada por la expresión (10), de acuerdo a la cual se obtiene: $C_{ijrs}^T = C_{ijkl} \frac{\delta_{kl}}{3} \delta_{rs}$ (26)

TRATAMIENTO NUMÉRICO

Método de Integración de Tensiones

En este trabajo se aplica el “Método de Retorno Mapeado” (B. Luccioni⁹) para la integración de la ecuación constitutiva. Este método tiene la ventaja, frente a otros, de que se formula sólo en términos de la función de fluencia, la normal a la misma, la dirección de flujo plástico y el módulo elástico tangente, sin necesidad de recurrir a sus gradientes, y presenta una tasa de convergencia cuadrática. Fue presentado por De Borst¹⁰ y deducido por Ortiz y Simo¹¹ a partir de una descomposición aditiva de la tensión en una parte elástica y otra parte plástica y difiere del resto de los algoritmos de retorno mapeado en la forma en que las tensiones, predecidas elásticamente, son relajadas.

En primer lugar, se integran las ecuaciones elásticas para obtener un predictor elástico que es tomado como condición inicial para las ecuaciones plásticas. Estas últimas definen un corrector plástico mediante el cual las tensiones obtenidas elásticamente son relajadas hasta una superficie de fluencia adecuadamente actualizada en forma iterativa. Es un algoritmo eficiente y capaz de trabajar con modelos muy generales.

Para computar el camino de retorno se usa el siguiente procedimiento: En cada iteración se linealiza la función de fluencia alrededor de los valores actuales de las variables de estado: $(\sigma_{ij})_{n-1}$, $(\alpha_i)_{n-1}$.

$$F((\sigma_{ij})_n, (\alpha_i)_n) = F((\sigma_{ij})_{n-1}, (\alpha_i)_{n-1}) + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right\}_{n-1} [(\sigma_{kl})_n - (\sigma_{kl})_{n-1}] + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \right\}_{n-1} [(\alpha_k)_n - (\alpha_k)_{n-1}] \quad (26)$$

Además:

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma^e_{ij})_n - \Delta\lambda_n C^s_{ijkl} \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right]_{n-1} \quad (27)$$

$$(\alpha_i)_n = (\alpha_i)_{n-1} + \Delta\lambda_n [H_i]_{n-1} \quad (28)$$

Reemplazando en la ecuación (26) y haciendo:

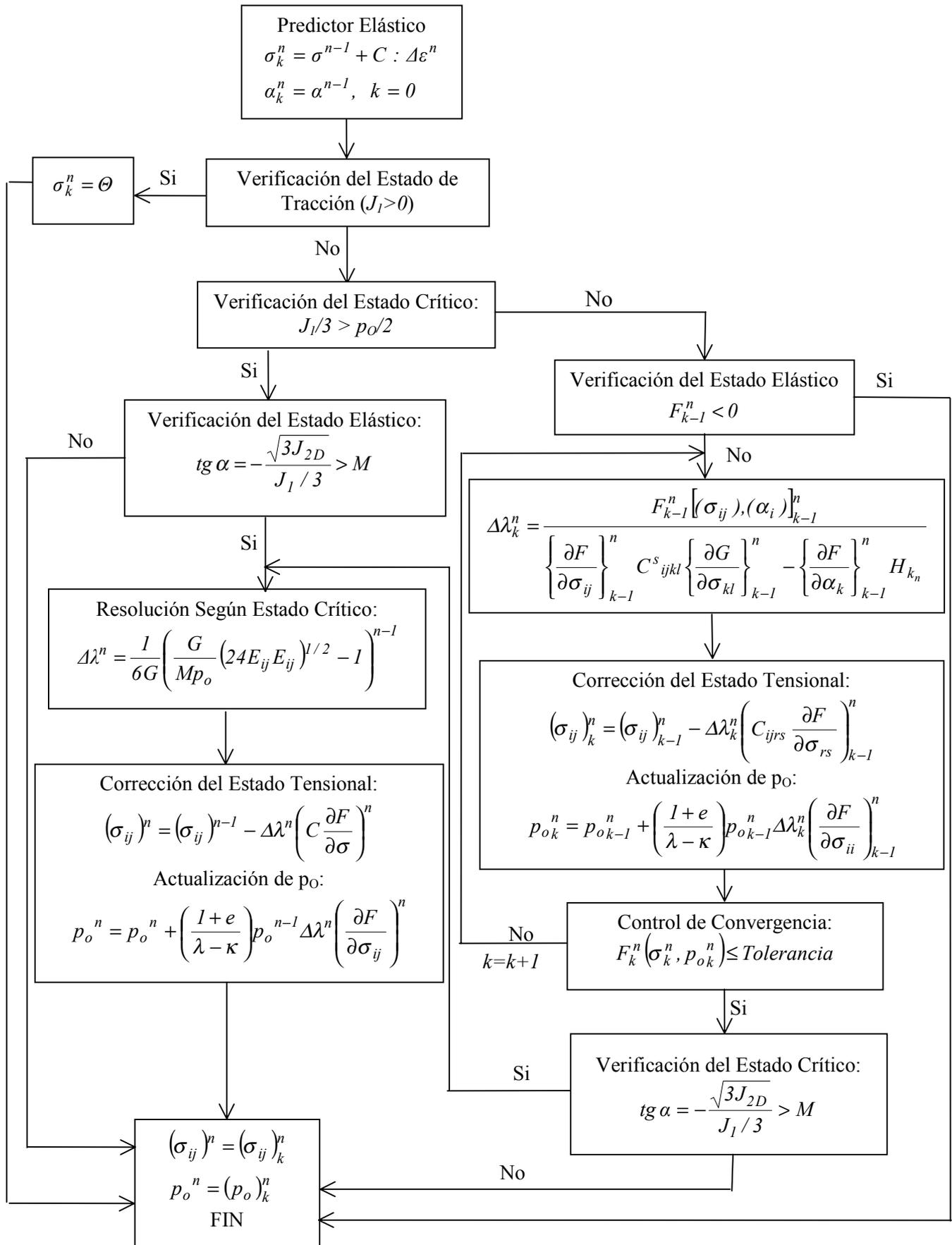
$$F_n = F[(\sigma_{ij})_n, (\alpha_i)_n] = 0 \quad (29)$$

Se obtiene:

$$\Delta\lambda = \frac{F[(\sigma_{ij})_n, (\alpha_i)_n]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right\}_{n-1} C^s_{ijkl} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right\}_{n-1} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \right\}_{n-1} H_{k_n}} \quad (36)$$

Sustituyendo este valor de $\Delta\lambda_n$ en las ecuaciones anteriores se obtienen los valores de $(\sigma_{ij})_n$ y $(\alpha_i)_n$. las condiciones iniciales para este procedimiento son las dadas para el predictor elástico. La iteración se realiza hasta lograr la convergencia. A continuación se esquematiza el algoritmo para el caso particular del modelo de Cam Clay.

Algoritmo para la Integración de la ecuación constitutiva



El Algoritmo descrito fue implementado en un programa de elementos finitos plano no lineal, con el mismo se resolvieron dos ejemplos correspondiente a una probeta cilíndrica sometida a un ensayo triaxial convencional.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Probeta cilíndrica sometida a un ensayo triaxial convencional (CTC)

Se presentan dos casos en los que se realiza una comparación de resultados para una probeta de suelo de 75.0 mm de altura y 38.0 mm de diámetro, la cual primeramente se somete a una presión hidrostática ($\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$) hasta alcanzar la presión de confinamiento inicial p_0 , y luego se incrementa únicamente la tensión principal σ_1 , manteniendo constante las otras $\sigma_2=\sigma_3= p_0$. Debido a la simetría del problema se modela sólo un cuarto de la probeta que se discretiza con 15 elementos axilsimétricos rectangulares de 4 nodos y 2 puntos de integración.

En el primer ejemplo se compara los resultados con los obtenidos por O. C. Zienkiewicz, y D. J. Naylor⁸, quienes emplearon un modelo triaxial axilsimétrico, y por Siriwardane y Desai⁹, quienes implementaron este modelo en dos y tres dimensiones. Los parámetros utilizados se han consignado en la figura 3. En la misma figura se representa la diferencia de tensiones ($\sigma_1-\sigma_2$) en función de la deformación axial ε_1 . Puede observarse en este ejemplos buen ajuste que se ha logrado.

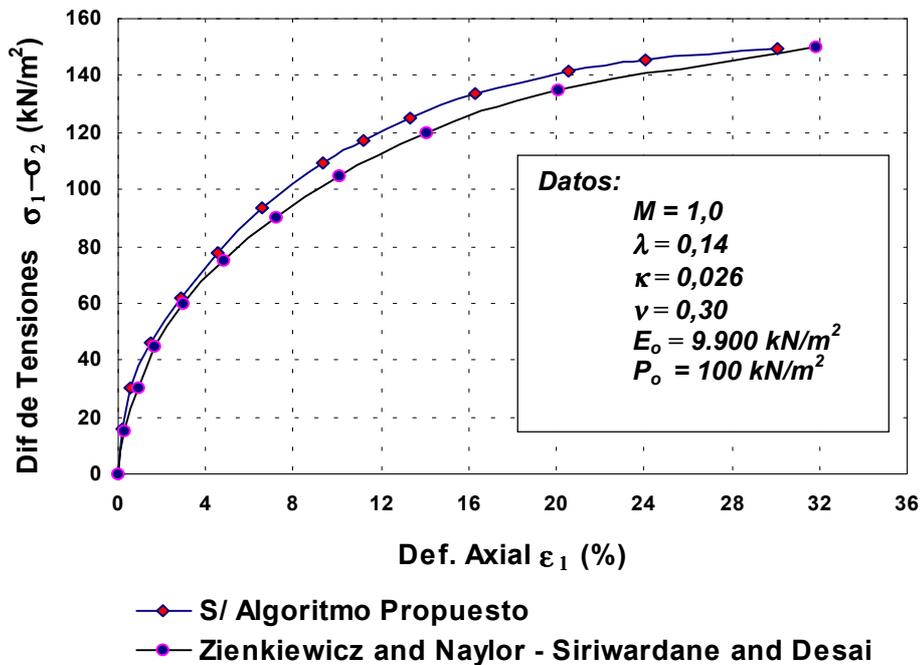


Fig. 3 Comportamiento de un modelo de estado crítico para distintos algoritmos

El segundo ejemplo corresponde al mismo ensayo descrito pero sobre un suelo de tipo limo arenoso. En la figura 4 se presentan los datos del material y las curvas ($\sigma_1-\sigma_2$) en función de la deformación axial ε_1 , obtenidas según el algoritmo propuesto y la obtenida experimentalmente. Al igual que en el caso anterior se logra un buen ajuste.

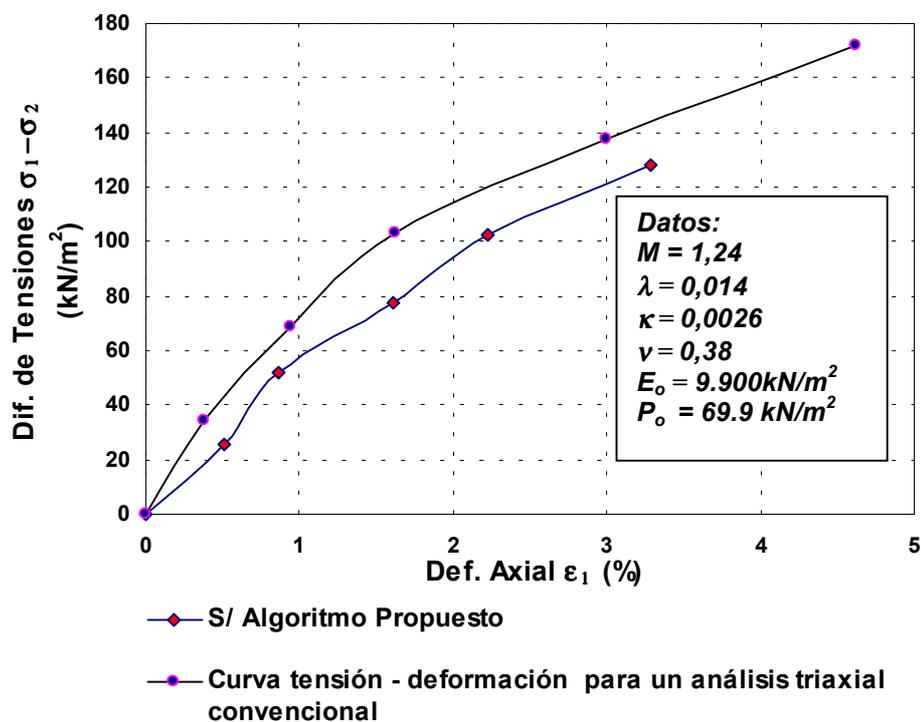


Fig. 4 Comparación entre resultados del algoritmo propuesto y lo observado

CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un algoritmo para la integración de la ecuación constitutiva del modelo de Cam clay, basado en el “Método de Retorno Mapeado”, el cual presenta la ventaja frente a otros, de que se formula sólo en términos de la función de fluencia, la normal a la misma, la dirección de flujo plástico y el módulo elástico tangente, sin necesidad de recurrir a sus gradientes por otro lado presenta una tasa de convergencia cuadrática.

El mismo se implementó en un programa de elementos finitos plano, para problemas con no linealidad física. Con dicho programa se resolvieron los ejemplos de aplicación. De la comparación de los resultados con los obtenidos experimentalmente o con otros algoritmos de integración, se observa que presenta un muy buen ajuste.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico brindado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET – Argentina), para la realización del presente trabajo.

REFERENCIAS

- [1] A. M. Britto, M. J. Gunn, “Critical State Soil Mechanics Via Finite Elements”. Ch. 2 pp 37-81, John Wiley & Sons, 1987.
- [2] K. H. Roscoe, A. N. Schofield y C. P. Worth, “On the Yielding of Soils”, Geotechnique, Vol. 8, 1958, pp. 22-53.
- [3] K. H. Roscoe, A. N. Schofield,
- [4] A. N. Schofield y C. P. Worth, “Critical State Soil Mechanics”, McGraw-Hill Book Company, Londres, 1968.

- [5] K. H. Roscoe y J. B. Burland, "On the Generalized Stress-Strain Behavior of Wet Clay", in Engineering Plasticity, J Heyman and F. A. Leckie (Eds.), Cambridge University Press, Cambridge, 1968, pp. 535-609.
- [6] "ABAQUS Finite Element Program", Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. 1997.
- [7] "PAK Finite Element Program for Structural Analysis", M. Kojic, R. Salvkovic, M. Zivkovic y N. Grujovic, Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad de Kragujevac, Yugoslavia.
- [8] "CRISP Critical State Program" A. M. Britto, M. J. Gunn, "Critical State Soil Mechanics Via Finite Elements". Ch. 2 pp 37-81, John Wiley & Sons, 1987.
- [9] B. Luccioni, "Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos", Tesis de Doctor en Ingeniería, Laboratorio de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán. Argentina, 1993.
- [10] De Borst, "Integration of Plasticity Equations for Singular Yield Functions, Computer & Structures, Vol 26, No. 5, pp. 823-829.
- [11] M. Ortiz, J. C. Simo, "Accuracy an Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Cosntitutive Relations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, 1561-1576.
- [12] C. S. Desai, H. J. Siriwardane, "Constitutive Laws for Engineering Materials With Emphasis on Geologic Materials" Prentice Hall.