

MODOS DE FALLA LOCALIZADA EN SÓLIDOS ELASTOPLÁSTICOS MICROPOLARES DE COSSERAT

María Marcela Nieto

*Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías. U.N. de Santiago del Estero.
Avd. Belgrano (s) 1912. 4200. Santiago del Estero*

José Guillermo Etse

*Laboratorio de Estructuras. U.N. de Tucumán.
Avda. Independencia 1800. 4000. S.M. de Tucumán.*

RESUMEN

Este trabajo analiza las dos condiciones de localización de un continuo elastoplástico de Cosserat, en el cual la condición de fluencia correspondiente al Modelo Extendido de Leon depende de la parte antisimétrica del tensor desviatorio de tensiones y de cuplas tensionales.

Se analiza la primera condición que impone la singularidad del tensor acústico que se valora para distintas longitudes características, estados de tensiones no simétricas y simetrizadas, y condición de flujo asociado y no asociado, obteniéndose el determinante nulo solo en condición de flujo no asociado.

Se deben obtener luego los autovectores para los autovalores cero de las direcciones en las que la primera condición se verifica, y con estas, satisfacer la ecuación resultante del desarrollo analítico de la segunda condición, la que a priori no permite simplificaciones que posibiliten deducir los modos de falla. Este cálculo se realiza en forma numérica para obtener el valor nulo de la segunda condición.

ABSTRACT

The purpose of this work was to evaluate the two localitation conditions of elastoplastic Cosserat continua. The Leon Extended Model yield function depend on the non-symmetric part of the desviatoric stress and couple stresses tensor .

The first localitation condition is analysed for differents characteristics lengths, non- symmetric and symmetric stresses tensors, and associated and non associated yield condition. The acoustic tensor determinant is zero only in non asociated yield condition.

The first condition has to be satisfied simultaneously with the second localization condition, to obtained the eigenvectors corresponds to the lowest eigenvalues of the localitation tensor. This solution can be carried out numerically to obtelnd the zero value of the second condition.

MODELO MICROPOLAR DE LEON

Función de Fluencia

La formulación del Modelo Extendido de León se realiza considerando la función de fluencia, en la cual se ha considerado el valor del endurecimiento $k = 1$

$$F(p, \rho, \theta, k, c) = \left\{ (1-k) \left(\frac{p}{f'_c} + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6} f'_c} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho \cdot r(\theta)}{f'_c} \right\}^2 + \frac{k^2 \cdot m}{f'_c} \left(p + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - k^2 c = 0 \quad (1)$$

siendo:

c : parámetro de cohesión

m : parámetro de fricción

f'_c : resistencia uniaxial de compresión

Las coordenadas de tensión de Haigh - Westergard,

$$k = 1 \quad (2)$$

$$\rho = \sqrt{2J_2} \quad (3)$$

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{27} J_3}{2J_2^{3/2}} \quad (4)$$

Posteriores modificaciones realizadas por Etse y Willam [1], tendientes a evitar los quiebres en la traza desviática del modelo, llevaron a reemplazar el radio vector desviático por la coordenada polar $\rho \cdot r(\theta)$ donde la segunda se define como

$$r(\theta) = \frac{4(1-e^2) \cos^2 \theta + (2e-1)^2}{2(1-e^2) \cos \theta + (2e-1) \sqrt{4(1-e^2) \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e}} \quad (5)$$

siendo e la excentricidad, definida como $e = \frac{\rho_t}{\rho_c}$. La coordenada polar $\rho \cdot r(\theta)$ define la variación elíptica del

parámetro ρ , entre ρ_c y ρ_t , y toma valores entre

$$r(\theta = 0) = \frac{1}{e} \quad (6)$$

$$r(\theta = \pi/3) = 1 \quad (7)$$

Fueron desarrollados modelos de ablandamiento y endurecimiento en el régimen de pre y postpico que conducen a la incorporación de una constante adicional k que varía entre $0 \leq k \leq 1$. Entonces, el régimen de respuesta lineal elástica comienza con una posición inicial de la superficie de carga, la cual crece monótonicamente con los incrementos de la deformación inelástica hasta el valor final $k=1$ cuando se alcanza la envolvente de falla del criterio de Leon.

Las coordenadas cilíndricas del espacio de Haigh - Westergard requieren de la determinación del segundo invariante del desviador de tensiones, para el que se adopta [2]

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{s_{ij} \cdot s_{ij} + s_{ji} \cdot s_{ji}}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_{ij} \cdot \mu_{ij} + \mu_{ji} \cdot \mu_{ji}}{lc^2} \right) \quad (8)$$

donde la expresión de s_{ij} corresponde a

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot p \quad (9)$$

y de J_3 tiene la forma

$$J_3 = \det(s) + \frac{\det(\mu)}{lc^3} \quad (10)$$

Formulación de Energía de Fractura. Modo de Fractura Rotacional

Dado que los continuos micropolares presentan grados de libertad adicionales, la formulación de Energía de Fractura que se desarrolló para el modelo incluye la disipación de energía de fractura por los giros o microcurvaturas que se desarrollan en el continuo enriquecido. De esta forma se tiene un Modo de Fractura Rotacional, que se agrega a los modos de fractura clásicos (ver Etse[3], Nieto[4]).

Predicciones de Falla en Hormigón. Modelo Micropolar de Leon.

Para la implementación numérica del modelo se asume un campo uniforme de propiedades de modo que la respuesta constitutiva del espécimen de hormigón se interpreta como un experimento numérico a nivel de punto material. Se desarrollan pequeños incrementos de desplazamiento a los fines de minimizar errores. El comportamiento del modelo propuesto se grafica en las Figuras 1 y 2. El espécimen se discretiza en un cuarto de su dimensión debido a las características de doble simetría que presenta el problema.

La implementación se realiza en el estado plano de deformaciones aplicando desplazamientos.

Las condiciones de apoyo agregan dispositivos que impiden tanto los desplazamientos como los giros de los puntos.

Las dimensiones de la pieza son: altura total de 4.25 in. y base de 2.125 in.. El espesor se toma de valor unitario.

El ensayo de tracción se implementa para un valor de la longitud característica igual a la de la altura de la pieza y se compara con la respuesta obtenida con el Modelo extendido de Leon del continuo clásico.

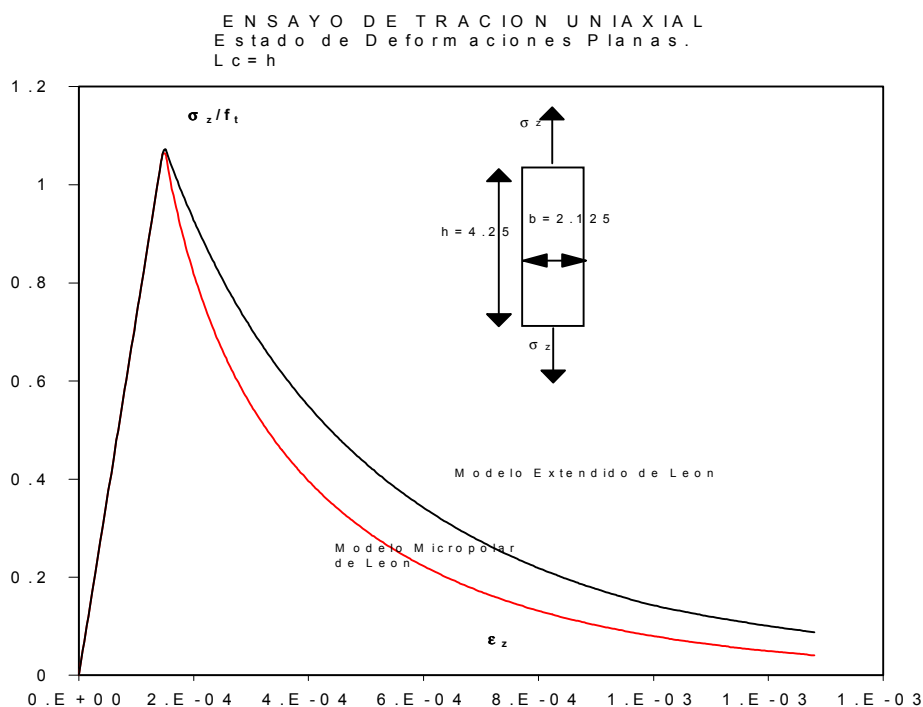


Figura 1.- Ensayo de Tracción para el Modelo Extendido de Leon. Comparación con el Modelo Micropolar.

Se puede ver que el Modelo Micropolar predice valores de tensiones de menor magnitud obteniéndose una respuesta mas frágil. La implementación del ensayo triaxial de la probeta de hormigón que se grafica en la Figura 2, se ha llevado adelante para diferentes niveles de tensión de confinamiento, desde el valor de 100 psi a el de 700 psi.

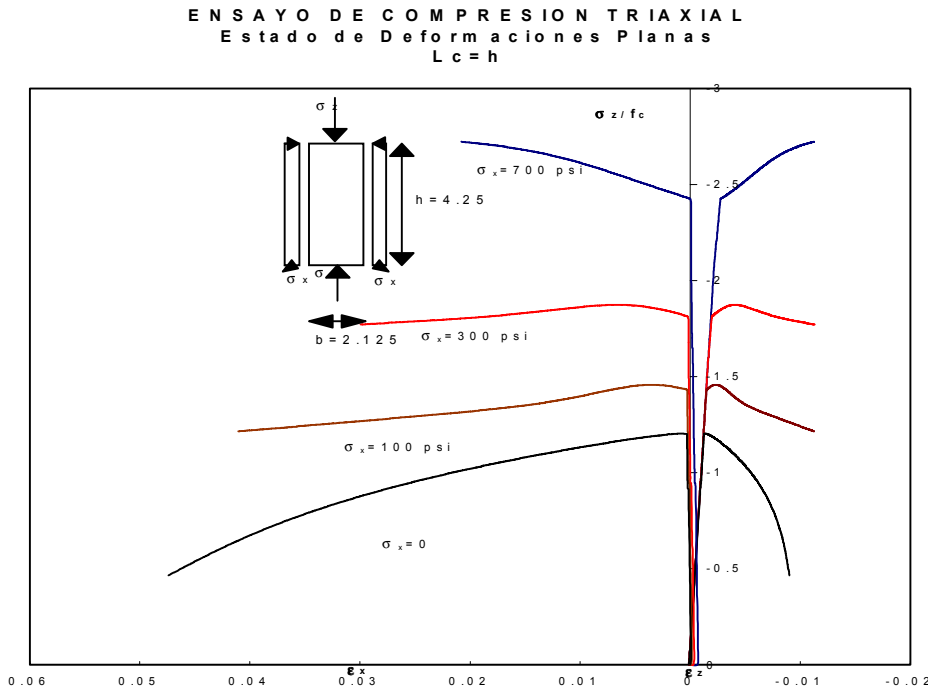


Figura 2.- Ensayo de Compresión Triaxial para el Modelo Micropolar de Leon.

Como se ve, el modelo micropolar mapea las variaciones del comportamiento del hormigón frente a las diferentes tensiones de confinamiento de los ensayos, mostrando un comportamiento de ablandamiento para valor de $\sigma_x < 500 \text{ psi}$ y de endurecimiento por encima de este.

Indicador de Falla Localizada

Las condiciones de localización derivan de la existencia de una superficie de discontinuidad de segundo orden en el campo cinemático de los desplazamientos u y de las microrotaciones ω , o lo que es lo mismo, una superficie de discontinuidad de primer orden en el campo de las deformaciones ε y de las microcurvaturas κ .

A través de una frontera común S entre dos regiones se asume un salto en el gradiente de desplazamientos y de microrotaciones.

En el sólido continuo, los campos de velocidad y de tasa de rotación son inicialmente continuos [5], es decir

$$\llbracket \dot{u} \rrbracket = \dot{u}^+ - \dot{u}^- = 0 \quad (11)$$

$$\llbracket \dot{\omega} \rrbracket = \dot{\omega}^+ - \dot{\omega}^- = 0 \quad (12)$$

El salto en el gradiente de velocidad y el salto en el gradiente de la tasa de giro

$$\llbracket \nabla_x \dot{u} \rrbracket = \nabla_x \dot{u}^+ - \nabla_x \dot{u}^- \neq 0 \quad (13)$$

$$\llbracket \nabla_x \dot{\omega} \rrbracket = \nabla_x \dot{\omega}^+ - \nabla_x \dot{\omega}^- \neq 0 \quad (14)$$

Aplicando en Teorema de Maxwell a cada campo de gradiente se obtiene el gradiente de la velocidad y la expresión para el gradiente de la tasa de microgiros

$$\llbracket \nabla_x \dot{u} \rrbracket = \dot{\gamma}^u M \otimes N \quad (15)$$

$$\llbracket \nabla_x \dot{\omega} \rrbracket = \dot{\gamma}^\omega M^\omega \otimes N \quad (16)$$

donde $M = [M^u, M^\omega]$ define la dirección del salto y $\dot{\gamma}^u$ y $\dot{\gamma}^\omega$ son dos escalares que representan las magnitudes de dichos saltos.

Con estas expresiones es posible describir completamente los saltos en la tasa de deformaciones como un tensor de rango uno y orden dos

$$\llbracket \dot{\varepsilon} \rrbracket = \llbracket \nabla'_x \dot{u} - e : \dot{\omega} \rrbracket = \dot{\gamma}^u N \otimes M^u \quad (17)$$

y los saltos en la tasa de microcurvaturas

$$\llbracket \dot{\kappa} \rrbracket = \llbracket \nabla_x^t \dot{\omega} \rrbracket = \dot{\gamma}^\omega N \otimes M^\omega \quad (18)$$

Es de notar que las superficies de singularidad de segundo orden requieren discontinuidad de las segundas derivadas parciales. En la expresión de la tasa de deformaciones, la tasa de giros $\dot{\omega}$ puede permanecer continua.

Estas formulaciones de discontinuidad cinemática, en un estado de carga plástica considerado a ambos lados de la superficie de discontinuidad, conducen a un salto en las tensiones y en las cuplas tensionales, si se aplican las ecuaciones constitutivas

$$\llbracket \dot{\sigma} \rrbracket = E_{ep}^{uu} : \llbracket \dot{\epsilon} \rrbracket + E_{ep}^{u\omega} : \llbracket \dot{\kappa} \rrbracket \quad \text{y} \quad \llbracket \dot{\mu} \rrbracket = E_{ep}^{\omega u} : \llbracket \dot{\epsilon} \rrbracket + E_{ep}^{\omega\omega} : \llbracket \dot{\kappa} \rrbracket \quad (19)$$

Dado que se requiere continuidad de los vectores de variación de la tracción debido a su contiguidad, de acuerdo al Lema de Cauchy, se infiere que

$$\llbracket \dot{i}^\sigma \rrbracket = N \cdot \llbracket \dot{\sigma} \rrbracket = 0 \quad \text{y} \quad \llbracket \dot{i}^\mu \rrbracket = N \cdot \llbracket \dot{\mu} \rrbracket = 0 \quad (20)$$

Primera condición de localización

Combinando las ecuaciones obtenidas para los vectores de tracción con las expresiones de los saltos en las tasas de deformaciones y de microcurvaturas y con las ecuaciones constitutivas desarrolladas precedentemente, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\llbracket \dot{i}^\sigma \rrbracket = N \cdot \llbracket \dot{\sigma} \rrbracket = N \cdot E_{ep}^{uu} : \dot{\gamma}^u N \otimes M^u + N \cdot E_{ep}^{u\omega} : \dot{\gamma}^\omega N \otimes M^\omega = 0 \quad (21)$$

$$\llbracket \dot{i}^\mu \rrbracket = N \cdot \llbracket \dot{\mu} \rrbracket = N \cdot E_{ep}^{uu} : \dot{\gamma}^u N \otimes M^u + N \cdot E_{ep}^{u\omega} : \dot{\gamma}^\omega N \otimes M^\omega = 0 \quad (22)$$

de donde se deriva, la **primera condición de localización**

$$N \cdot E_{ep}^{uu} \cdot N \cdot \dot{\gamma}^u \cdot M^u + N \cdot E_{ep}^{u\omega} \cdot N \cdot \dot{\gamma}^\omega \cdot M^\omega = Q_L^{uu} \cdot \dot{\gamma}^u \cdot M^u + Q_L^{u\omega} \cdot \dot{\gamma}^\omega \cdot M^\omega = 0 \quad (23)$$

$$N \cdot E_{ep}^{uu} \cdot N \cdot \dot{\gamma}^u \cdot M^u + N \cdot E_{ep}^{u\omega} \cdot N \cdot \dot{\gamma}^\omega \cdot M^\omega = Q_L^{\omega u} \cdot \dot{\gamma}^u \cdot M^u + Q_L^{\omega\omega} \cdot \dot{\gamma}^\omega \cdot M^\omega = 0 \quad (24)$$

que en forma compacta puede formularse

$$\begin{bmatrix} Q_L^{uu} & Q_L^{u\omega} \\ Q_L^{\omega u} & Q_L^{\omega\omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\gamma}^u \cdot M^u \\ \dot{\gamma}^\omega \cdot M^\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

donde el **tensor de localización** Q_L esta definido por sus particiones

$$Q_{ij}^{\eta\xi} = N_k \cdot E_{klij}^{\eta\xi} \cdot N_l \quad \text{siendo} \quad \eta, \xi \in \{u, \omega\} \quad (26)$$

Las dos contracciones del tensor elastoplástico de cuarto orden se efectúan en el primer y tercer subíndice.

Para satisfacer la condición de localización, el operador de localización Q_L debe ser singular, o lo que es lo mismo su determinante debe ser cero

$$\det(Q_L) = \det \begin{bmatrix} Q_L^{uu} & Q_L^{u\omega} \\ Q_L^{\omega u} & Q_L^{\omega\omega} \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

Segunda condición de localización

La condición anterior es necesaria pero no suficiente ya que solo determina la necesidad de que las tracciones permanezcan continuas a través de la superficie de singularidad considerada. Una segunda condición se deriva del balance del momento angular y lineal [6] en ambos lados de la superficie. Haciendo uso de los conceptos de campos de tensiones y momentos tensionales bifurcados a cada lado de la superficie de singularidad, la segunda condición de localización toma la forma

$$e : \llbracket \dot{\sigma} \rrbracket = \dot{S}^u + \dot{S}^\omega = 0 \quad (28)$$

Esta condición deberá satisfacerse completamente en forma simultánea con la primera para admitir bifurcación discontinua.

Los dos términos vectoriales de la ec. (28) se definen como

$$\dot{S}^u = \dot{\gamma}^u e : E_{ep}^{uu} : (N \otimes M^u) \quad (29)$$

$$\dot{S}^\omega = \dot{\gamma}^\omega e : E_{ep}^{\omega\omega} : (N \otimes M^\omega) \quad (30)$$

Desarrollando esta segunda condición de localización se puede deducir que

$$e : \left[\dot{\sigma} \right] = 0 \Leftrightarrow \left[\dot{\sigma} - \dot{\sigma}^t \right] = 0 \Leftrightarrow \left[\dot{\sigma}^{skw} \right] = 0 \quad (31)$$

es decir que no pueden existir saltos en el tensor antisimétrico de tensiones a través de la superficie S .

MODELO MICROPOLAR DE LEON.

Análisis de Localización Primera Condición de Localización

Las particiones del tensor acústico correspondiente al estado plano de deformaciones, tienen las componentes siguientes

$$Q_{ep}^{uu} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{uu} & Q_{12}^{uu} & 0 \\ Q_{21}^{uu} & Q_{22}^{uu} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^{uu} \end{bmatrix} \quad Q_{ep}^{u\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{13}^{u\omega} \\ 0 & 0 & Q_{23}^{u\omega} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$Q_{ep}^{\omega u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Q_{31}^{\omega u} & Q_{32}^{\omega u} & 0 \end{bmatrix} \quad Q_{ep}^{\omega\omega} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{\omega\omega} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22}^{\omega\omega} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^{\omega\omega} \end{bmatrix} \quad (33)$$

La implementación numérica llevada a cabo de la primera condición de localización muestra que se obtienen los menores valores de la relación entre los determinantes del tensor acústico plástico y elástico para los valores de ángulos $\alpha = 32^\circ$ y $\alpha = 148^\circ$, en el caso de no asociatividad, es decir que las direcciones críticas de localización del modelo micropolar coinciden con las del modelo clásico.

El determinante de la primera partición, correspondiente a Q_{ep}^{uu} , es el que determina la dirección de la superficie de localización ya que el mismo se singulariza para las mismas direcciones que el tensor completo.

Análisis de Localización en el Punto Límite Ensayo de compresión uniaxial Estado de Deformaciones Planas

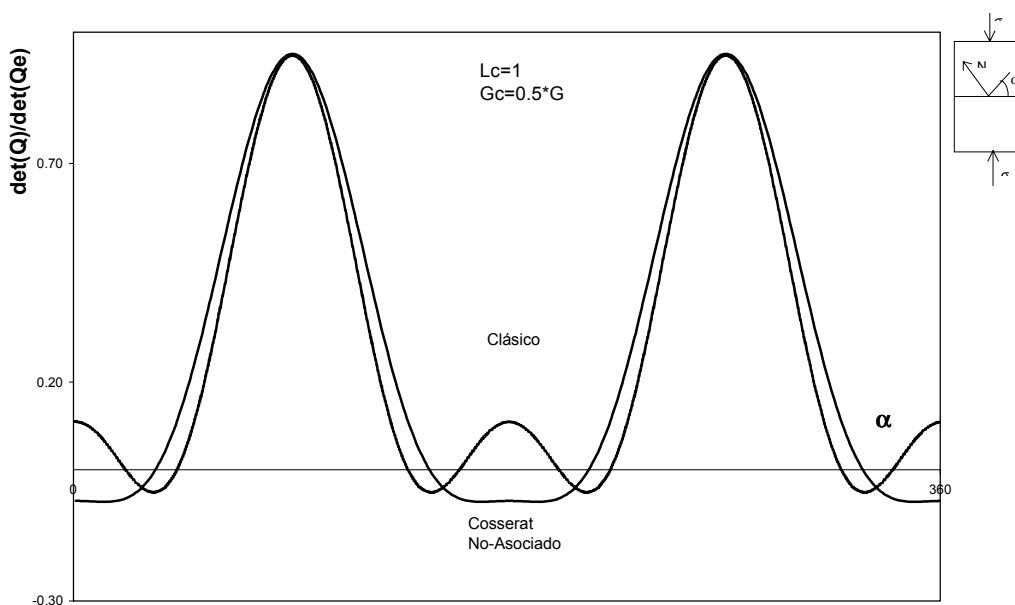


Figura 3. Primera Condición de Localización. Modelo de Leon clásico y micropolar.

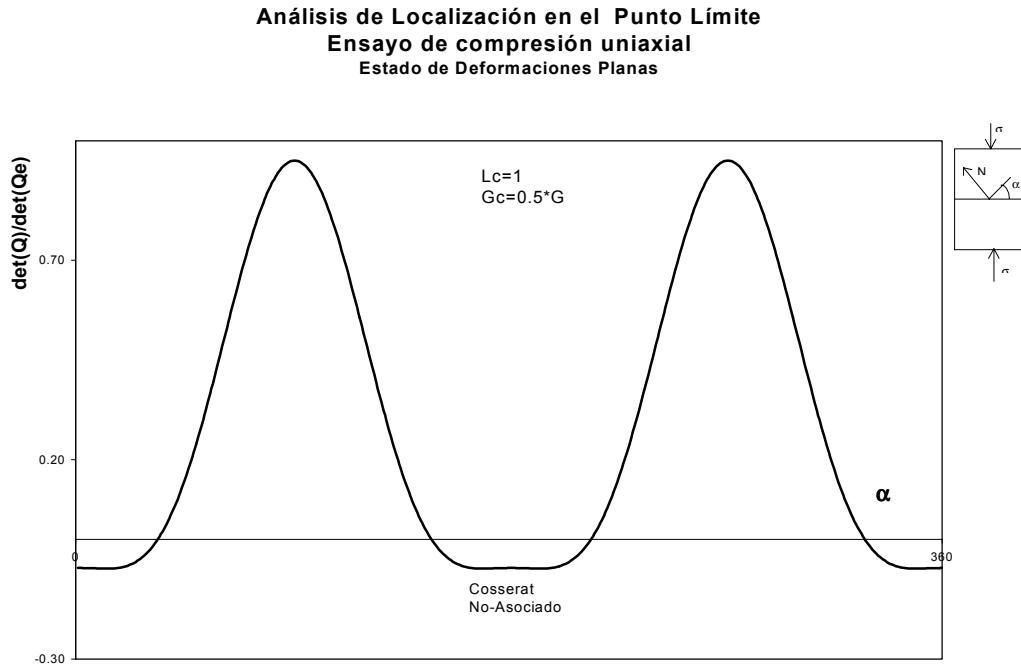


Figura 4. Tensor de localización. Partición de desplazamientos.

módulo de corte de Cosserat igual a la mitad del módulo de corte clásico y longitud de Cosserat unitaria.

A los fines de mostrar la variación de la partición correspondiente a los desplazamientos Q_{ep}^{uu} , se ha confeccionado la gráfica de la Figura 4 que como se observa presenta idéntica variación a la del determinante total correspondiente.

Los determinantes de las restantes particiones son nulos, que es el caso de las correspondientes a los acoplamientos Q_{ep}^{uw} y Q_{ep}^{wu} , o constante en el caso de la partición de las microcurvaturas $Q_{ep}^{\omega\omega}$.

Segunda Condición de Localización

La segunda condición de localización se puede expresar como

$$e : [\boldsymbol{\sigma}] = 0 = \gamma^u e : E_{ep}^{uu} : (N \otimes M^u) + \gamma^\omega e : E_{ep}^{u\omega} : (N \otimes M^\omega) \quad (34)$$

El primer término puede escribirse

$$S^u = \gamma^u e : E_{ep}^{uu} : (N \otimes M^u) = \gamma^u e : (E_0^{uu} - \frac{1}{h_p} E_0^{uu} : m^u \otimes n^u : E_0^{uu}) : (N \otimes M^u) \quad (35)$$

y considerando el valor del tensor elastoplástico, el segundo término se describe

$$S^\omega = \gamma^\omega e : E_{ep}^{\omega\omega} : (N \otimes M^\omega) = \gamma^\omega e : (-\frac{1}{h_p} E_0^{uu} : m^u \otimes n^\omega : E_0^{\omega\omega}) : (N \otimes M^\omega) \quad (36)$$

Dado la condición expresada en la ec. (34), se valora la parte antisimétrica de estos tensores

$$\begin{aligned} \gamma^u e : (E_0^{uu} - \frac{1}{h_p} E_0^{uu} : m^u \otimes n^u : E_0^{uu}) : (N \otimes M^u) = \\ = \gamma^u e : (\phi_2 - \phi_3) I_4^{skw} (1 - \frac{1}{h_p} m^u \otimes n^u : E_0^{uu}) : (N \otimes M^u) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \gamma^\omega e : (-\frac{1}{h_p} E_0^{uu} : m^u \otimes n^\omega : E_0^{\omega\omega}) : (N \otimes M^\omega) = \\ = \gamma^\omega e : (\phi_2 - \phi_3) I_4^{skw} (-\frac{1}{h_p} m^u \otimes n^\omega : E_0^{\omega\omega}) : (N \otimes M^\omega) \end{aligned} \quad (38)$$

Si $\phi_2 = \phi_3$, es decir si $G_c = 0$, la condición de la ec. (34) se satisface siempre. En otro caso la implementación del Modelo Extendido de Leon en el marco de la teoría micropolar conduce a tensores de gradiente asimétricos. La segunda condición de localización debe valorarse en forma numérica. Para ello es necesario comprobar la singularidad del tensor de localización y obtenida la dirección de la superficie de singularidad, encontrar el autovector que corresponde a un autovalor mínimo, verificándose así la segunda condición.

El modo de falla resultante depende de la asimetría de los estados de tensiones evaluados.

La implementación de la segunda condición se muestra en la figura siguiente. Se considera el valor del módulo de corte de Cosserat de $G_c = 0.5 * G$, en los dos casos, tanto el caso asimétrico como el caso simetrizado.

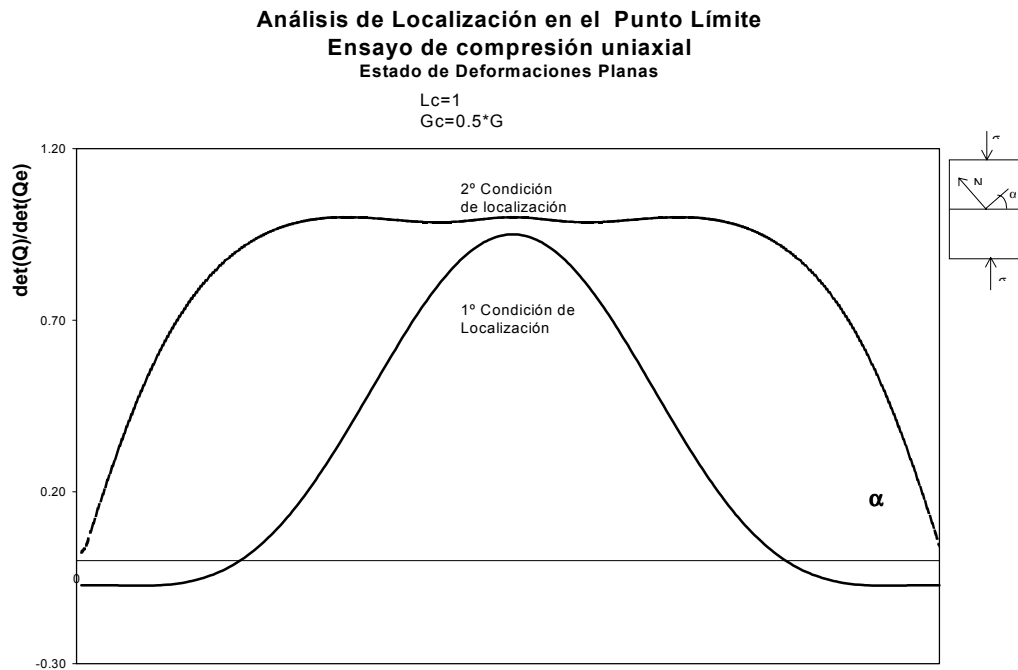


Figura 5 .- Diagrama de bifurcación para el ensayo de compresión uniaxial.

Para considerar un estado simetrizado se toma el valor del invariante de la ec.8, mientras que para un estado asimétrico la expresión del segundo invariante

$$J_2 = \frac{1}{2} (s^{sym} : s^{sym} + s^{skw} : s^{skw}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu : \mu}{lc^2} \right) \quad (39)$$

con

$$s^{sym} = \frac{1}{2} (s + s^t) \quad s^{skw} = \frac{1}{2} (s - s^t) \quad (40)$$

El ensayo de compresión uniaxial arroja valores similares en el estado simétrico y en el antimétrico, para las variaciones tanto de la primera como de la segunda condición de localización.

Si bien esta formulación no simétrica no suprime la localización para toda condición de carga, si reduce notablemente el espectro de estados tensionales o comportamientos de falla asociados con formas localizadas del campo de las deformaciones.

CONCLUSIONES

El estudio de la falla localizada abarca las dos condiciones de localización que deben ser satisfechas en los continuos micropolares. La valoración numérica del tensor acústico se realiza, en condición de flujo no asociado, y en estado de tensiones no simétricas y simetrizadas.

Se concluye que en la condición flujo no asociado el determinante del tensor de localización se anula en superficies cuyas normales forman ángulos de 32 y 138 grados con la dirección de la tensión principal de compresión, lo que equivale a decir que la fractura se produce en modo mixto de falla. Idénticos valores de inclinación se obtienen en el caso de los continuos clásicos.

El Modelo Extendido de Leon en estos últimos determina gradientes de fluencia y de potencial simétricos mientras que en el caso de los continuos micropolares esta condición se pierde debido a la contribución del tercer invariante desviatorio de tensiones en la función de fluencia. Debido a ello, la segunda condición de localización no permite arribar a simplificaciones en su evaluación analítica que son posibles en los continuos clásicos y esto deriva en la necesidad de su valoración numérica.

Se estudian las condiciones de localización en una formulación sofisticada para materiales cohesivos - friccionales como es el Modelo Extendido de Leon, en un primer paso para la comprensión de las propiedades de regularización de los continuos micropolares. La forma de falla en este caso no queda restringida al modo I como en modelos en los que solo participan las componentes simétricas del tensor de tensiones en el desarrollo de la plasticidad.

Si bien se demuestra que los continuos de Cosserat proveen una regularización de los resultados que se obtienen en los continuos clásicos, disminuyendo la dependencia con las mallas de elementos finitos que se seleccionan y limitando la localización a algunos escenarios de carga, se hace necesario avanzar en la implementación de la segunda condición de localización para entender de manera mas general las propiedades regularizantes de la teoría micropolar.

REFERENCIAS:

- [1] ETSE G. , WILLAM K. (1993).- *Fracture Energy Formulation for Inelastic Behaviour of Plain Concrete*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 120. Pag. 1983-2009.
- [2] DE BORST R., MUEHLHAUS H.B (1991).- *Continuum Models for Discontinuous Media*. RILEM Proc. Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics. London. Pag. 601-618.
- [3] ETSE G. (1997).- *Formulaciones Constitutivas No Locales para Simulaciones Computacionales de Procesos de Falla de Estructuras*. Anales Acad. Nac. Cs. Ex. Fis, y Nat, Tomo 49. Pag. 125-135.
- [4] NIETO M. (1999).- *Teoría Elastoplástica Micropolar de Cosserat para Materiales Cohesivos Friccionales*. Tesis de Magister. Universidad Nacional de Tucumán.
- [5] IORDACHE M. M. (1996).- *Failure Analysis of Classical and Micropolar Elastoplastic Materials*. PhD Thesis. University of Colorado. Bolder. Pag. 104-167.
- [6] ETSE G. (1992).- *Theoretische und Numerische Untersuchung zum Diffusen und Lokalisierten Versagen in Beton*. PhD Thesis. University of Karlsruhe. Alemania.