

PLASTICIDAD EN GRANDES DEFORMACIONES PARA MATERIALES COMPUESTOS ANISÓTROPAS PARTE I: FORMULACIÓN TEÓRICA

E. Car, S. Oller y E. Oñate

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Universidad Politécnica de Catalunya

Módulo C1 Campus Norte 08034 Barcelona España

email: car@cimne.upc.es

RESUMEN

En este trabajo se presenta una generalización de la teoría de la plasticidad isotrópica clásica al campo anisótropo, su extensión a la teoría de grandes deformaciones y su aplicación a la simulación numérica del comportamiento de materiales compuestos. Esta teoría anisotrópica está basada en el concepto de mapeo de tensores desde el espacio anisótropo real al isotrópico ficticio. En las teorías ortótropas clásicas es necesario formular para cada material particular una ley de comportamiento especial. Por el contrario, la teoría que aquí se presenta se basa en establecer una relación biunívoca entre el comportamiento anisótropo del material y el comportamiento de un material isotrópico ficticio cualquiera. Luego se resuelve el problema en el campo isotrópico ficticio y se traslada el resultado al campo real. La teoría propuesta, al ser una generalización de las teorías clásicas, permite utilizar los modelos y algoritmos desarrollados para materiales isotrópicos. Esta teoría se aplica para cada uno de los materiales que constituyen un compuesto y su combinación se realiza mediante una teoría de mezclas de sustancias básicas modificada que se presenta en la Parte II de este trabajo.

ABSTRACT

In this work a generalized anisotropic model in large strains based on the classical isotropic plasticity theory and its application to simulate the constitutive behavior of composite materials is presented. The anisotropic theory is based on the concept of mapped tensors from the anisotropic real space to the isotropic fictitious one. In classical orthotropy theories it is necessary to use a special constitutive law for each material. By contrast, the theory proposed here is based on establishing a one-to-one relationship between the behavior of an anisotropic real material and that of an isotropic fictitious one. Therefore the problem is solved in the isotropic fictitious space and the results are transported to the real field. The proposed theory is a generalization of classical theories and allows the use of models and algorithms developed for isotropic materials. This theory is applied to simulate the behavior of each material in the composite. The whole behavior of the composite is modeled by incorporating the anisotropic model within a model based on a modified mixing theory presented in Part II of this work.

INTRODUCCIÓN

Se define como materiales anisótropos a aquellos que presentan un comportamiento direccional diferenciado. La descripción del comportamiento de estos materiales en régimen elástico no presenta grandes dificultades siendo posible utilizar para tal fin las formas generales de la teoría de la elasticidad.^{14,17,20} La formulación de una ley constitutiva adecuada para sólidos no proporcionales ortótropos o anisótropos constituye un problema de elevada complejidad. Existen diversos ejemplos de materiales anisótropos, entre ellos se puede mencionar a los materiales compuestos reforzados con fibras, los que constituyen una forma simplificada de materiales no proporcionales anisótropos bifase. El objetivo del presente trabajo es presentar una teoría que permita simular el comportamiento constitutivo de este tipo de materiales.

La formulación general de superficies de fluencia anisótropas debe ser capaz de describir el comportamiento de materiales isótropos como un caso particular de la misma y describir la anisotropía de cualquier estado tensional del material. Los primeros intentos de formular funciones de fluencia para materiales ortótropos no proporcionales se deben a Hill, quien logró extender el modelo isótropo de Von Mises al caso ortótropo.¹¹⁻¹³ La principal limitación de esta teoría se encuentra en la imposibilidad de simular la respuesta de materiales cuyo comportamiento no solo depende del segundo invariante del tensor de tensiones, como por ejemplo el caso de geomateriales o materiales compuestos. Diversos autores han propuesto funciones de fluencia en el espacio de tensiones para materiales anisótropos, entre ellos se puede mencionar Bassani (1977),³ Budiansky (1984)⁶ y Barlat et. al. (1989, 1991).^{1,2}

La teoría anisótropa que aquí se desarrolla es una generalización de la teoría isótropa y está basada en una transformación afín del tensor de tensiones y deformaciones a través de un tensor de cuarto orden. Esta transformación garantiza la convexidad de las funciones de fluencia y potencial plástico¹⁰ y asegura que el material no retorna a un estado elástico una vez que ha plastificado bajo un estado de carga creciente. Esta teoría denominada de mapeo de espacios se basa en las ideas propuestas por Betten^{4,5} y utiliza el concepto de *tensores mapeados* a un espacio ficticio.

MODELO ANISÓTROPO EN PEQUEÑAS DEFORMACIONES

El tratamiento anisótropo de sólidos basados en el concepto de *tensores mapeados* permite utilizar las ventajas y algoritmos utilizados y desarrollados para el caso de materiales isótropos, con las consiguientes beneficios en la implementación computacional en un código de elementos finitos del modelo propuesto.

En trabajos previos diversos autores han desarrollado una generalización de la teoría de plasticidad isótropa al caso anisótropo.^{4,5,18,19} La idea básica consistía en modelar el comportamiento de un sólido en el *espacio anisótropo real* a través de un sólido ideal en un *espacio isótropo ficticio*. Este modelo está basado en la hipótesis de que las deformaciones elásticas son idénticas en ambos espacios lo cual introduce una limitación en la teoría anisótropa mapeada. Esta limitación está dada por el hecho de que se debe respetar la proporcionalidad entre el límite de resistencia y el módulo de elasticidad para cada dirección del material.

El modelo constitutivo que se presenta en este trabajo es general y puede ser aplicado a metales, geomateriales y también a materiales que presentan un alto grado de anisotropía, como es el caso de los materiales compuestos reforzados con fibras y resulta de una generalización de la teoría de la plasticidad clásica. El comportamiento anisótropo del material se formula a través de un espacio isótropo ficticio de tensiones y deformaciones que resulta de una transformación tensorial lineal de los espacios reales de tensiones y deformaciones anisótropos. La ventaja en la utilización de este tipo de modelos consiste en la posibilidad de utilizar las mismas funciones de fluencia, potenciales plásticos y métodos de integración de la ecuación constitutiva desarrollados para materiales isótropos clásicos. Toda la información de la anisotropía del material se encuentra condensada en los tensores de cuarto orden de transformación materiales de los

espacios de tensiones (\mathbf{A}^σ) y deformaciones (\mathbf{A}^ε). Los parámetros que intervienen en la definición del tensor de transformación de espacios se obtienen a través de ensayos experimentales.

Ecuación constitutiva

La ecuación constitutiva del material surge de considerar el primer y segundo principio de la termodinámica junto a la expresión de la energía libre de Helmholtz, a la descomposición aditiva del tensor de deformaciones en su parte elástica y plástica y a la desigualdad de Clausius-Duhem. Aplicando el método de Coleman^{15,16} se obtiene la ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = m \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

La ecuación constitutiva del material isótropo ficticio se obtiene de considerar la unicidad de disipación en los espacios isótropo ficticio y anisótropo real⁸ y aplicando el método de Coleman se obtiene:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = m \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e} = \bar{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2)$$

Función de fluencia y de potencial plástico

Las funciones de fluencia y potencial plástico pueden definirse en el espacio de tensiones de Cauchy (caso de pequeñas deformaciones) de la siguiente forma:

$$\text{Función de fluencia } \phi^\sigma(\boldsymbol{\sigma}; \alpha_\sigma^m) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Función de potencial } g(\boldsymbol{\sigma}; \alpha_\sigma^m) = K \quad (4)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy y ϕ^σ y g representan las funciones de fluencia y potencial plástico y K es una constante.

Transformación del espacio de tensiones

La relación entre los espacios de tensiones isótropo ficticio y anisótropo real se obtiene a través de una de una transformación lineal de las tensiones en el espacio anisótropo real utilizando un tensor de cuarto orden

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}^\sigma \sigma_{kl} \quad (5)$$

donde \mathbf{A}^σ es un tensor de cuarto orden que establece la relación entre los tensores de tensiones en los espacios isótropo y anisótropo, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ son los tensores de tensiones de Cauchy en el espacio isótropo ficticio y anisótropo real respectivamente.

En la definición de la forma y propiedades del operador tensorial \mathbf{A}^σ introducido es necesario tener en cuenta la simetría del tensor de tensiones de Cauchy en los espacios anisótropo e isótropo $\boldsymbol{\sigma}$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ respectivamente, por lo tanto se deben cumplir las siguientes simetrías en el tensor de transformación de espacios:

$$A_{ijkl}^\sigma = A_{jikl}^\sigma = A_{jilk}^\sigma \quad (6)$$

También es necesario que el tensor de cuarto orden de transformación de espacio de tensiones \mathbf{A}^σ presente la siguiente simetría

$$A_{ijkl}^\sigma = A_{klji}^\sigma \quad (7)$$

Las componentes del tensor de cuarto orden de transformación de espacios (\mathbf{A}^σ) se definen como:

$$A_{1111}^\sigma = R(0) \quad A_{2222}^\sigma = R(90) \quad A_{1212}^\sigma = A_{2121}^\sigma = A_{2112}^\sigma = R(45) \quad (8)$$

donde $R(0) = \frac{\bar{f}_{11}}{f_{11}}$ representa el cociente entre las resistencias del material en los espacio isótropo ficticio y el anisótropo real respectivamente en la dirección del eje local x , $R(90) = \frac{\bar{f}_{22}}{f_{22}}$ representa el cociente entre las resistencias del material en los espacio isótropo ficticio y el anisótropo real respectivamente en la dirección del eje local y y $R(45) = \frac{\bar{f}_{12}}{f_{12}}$ representa el cociente entre las resistencias del material a cortante en el espacio isótropo ficticio y el anisótropo real respectivamente. Los parámetros que intervienen en la definición del tensor de transformación se obtienen a través de ensayos experimentales simples.

El tensor de transformación de tensiones \mathbf{A}^σ está expresado en coordenadas locales, por lo tanto resulta necesario transformarlo al sistema de referencia global.

La condición de fluencia del material anisótropo en el espacio isótropo ficticio resulta:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\alpha}) = \bar{\phi}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}; \boldsymbol{\alpha}) = \bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{A}^\sigma; \boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad (9)$$

donde $\bar{\phi}$ es la función de fluencia en el espacio isótropo ficticio y se diferencia de la función de fluencia en el espacio anisótropo ϕ en que el tensor de tensiones de Cauchy en el espacio isótropo ficticio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ reemplaza a $\boldsymbol{\sigma}$ como argumento de la función de fluencia dada en la ec.(3).

Transformación del espacio de deformaciones

Se define la relación entre las deformaciones elásticas en el espacio anisótropo ε_{ij}^e y el espacio isótropo $\bar{\varepsilon}_{ij}^e$ a través de la siguiente relación:

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^e = A_{ijkl}^\varepsilon \varepsilon_{kl}^e \quad (10)$$

donde \mathbf{A}^ε es un tensor de cuarto orden que establece la relación entre los tensores de deformaciones en los espacios isótropo y anisótropo, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ son los tensores de deformaciones en el espacio isótropo y anisótropo respectivamente. Esta hipótesis implica no unicidad en las deformaciones elásticas entre espacios. El *tensor de transformación de las deformaciones* \mathbf{A}^ε resulta de tener en cuenta la ec.(5), la ec.(10) y la ecuación constitutiva en los espacios anisótropo real e isótropo ficticio (ecs.1 y 2):⁸

$$A_{mnr s}^\varepsilon = (\bar{C}_{mnij})^{-1} A_{ijkl}^\sigma C_{klrs} \quad (11)$$

donde \bar{C}_{mnij} es el tensor constitutivo en el espacio isótropo ficticio y C_{klrs} es el tensor constitutivo en el espacio anisótropo. La elección de \bar{C}_{ijmn} es arbitraria y puede estar representado por las propiedades de cualquier material isótropo conocido, debido a que solo se utiliza para trabajar en el espacio ficticio y luego se cancela su influencia al regresar al espacio real.

El tensor constitutivo anisótropo real \mathbf{C} está expresado en coordenadas locales, por lo tanto resulta necesario transformarlo al sistema de referencia global.

En la Figura 1 se observan los espacios de tensiones y deformaciones anisótropo e isótropo y la relación entre los mismos a través de los tensores de cuarto orden de transformación de espacios (\mathbf{A}^σ) y (\mathbf{A}^ε). En la misma Figura se presenta también la relación constitutiva en ambos espacios.

MODELO ELASTO-PLÁSTICO EN GRANDES DEFORMACIONES

Uno de los aspectos más complejos en la formulación de las ecuaciones constitutivas bajo régimen de grandes deformaciones es tener en cuenta la anisotropía de manera adecuada debido a los cambios cinemáticos. La cinemática utilizada en este trabajo se basa en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$.

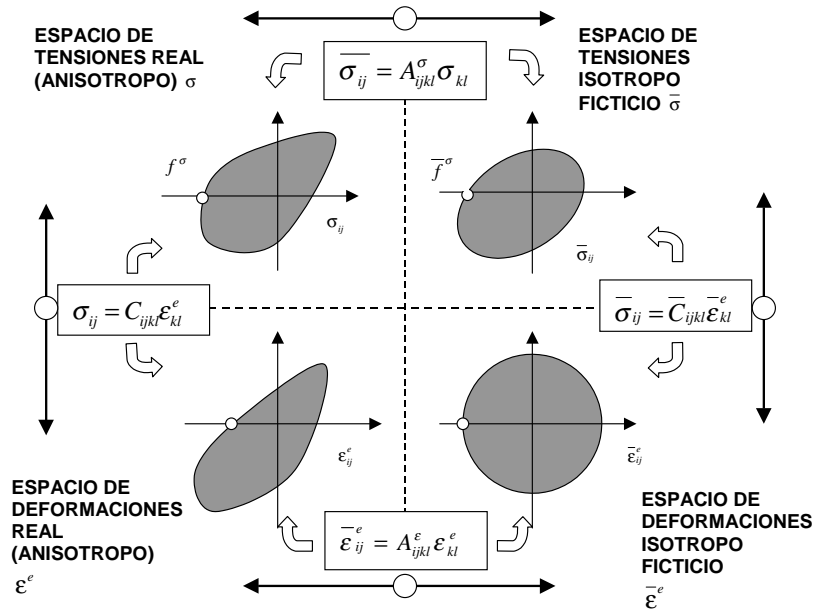


Figura 1: Transformación de espacios. Espacios de tensiones y deformaciones reales y ficticios en pequeñas deformaciones.

En la cinemática del continuo elastoplástico con grandes deformaciones se distinguen tres configuraciones: original ${}^0\Omega$, intermedia ${}^e\Omega^t$ y deformada ${}^t\Omega$. La configuración intermedia ${}^e\Omega^t$, está definida por un sistema de coordenada $\bar{\mathbf{X}}$. La descomposición multiplicativa surge de la propia definición del tensor gradiente de deformación, esto es

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (12)$$

donde \mathbf{F}^e y \mathbf{F}^p son las componentes elástica y plástica respectivamente del gradiente de deformaciones. El tensor elástico \mathbf{F}^e se obtiene realizando una descarga elástica de los puntos que conforman la configuración deformada. Esta descarga elástica genera lo que se llama configuración intermedia ${}^e\Omega^t$.

Caso de pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones inelásticas. Expresión de la energía libre.

Los materiales compuestos, a excepción de los materiales elastómeros, presentan deformaciones elásticas pequeñas. Esto conduce a que la parte elástica del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F}^e se aproxime a la identidad y la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green $(\mathbf{b}^e)^{-1}$ tienda al tensor métrico espacial \mathbf{g} . En este caso la distinción entre configuración intermedia y deformada carece de importancia porque prácticamente coinciden. Sin embargo, las deformaciones plásticas continúan siendo finitas y es necesario mantener la presencia del tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} en la expresión del modelo constitutivo. Si este tensor no se tiene en cuenta explícitamente, se está definiendo un material, matemáticamente válido pero sin validez física. Para el caso de pequeñas deformaciones elásticas, resulta suficiente caracterizar la componente elástica de la energía libre mediante una función cuadrática del tensor elástico de deformaciones de Almansi \mathbf{e}^e , esto es:

$$\psi^e = \frac{1}{2m} \mathbf{e}^e : \mathbf{c} : \mathbf{e}^e \quad (13)$$

donde \mathbf{c} es el tensor constitutivo en la configuración actualizada.

Ecuación constitutiva

Teniendo en cuenta la expresión de la disipación en la configuración actualizada, la descomposición aditiva de las deformaciones de Almansi y la expresión de la energía libre (ec.13) , las tensiones de Kirchhoff se obtienen como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c} : \mathbf{e}^e = \mathbf{c} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \quad (14)$$

donde \mathbf{c} es el tensor constitutivo en la configuración actualizada. En la ec. (14) el tensor constitutivo \mathbf{c} es posible considerarlo constante en la configuración actualizada o en la referencial. En el caso de considerarlo constante en la configuración referencial el tensor constitutivo \mathbf{c} resulta de un "push forward" del tensor constitutivo en la configuración referencial. En la definición de la ecuación constitutiva, y a los fines de la implementación numérica del modelo constitutivo, se utilizarán las variables espaciales que describen más naturalmente la física del problema. Lo anterior no impide que el modelo constitutivo pueda formularse utilizando variables materiales o con referencia a otra configuración distinta de la deformada. En el caso de considerar el tensor constitutivo \mathbf{c} constante en la configuración actualizada el tensor constitutivo en la configuración referencial resulta de un "pull back" del mismo en la configuración actualizada.

Condición de fluencia

La condición de fluencia distingue entre dos estados, uno elástico que se encuentra en el interior del dominio delimitado por la llamada función de fluencia y otro estado plástico que se localiza sobre dicha superficie.^{9,15} La condición de fluencia depende fundamentalmente del tipo de material y se define en la configuración actualizada de la siguiente forma:

$$\phi(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{g}; \alpha) = F(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{g}) - k(\alpha) = 0 \quad (15)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff , \mathbf{g} es el tensor métrico en la configuración actualizada y α es la variable interna de plasticidad que controla la evolución de la superficie ϕ .

Regla de flujo

La regla de flujo establece la ley de evolución de las deformaciones plásticas y se define en la configuración actualizada como:

$$L_v(\mathbf{e})^p = \mathbf{d}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (16)$$

donde $g = g(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{g})$ es la función de potencial plástico y $\dot{\lambda}$ es una función escalar no negativa conocida como parámetro de consistencia plástica que cumple con las condiciones de Kuhn-Tucker.^{9,15}

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \phi(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{g}; \alpha) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \phi(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{g}; \alpha) = 0 \quad (17)$$

Las condiciones dadas por la ec. (17) se conocen en la terminología clásica como condiciones de carga y descarga. Además, debe cumplirse la condición de persistencia expresada por la derivada objetiva de la función de fluencia:

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{g}; \alpha) = 0 \quad (18)$$

Tensor constitutivo elastoplástico tangente

El tensor constitutivo elastoplástico tangente relaciona el tensor de tensiones de Kirchhoff con las deformaciones de Almansi en la forma:

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{c}^{ep} : L_v(\mathbf{e}) \quad (19)$$

La derivada objetiva de la ec. (14) establece la ley de evolución de las tensiones de Kirchhoff

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = L_v(\mathbf{c}) : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) + \mathbf{c} : [L_v(\mathbf{e}) - L_v(\mathbf{e}^p)] \quad (20)$$

Tensor constitutivo constante en la configuración actualizada

Como se ha dicho anteriormente el tensor constitutivo puede considerarse constante en la configuración referencial o en la actualizada, dando lugar a la definición de materiales distintos. Si se parte de la hipótesis de que el tensor constitutivo \mathbf{c} se mantiene constante en la configuración actualizada, teniendo en cuenta la condición de persistencia (ec. (18)) y la definición de la condición de fluencia en la configuración actualizada (ec.(15)) la condición de consistencia puede reescribirse como:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : L_v(\boldsymbol{\tau}) + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{g}} : L_v(\mathbf{g}) + \frac{\partial \phi}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \quad (21)$$

donde $\dot{\alpha}$ representa la ley de evolución de las variables internas y está dada por:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \left[h_\kappa : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] = h_\kappa : L_v(\mathbf{e}^p) \quad (22)$$

donde h_κ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones y de la variable de endurecimiento plástico k ; que en el caso más simple de la teoría incremental de la plasticidad toma la forma del tensor de tensiones de Kirchhoff . La derivada objetiva del tensor métrico espacial se obtiene teniendo en cuenta la relación entre la variación temporal del tensor derecho de Cauchy - Green y la variación temporal del tensor de deformaciones de Green - Lagrange

$$\dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}} \quad (23)$$

En la configuración actualizada la relación anterior se escribe como:

$$L_v(\mathbf{g}) = 2L_v(\mathbf{e}) \quad (24)$$

Considerando la ec. (24), la ec. (18), la ec. (16), la ec. (20), la igualdad $L_v(\mathbf{c}) : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) = \mathbf{d} : L_v(\mathbf{e})^7$ se obtienen el parámetro de consistencia plástica y la expresión del tensor constitutivo elastoplástico tangente en la configuración actualizada:

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = \left[(\mathbf{c} + \mathbf{d}) - \frac{\left[\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : (\mathbf{c} + \mathbf{d}) + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{g}} \right] \otimes \left(\mathbf{c} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right)}{\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{c} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \frac{\partial k}{\partial \kappa} \left[h_\kappa : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right]} \right] : L_v(\mathbf{e}) = \mathbf{c}^{ep} : L_v(\mathbf{e}) \quad (25)$$

Tensor constitutivo constante en la configuración material

En el caso de considerar el tensor constitutivo \mathbf{c} constante en la configuración referencial el primer miembro de la ec. (20) es nulo, con lo cual la ley de evolución de la tensión resulta:

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{c} : [L_v(\mathbf{e}) - L_v(\mathbf{e}^p)] \quad (26)$$

Teniendo en cuenta la condición de consistencia (ec. 21) y el parámetro de consistencia plástica, el tensor constitutivo elastoplástico tangente

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = \left[\mathbf{c} - \frac{\left[\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{c} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{g}} \right] \otimes \left(\mathbf{c} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right)}{\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{c} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \frac{\partial k}{\partial \kappa} \left[h_\kappa : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right]} \right] : L_v(\mathbf{e}) = \mathbf{c}^{ep} : L_v(\mathbf{e}) \quad (27)$$

Extensión del modelo anisótropo a grandes deformaciones. Consideración de la anisotropía en el modelo isótropo

Formulación material

Para extender el modelo en grandes deformaciones a problemas anisótropos es necesario tener en cuenta la existencia de los espacios anisótropo real e isótropo ficticio en las configuraciones material y actualizada que han sido introducidas en el modelo en pequeñas deformaciones en el apartado . Por lo tanto en la teoría de grandes deformaciones es necesario definir los tensores de transformación de espacios en ambas configuraciones. La transformación del segundo tensor de tensiones de Piola - Kirchhoff del espacio anisótropo al espacio isótropo se realiza en forma análoga a la ya presentada en la ec. (5)

$$\bar{\mathbf{S}}_{IJ} = A_{IJKL}^S \mathbf{S}_{KL} \quad (28)$$

donde \mathbf{A}^S es un tensor de cuarto orden que establece la relación entre los tensores de tensiones en los espacios ficticio y real, $\bar{\mathbf{S}}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola - Kirchhoff en el espacio isótropo y \mathbf{S} es el segundo tensor de tensiones de Piola - Kirchhoff en el espacio anisótropo. El tensor de cuarto orden \mathbf{A}^S se define en la configuración referencial y permanece constante en esta configuración.

Se define también la relación entre las deformaciones de Green-Lagrange elásticas en el espacio anisótropo E_{IJ}^e y las deformaciones de Green-Lagrange elásticas en el espacio isótropo \bar{E}_{IJ}^e también en forma análoga a la ya presentada en la ec. (10)

$$\bar{E}_{IJ}^e = A_{IJKL}^E E_{KL}^e \quad (29)$$

donde \mathbf{A}^E es un tensor de cuarto orden que establece la relación entre los tensores de deformaciones de Green - Lagrange en los espacios isótropo y anisótropo, $\bar{\mathbf{E}}$ es el tensor de deformaciones de Green - Lagrange en el espacio isótropo y \mathbf{E} es el tensor de deformaciones de Green - Lagrange anisótropo. Esta hipótesis implica no unicidad en las deformaciones elásticas entre espacios. El *tensor de transformación de las deformaciones* \mathbf{A}^E es posible calcularlo teniendo en cuenta la ec.(28) y la ec.(29) y resulta equivalente a la expresión dada en la ec. (11)

$$A_{MNR S}^E = (\bar{C}_{MNIJ})^{-1} A_{IJKL}^S C_{KLR S} \quad (30)$$

donde \bar{C}_{MNIJ} es el tensor constitutivo en el espacio isótropo ficticio y $C_{KLR S}$ es el tensor constitutivo en el espacio anisótropo real. La elección de \bar{C}_{IJKL} es arbitraria y puede estar representado por las propiedades de cualquier material conocido isótropo, debido a que solo se utiliza para trabajar en el espacio ficticio y luego se cancela su influencia al regresar al espacio real.

El tensor constitutivo anisótropo real \mathbf{C} está expresado en coordenadas locales, por lo tanto resulta necesario transformarlo al sistema de referencia global.

Formulación en la configuración actualizada

En forma análoga al tratamiento realizado con la anisotropía en la configuración referencial, se presentan a continuación los tensores de transformación entre los espacios anisótropo real e isotrópico ficticio en la configuración actualizada. La relación entre los espacios de tensiones de Kirchhoff isotrópico ficticio y anisótropo real en la configuración actualizada se define a través de un tensor de cuarto orden como:

$$\bar{\tau}_{ij} = a_{ijkl}^{\tau} \tau_{kl} \quad (31)$$

donde \mathbf{a}^{τ} es un tensor de cuarto orden que establece la relación entre los tensores de tensiones en los espacios isotrópico y anisótropo en la configuración actualizada, $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ y $\boldsymbol{\tau}$ son los tensores de tensiones de Kirchhoff en el espacio isotrópico y anisótropo.

En el contexto de deformaciones finitas es necesario redefinir nuevamente el tensor cuarto orden que relaciona los espacios de tensiones de Kirchhoff ficticio y real. Esto se debe al hecho de que el tensor de cambio de espacios entre tensiones \mathbf{a}^{τ} en la configuración actualizada no es constante, resultando ser una función del tensor de cambio de tensiones en la configuración material \mathbf{A}^S y de los gradientes de deformaciones \mathbf{F} . El tensor de cambio de espacio en la configuración actualizada entre tensiones se obtiene teniendo la operación push-forward $\overrightarrow{\phi}$ del tensor de tensiones, con lo que se obtiene:⁸

$$a_{ijkl}^{\tau} = F_{iI} (F^{-1})_{Kk} (F^{-T})_{lL} (F^T)_{Jj} A_{IJKL}^S \quad (32)$$

La relación entre los espacios de deformaciones de Almansi isotrópico ficticio y anisótropo real en la configuración actualizada se define a través de un tensor de cuarto orden

$$\bar{e}_{ij} = a_{ijkl}^e e_{kl} \quad (33)$$

donde \mathbf{a}^e es un tensor de cuarto orden que establece la relación entre los tensores de deformaciones de Almansi en los espacios isotrópico y anisótropo en la configuración actualizada, $\bar{\mathbf{e}}$ y \mathbf{e} son los tensores de deformaciones de Almansi en el espacio isotrópico y anisótropo.

En forma análoga al tensor de cambio de espacios de tensiones en la configuración actualizada, el tensor de transformación de espacios de deformaciones en la configuración actualizada resulta:⁸

$$a_{ijkl}^e = (F^{-T})_{iI} (F^T)_{Kk} F_{lL} (F^{-1})_{Jj} A_{IJKL}^E \quad (34)$$

En la Figura 2 se observan los tensores que relacionan los espacios de tensiones y deformaciones reales con los espacios de tensiones y deformaciones ficticias en la configuración de referencia \mathbf{A}^S y \mathbf{A}^E respectivamente y en la configuración actualizada \mathbf{a}^{τ} y \mathbf{a}^e respectivamente.

Regla de flujo de un material anisótropo. Ley de evolución de las variables internas.

La ley de evolución en el tiempo de las deformaciones plásticas en la configuración actualizada está dada por:

$$L_v(\mathbf{e}^p) = \mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (35)$$

Teniendo en cuenta que toda la información sobre la anisotropía del material está contenida en el tensor de transformación \mathbf{a}^{τ} , la función de potencial plástico para el sólido anisótropo se propone como:

$$g(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{g}; \alpha) = \bar{g}(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{a}^{\tau}; \mathbf{g}; \alpha) = \bar{g}(\bar{\boldsymbol{\tau}}; \mathbf{g}; \alpha) = k \quad (36)$$

Reemplazando la ec.(36) en la ec.(35) el incremento de la cuota plástica de la deformación de Almansi resulta:

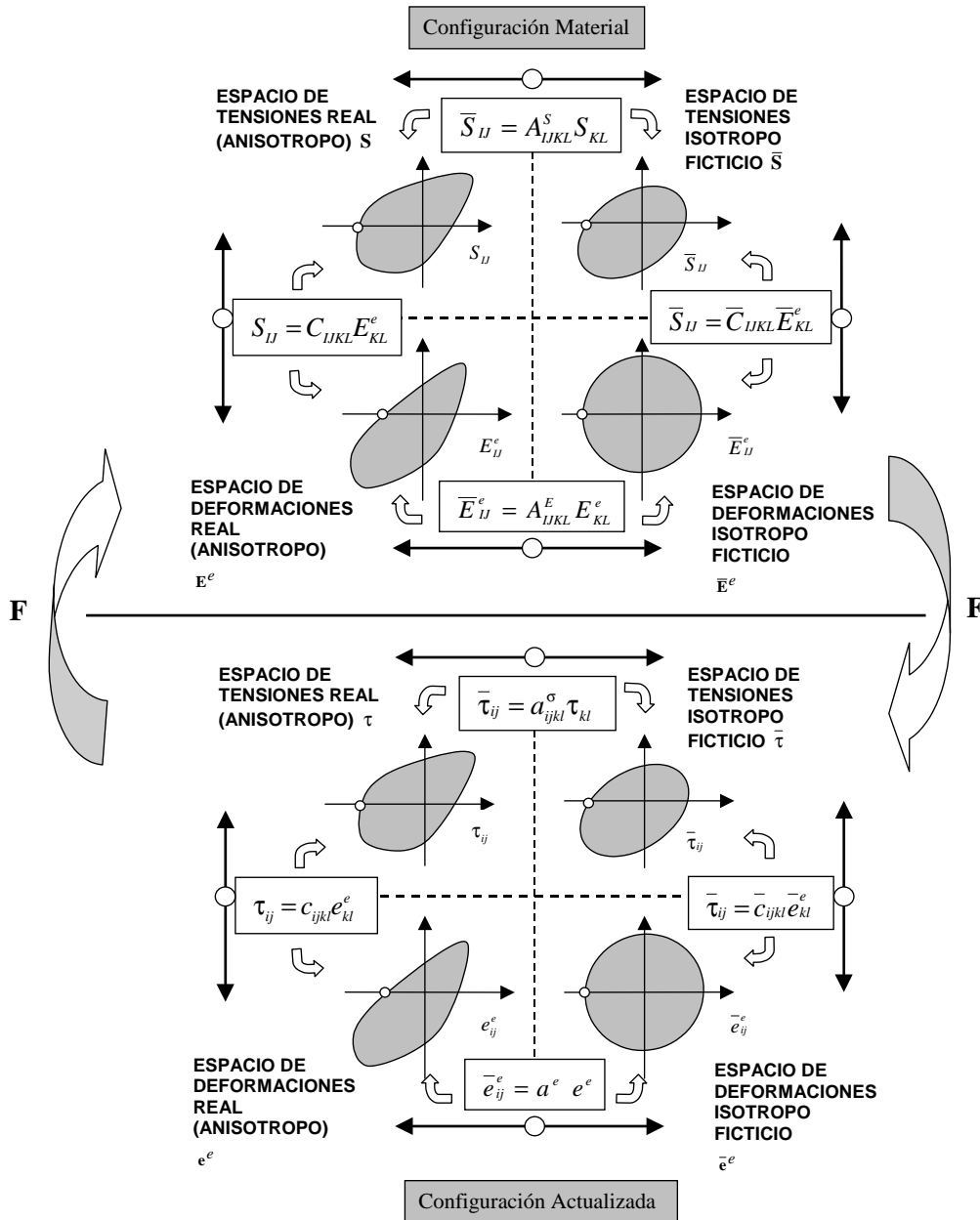


Figura 2: Extensión del modelo anisótropo a grandes deformaciones. Dualidad de espacios en las configuraciones material y actualizada

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \mathbf{a}^\tau = \left(\dot{\bar{\mathbf{e}}} \right)^\tau : \mathbf{a}^\tau \quad (37)$$

donde $\left(\dot{\bar{\mathbf{e}}} \right)^\tau$ es el flujo plástico normal al potencial plástico isótropo \bar{g} . El concepto de aditividad en la velocidad de las deformaciones permite extender la regla de transformación de las deformaciones a la cuota plástica de las deformaciones, es decir:

$$\bar{\mathbf{d}}^p = \mathbf{a}^e : \mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \mathbf{a}^e : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \mathbf{a}^\tau = \mathbf{a}^e : \left(\dot{\bar{\mathbf{e}}} \right)^\tau : \mathbf{a}^\tau \quad (38)$$

donde $\bar{\mathbf{d}}^p$ es la deformación plástica isótropa ficticia en la configuración actualizada. La ley de evolución de la variable interna de endurecimiento plástico está dado por:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} (\mathbf{h}^m)_\sigma : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} (\mathbf{h}^m)_\sigma : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} (\mathbf{h}^m)_\sigma : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \mathbf{a}^\tau \quad (39)$$

donde $(\mathbf{h}^m)_\sigma$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada que en el caso más simple de la teoría de la plasticidad toma la forma del tensor de tensiones. La ley de evolución de la variable interna resulta:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \bar{\boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (40)$$

CONCLUSIONES

Las técnicas convencionales analíticas utilizadas para el análisis de materiales simples isótropos no resultan adecuadas para el análisis de materiales compuestos. Por ello resulta necesario a los fines de modelar materiales compuestos introducir teorías que permitan simular el comportamiento de materiales que presentan características diferentes de los materiales isótropos tradicionales.

En esta primera parte del trabajo se presenta una generalización de la teoría de la plasticidad isótropa clásica al campo anisótropo multifase y su extensión a la teoría de grandes deformaciones. Esta teoría anisótropa está basada en el concepto de mapeo de tensores desde el espacio anisótropo real al isótropo ficticio.

La teoría anisótropa que aquí se desarrolla es una generalización de la teoría isótropa y está basada en una transformación afín del tensor de tensiones y deformaciones a través de un tensor de cuarto orden. Esta transformación garantiza la convexidad de las funciones de fluencia y potencial plástico y asegura que el material no retorna a un estado elástico una vez que ha plastificado bajo un estado de carga creciente.

El tratamiento anisótropo de sólidos basados en el concepto de *tensores mapeados* permite utilizar las ventajas y algoritmos utilizados y desarrollados para el caso de materiales isótropos, con las consiguientes beneficios en la implementación computacional en un código de elementos finitos del modelo propuesto.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a la empresa Construcciones Aeronáuticas S.A. (CASA) División Espacio y en especial a Pedro Luengo por su desinteresada colaboración. El primero de los autores desea también expresar su agradecimiento a la Generalitat de Catalunya por el apoyo económico prestado a través de la beca 1998TDOC00065.

Referencias

- [1] F. Barlat, D. J. Lege, and J. C. Brem. A six-component yield function for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity*, 7:693, 1991.
- [2] F. Barlat and J. Lian. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. part i: A yield function for orthotropic sheet under plane stress conditions. *Int. Journal of Plasticity*, 5:51, 1989.
- [3] J. L. Bassani. Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties. *Int. J. Mech. Sci.*, 19:651, 1977.
- [4] J. Betten. Creep theory of anisotropic solids. *J. Rheol.*, 25:565–581, 1981.
- [5] J. Betten. Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 4:29–46, 1988.
- [6] B. Budiansky. Anisotropic plasticity of plane-isotropic sheet. In G. J. Dvorak and R. T. Shield, editors, *Mechanics of Material Behavior*, page 15, Amsterdam, 1984. Elsevier.
- [7] J. C. Cante. *Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. Aplicación de técnicas de cálculo paralelo*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1995.
- [8] E. Car, S. Oller, and E. Oñate. An anisotropic elastoplastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials. *Submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998.
- [9] M. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- [10] H. G. Eggleston. *Convexity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1969.
- [11] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, 1971.
- [12] R. Hill. Theoretical plasticity of textured aggregates. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 85(1):179 – 191, 1979.
- [13] R. Hill. Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38(3):405 – 417, 1990.
- [14] D. Hull. *An Introduction to Composite Materials*. Cambridge University Press, 1987.
- [15] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, U.S.A., 1990.
- [16] L. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, 1969.
- [17] F. L. Matthews and R. D. Rawlings. *Composite Materials: Engineering and Science*. Chapman and Hall, 1994.
- [18] S. Oller, E. Oñate, and J. Miquel. Simulation of anisotropic elastic-plastic behaviour of materials by means of an isotropic formulation. In *2nd. US Nat. Congr. Comput. Mech.*, Washington DC, 1993.
- [19] S. Oller, E. Oñate, J. Miquel, and S. Botello. A finite element model for analysis of multiphase composite materials. In A. Miravete, editor, *Ninth International Conferences on Composite Materials*, Zaragoza - Spain, 1993. Woodhead Publishing Limited.
- [20] R. Pendleton and M. Tuttle. *Manual on Experimental Methods for Mechanical Testing of Composites*. Elsevier Applied Science Publishers, 1989.