

# ANÁLISIS SÍSMICO DE EDIFICIOS CON DISPOSITIVOS DE AISLAMIENTO DE BASE DE ELASTÓMERO LAMINADO

**Omar Salomón**

*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)  
Universidad Politécnica de Cataluña, Campus Norte UPC, 08034 Barcelona, España*

**Sergio Oller y Alex Barbat**

*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Cataluña, Campus Norte UPC, 08034 Barcelona, España*

## RESUMEN

La capacidad de los elastómeros laminados de soportar grandes cargas en compresión y grandes deformaciones en corte es la razón para su utilización en dispositivos de aislamiento sísmico. La capacidad de estos dispositivos para disipar energía se incrementa con la utilización de elastómeros de alto amortiguamiento, los cuales incorporan partículas a tal efecto. Se propone la utilización de un modelo viscoelástico para representar el comportamiento mecánico del caucho y un modelo elastoplástico para la componente partículas, ambos en grandes deformaciones. El modelo global de sólido compuesto multifase se logra mediante la participación de cada componente según su proporción en volumen y admitiendo perfecta compatibilidad cinemática entre componentes.

El modelo propuesto es validado utilizando resultados experimentales previos. Como ejemplo de aplicación se analiza un edificio de seis plantas, con y sin aislamiento de base, sometido al movimiento sísmico de El Centro.

## ABSTRACT

The capacity of rubber-like materials to support high loads in compression and large displacements in shear is the principal reason for its use in devices for seismic isolation. Energy-dissipation devices are obtained by using high damping rubber, elastomer improved by carbon-black particles. The Ogden strain energy function have been used as the basis for the material model implemented in a total Lagrangian formulation, decomposing the strain in its deviatoric and volumetric parts and condensing the pressure variable at element level. The stress-strain hysteresis, which appear when these devices are subjected to dynamic or quasi-static cyclic loading, have been modelled by frequency dependent visco-elasticity and plasticity constitutive models.

The proposed model is validated using experimental results and a base isolated structure, a six-story reinforced concrete frame with high damping rubber bearings, is analyzed and compared with a similar fixed-base structure, both having been subjected to El Centro earthquake.

Los sistemas de aislamiento de base desacoplan parcialmente una estructura del movimiento del terreno por medio de dispositivos colocados entre la estructura y su fundación.<sup>1,12,13</sup> Entre los diversos tipos de dispositivos existentes, los de elastómero laminado son, probablemente, los más utilizados. Estos dispositivos están compuestos por láminas o capas de caucho vulcanizadas a capas acero, estas últimas impiden la expansión lateral del caucho, incrementando la rigidez vertical de los dispositivos.

La función del elastómero es lograr dispositivos con gran flexibilidad horizontal. De esta manera se consigue incrementar el período fundamental del edificio, alejándolo del período predominante de los terremotos esperados en la zona, con la consiguiente reducción de las amplificaciones dinámicas. Además, durante la ocurrencia del movimiento sísmico, los desplazamientos se concentran en los dispositivos, reduciéndose drásticamente los desplazamientos relativos entre pisos del edificio; en consecuencia, el daño en la estructura y componentes no estructurales resulta mínimo. Utilizando elastómeros de alto amortiguamiento o introduciendo un núcleo de plomo en los dispositivos, se logran sistemas con capacidad de disipación de energía.

Los dispositivos de elastómero laminado han sido ensayados experimentalmente con cierta amplitud,<sup>3,4,13</sup> no obstante son pocos los modelos analíticos publicados.<sup>8,9</sup> Este trabajo es una contribución al análisis numérico de edificios con aislamiento de base mediante dispositivos de elastómero laminado. Se desarrolla un modelo analítico y numérico para el análisis dinámico no lineal de este tipo de sistemas. El modelo propuesto considera las grandes deformaciones elásticas marcadamente no lineales de los elastómeros, la quasi-incompresibilidad de estos materiales y sus características disipativas. La estructura de hormigón armado también es considerada con comportamiento no lineal, mediante la aplicación de un modelo constitutivo de degradación para el hormigón combinado con un modelo elasto-plástico para las barras de acero.<sup>2,6</sup>

## ELASTÓMEROS - MODELO PROPUESTO

Se propone un modelo fenomenológico, donde no se consideran aspectos micro-mecánicos. Debido a la cuasi-incompresibilidad de los elastómeros, se tratan las partes volumétrica y desviadora de la deformación de forma independiente. Considerando que la magnitud del amortiguamiento depende de las componentes del material, diferentes modelos son considerados para cada sustancia, viscoelasticidad para el caucho y elastoplasticidad para las partículas agregadas.<sup>10</sup> Utilizando teoría de mezclas<sup>6</sup> se incorporan las expresiones constitutivas básicas de cada componente en un sólido compuesto multi-fase. El comportamiento global del compuesto es influenciado por las características mecánicas de cada componente simple de acuerdo a su proporción en volumen. Como ecuación de restricción o cierre del modelo se admite una perfecta compatibilidad cinemática en todos los instantes de tiempo del proceso analizado. Finalmente, al no incluir la temperatura como variable de las funciones energía de deformación, el modelo propuesto está limitado a condiciones térmicamente estables.

Los tensores de tensiones pueden expresarse en función de la energía de deformación  $W$ , en la forma:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W^C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{y} \quad J \boldsymbol{\sigma} = 2 \mathbf{F} \frac{\partial W^C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (1)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy.

Si el material es isótropo  $W^C$  tendría la misma forma cualquiera sea el sistema de ejes coordenados tomado como referencia, por lo que  $W^C$  es un invariante del tensor  $\mathbf{C}$ , y puede ser expresado en función de otros invariantes de  $\mathbf{C}$ , en la forma

$$W^C(\mathbf{C}) = W^I(I_1, I_2, I_3) \quad (2)$$

Si además el material es incompresible,  $J_3 = 1$ . Esto simplifica en la expresión de  $W^T$ , pero genera otras dificultades. Para superarlas y desacoplar las respuestas volumétrica y desviadora,  $\mathbf{F}$  es descompuesto multiplicativamente

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol}\bar{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{F}_{vol} = J^{1/3}\mathbf{1}, \quad \bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F} \quad (3)$$

donde  $J = \det[\mathbf{F}] = \det[\mathbf{F}_{vol}]$ ,  $\det[\bar{\mathbf{F}}] = 1$ . De aquí en adelante, una variable sobre-lineada ( $\bar{\cdot}$ ) implica que se trata de la parte desviadora de la misma.

Utilizando (3) la función energía de deformación puede ser expresada en una descomposición aditiva de sus partes desviadora y volumétrica

$$W^C = W(J) + \bar{W}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (4)$$

siendo  $\bar{\mathbf{C}}$  la parte desviadora del tensor derecho de Cauchy-Green,  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T\bar{\mathbf{F}}$ .

Funciones energía de deformación desacopladas conducen a relaciones tensión-deformación desacopladas. Asociada con la deformación volumétrica, existe una presión  $p$

$$p = \partial_J W(J) = W'(J) \rightarrow \sigma_v = W'(J)\mathbf{1} \quad (5)$$

O, en términos del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{S}_v = JW'(J)\mathbf{C}^{-1}$

Con relación a la parte desviadora del modelo, considerando (3) y (4) y de la ecuación de restricción, esto es compatibilidad cinemática en todos los instantes de tiempo,

$$\bar{\mathbf{F}}_{caucho} \equiv \bar{\mathbf{F}}_{particulas} \equiv \bar{\mathbf{F}} \quad (6)$$

Debe ahora considerarse que la respuesta del caucho y de las partículas agregadas no es el mismo. Para la parte elastomérica se propone un modelo constitutivo básico de tipo viscoelástico, con  $\bar{W}(\bar{\mathbf{C}})$  válido para historias de deformación infinitamente lentas  $\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}})$ . Para deformaciones dependientes del tiempo, se incluyen en la función energía de deformación  $W$  variables internas  $\alpha$  que toman en consideración los efectos viscoelásticos

$$\bar{W}_{caucho} = \bar{W}_{ve}(\bar{\mathbf{C}}, \alpha) \quad (7)$$

Para las partículas agregadas se propone un modelo elasto-plástico, en consecuencia,  $\bar{\mathbf{F}}$  es descompuesto multiplicativamente  $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}^e\bar{\mathbf{F}}^p \rightarrow \bar{\mathbf{b}}^e = \bar{\mathbf{F}}^e\bar{\mathbf{F}}^{eT}$ , siendo  $\bar{\mathbf{b}}^e$  la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green, la cual es utilizada para escribir la función energía de deformación de la componente partículas

$$\bar{W}_{particulas} = \bar{W}_{ep}(\bar{\mathbf{b}}^e, \xi) \quad (8)$$

Utilizando teoría de mezclas, el comportamiento global del sólido compuesto puede expresarse en forma aditiva<sup>9</sup>

$$W = W(J) + kr[\bar{W}_{ve}(\bar{\mathbf{C}}, \alpha)] + kp[\bar{W}_{ep}(\bar{\mathbf{b}}^e, \xi)] \quad (9)$$

donde  $kr$  y  $kp$  son las proporciones en volumen de las componentes caucho y partículas agregadas. Considerando ahora esta expresión aditiva de la función energía de deformación, el tensor de tensiones resulta,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{vol} + kr\bar{\mathbf{S}}_{ve} + kp\bar{\mathbf{S}}_{ep} \quad (10)$$

En las secciones siguientes se analiza la derivación de las componentes del modelo, comenzando con la componente elástica; posteriormente se analizan la extensión viscoelástica y la componente plástica del mismo.

La función energía de deformación puede ser expresada en función del tensor de Cauchy-Green (1), o de sus invariantes (2), y los invariantes de un tensor simétrico de segundo orden pueden expresarse como

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= 1/2(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)) = \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \cdot \lambda_1^2 + \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (11)$$

siendo  $\lambda_i$  los valores propios (*principal stretches*) del tensor  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$ . Por lo tanto, una forma alternativa de expresar la función energía de deformación es utilizar los valores propios de los tensores  $\mathbf{U}$  o  $\mathbf{C}$ ,

$$W^U(\mathbf{U}) = W^\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (12)$$

A partir de (12) los tensores de tensiones pueden obtenerse recordando (1) y aplicando la regla de la cadena

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W^C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{A=1}^3 \frac{1}{\lambda_A} \frac{\partial W^\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_A} \frac{\partial(\lambda_A^2)}{\partial \mathbf{C}} \quad (13)$$

Los tensores derecho e izquierdo de Cauchy-Green,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{b}$ , admiten una *descomposición espectral*:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=A}^3 \lambda_A^2 \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A^2 \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (14)$$

donde  $\lambda_A^2$  son los valores propios de  $\mathbf{C}$  o  $\mathbf{b}$ , y  $\mathbf{N}_A$  y  $\mathbf{n}_A$  son sus respectivos autovectores unitarios. Esto permite expresar el segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff  $\mathbf{S}$  como

$$\mathbf{S} = \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{M}_A \quad \text{con} \quad \mathbf{M}_A = \lambda_A^{-2} \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad (15)$$

donde  $\beta_A$  expresa las tensiones principales desviadoras,  $\beta_A = \lambda_A \partial W^\lambda / \partial \lambda_A$ . En forma análoga y recordando (1), se puede expresar el tensor de Cauchy  $\sigma$  en la forma:

$$\sigma = \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{m}_A \quad \text{con} \quad \mathbf{m}_A = \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A = \mathbf{F} \mathbf{M}_A \mathbf{F}^T \quad (16)$$

Derivando nuevamente (13) a partir de (15), se obtiene el correspondiente tensor constitutivo en la configuración no deformada,

$$\mathbb{C} = \sum_{A=1}^3 \left[ \sum_{B=1}^3 \gamma_{AB} \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{M}_B \right] + \sum_{A=1}^3 2\beta_A \frac{\partial \mathbf{M}_A}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{donde} \quad \gamma_{AB} = \gamma_{BA} = \lambda_B \frac{\partial}{\partial \lambda_B} \left( \lambda_A \frac{\partial W^\lambda}{\partial \lambda_B} \right) \quad (17)$$

Nótese que estas ecuaciones son válidas para cualquier función energía de deformación y por lo tanto constituyen un planteo general de elasticidad en grandes deformaciones formulado en términos de los estiramientos principales.

La función energía de deformación de Ogden,<sup>5</sup>

$$W^\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (18)$$

donde  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) son números reales y  $N$  es un entero positivo, tal que  $\sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i = 2\mu$ , siendo  $\mu$  el modulo de corte del material en la configuración de referencia, es la utilizada en este trabajo para modelar la componente elástica de los elastómeros.

## Componente viscoelástica

Los elastómeros, especialmente aquellos denominados de alto amortiguamiento, cuando son sometidos a cargas cíclicas presentan en su respuesta fuerza-desplazamiento una componente no-elástica. La amplitud de esta componente no-elástica depende naturalmente del tipo de elastómero y también es función de la frecuencia de los desplazamientos impuestos,<sup>13</sup> lo cual motiva la consideración de modelos viscoelásticos en la simulación numérica de estos materiales.

Se propone para la parte viscoelástica de la energía de deformación  $\bar{W}_{ve}$  en (9) la forma aditiva

$$\bar{W}_{ve}(\bar{\mathbf{C}}, \Gamma) = \bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}) + \bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \Gamma^\alpha) \quad (19)$$

donde  $\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}})$  describe la respuesta desviadora del material para un tiempo  $t \rightarrow \infty$ , siendo  $\bar{\mathbf{C}}$  la parte desviadora del tensor derecho de Cauchy-Green. La componente  $\bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \Gamma^\alpha)$  describe la parte viscosa del modelo, la cual desaparece progresivamente durante el proceso de relajación, siendo  $\Gamma^\alpha$  variables internas tipo tensores de deformación. El comportamiento viscoso es modelado mediante  $\alpha$  procesos de relajación con  $\tau_\alpha \in (0, \infty)$  tiempos de relajación.

Partiendo de la desigualdad de Clausius-Duhem se obtiene para la parte desviadora del tensor de tensiones una forma aditiva de tensiones en equilibrio y no-equilibrio,

$$\bar{\mathbf{S}}_{ve} = 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}) + 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \Gamma^\alpha) = \bar{\mathbf{S}}^\infty + \sum_{\alpha=1}^m \mathbf{Q}^\alpha \quad (20)$$

siendo  $\mathbf{Q}^\alpha$  tensiones no equilibradas termodinámicamente, que pueden expresarse, mediante una integral de convolución, en la forma

$$\mathbf{Q}^\alpha = \exp[-t/\tau_\alpha]\gamma_\infty^\alpha [2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}_0)] + \int_0^t \gamma_\infty^\alpha \exp[-(t-s)/\tau_\alpha] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}_s)] ds \quad (21)$$

donde se supone la relación  $\bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}}) = \gamma_\infty^\alpha \bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}})$ , siendo  $\gamma_\infty^\alpha \in (0, \infty)$  factores asociados con  $\tau_\alpha$ . Esta adopción viene motivada por el hecho de que el medio viscoelástico es obviamente el mismo material elastomérico que ha sido modelado previamente como elástico. Por lo que, la función energía de deformación  $\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}})$  utilizada en este trabajo para modelar los elastómeros es la función energía de Ogden.

En la formulación del procedimiento en pasos discretos de tiempo la evaluación de la integral de convolución en (21) puede realizarse mediante una relación recursiva. Esta integral es definida como  $\mathbf{H}^\alpha$ ,

$$\mathbf{H}^\alpha = \int_0^t \exp[-(t-s)/\tau_\alpha] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}_s)] ds \quad (22)$$

## Componente elastoplástica

La función energía de deformación  $W$  para el sólido compuesto ha sido expresada en (9), separando las componentes volumétrica y desviadora de la deformación y considerando para esta última contribuciones viscoelásticas y elastoplásticas según las proporciones en volumen de las componentes elastómero y partículas, respectivamente. En esta sección se desarrolla el tratamiento del modelo elastoplástico.

Esta formulación está basada en la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  en sus partes elástica y plástica  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$  y mantiene la estructura de los modelos clásicos de plasticidad infinitesimal. Se procede de la siguiente forma:

En primer lugar se determina un estado elástico de prueba, para un incremento de deformaciones en el intervalo de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Este predictor elástico supone que las deformaciones plásticas  $\bar{\mathbf{F}}^p$  quedan fijas en el tiempo  $t_n$ ,

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e\ tr} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^e \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^{e\ T} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1} \bar{\mathbf{C}}_n^{p-1} \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^T \quad (23)$$

Después de una descomposición espectral de  $\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e\ tr}$ , los estiramientos logarítmicos principales elásticos son definidos como

$$\bar{\epsilon}_A^e = \log[\bar{\lambda}_A^e], \quad \text{con} \quad A = 1, 2, 3 \quad (24)$$

Para  $\bar{W}_{ep}$  en (9) se elige una forma desacoplada cuadrática en estiramientos logarítmicos principales,

$$\bar{W}_{ep}(\bar{\epsilon}_A^e, \xi) = \mu[\bar{\epsilon}^e \cdot \bar{\epsilon}^e] + K(\xi) \quad (25)$$

donde  $K(\xi)$  es una función caracterizando el endurecimiento isótropo en la respuesta del material. Las tensiones principales desviadoras  $\beta$  generadas por las deformaciones  $\bar{\epsilon}^e$ ,  $\beta = \partial_\epsilon \bar{W}_{ep}(\bar{\epsilon}_A^e, \xi)$ , son

$$\beta_{n+1}^{tr} = 2\mu\bar{\epsilon}_{n+1}^{e\ tr} \quad (26)$$

Las tensiones  $\beta_{n+1}^{tr}$  corresponden al estado de prueba. Si  $\phi(\beta_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_n) \leq 0$ , el incremento de deformación-tensión es puramente elástico, por lo tanto,  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{tr}$ . En caso contrario,  $\phi(\beta_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_n) > 0$ , las tensiones  $\beta_{n+1}^{tr}$  son proyectadas sobre el dominio elástico definiendo las tensiones reales  $\beta_{n+1}^e$  en cada punto del material,

$$\beta_{n+1}^e = \beta_{n+1}^{tr} - \Delta\gamma 2\mu\partial_\beta\phi(\beta, \mathbf{q}) \quad (27)$$

Para definir el dominio elástico se utiliza el criterio de fluencia de Von Mises, que es escrito en su forma clásica,

$$\phi(\tau, \xi) = \|\text{dev}[\tau]\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[\sigma_Y + K'(\xi)] \leq 0 \quad (28)$$

donde  $\sigma_Y$  es la tensión de fluencia,  $\xi$  es la deformación plástica equivalente,  $\|\text{dev}[\tau]\|$  es la raíz cuadrada del invariante  $J_2$  del tensor de tensiones de Kirchhoff  $\tau$ . De esta manera, las tensiones  $\beta$  en (27) se expresan como

$$\beta_{n+1} = \beta_{n+1}^{tr} - 2\mu\Delta\gamma\nu_{n+1} \quad (29)$$

siendo  $\nu$  el vector unitario normal al cilindro de Von Mises en el espacio de tensiones principales

$$\nu_{n+1} = \beta_{n+1} / \|\beta_{n+1}\|, \quad \|\text{dev}[\tau]\| = \|\beta\| \quad (30)$$

De la condición de consistencia,  $\phi_{n+1} = 0$ , se obtiene la ecuación para  $\Delta\gamma \geq 0$  durante el proceso de carga plástico

$$\phi_{n+1} = \phi_{n+1}^{tr} - 2\mu\Delta\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}}[K'(\xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma) - K'(\xi_n)] = 0 \quad (31)$$

Resuelta (29) y utilizando (26) el estado de deformación logarítmico es conocido. El tensor elástico final  $\mathbf{b}^e$ , que será utilizado en el calculo del tensor de deformaciones plástico  $\mathbf{C}^p$  en (23), se obtiene mediante un algoritmo exponencial<sup>8</sup>

$$\bar{\mathbf{b}}^e = \sum_{A=1}^3 \bar{\lambda}_A^{e\ 2} \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A, \quad \bar{\lambda}_A^e = \exp(\bar{\epsilon}_A^e), \quad \bar{\mathbf{C}}^{p-1} = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\mathbf{b}}^e \bar{\mathbf{F}}^{-t} \quad (32)$$

Es conocido que la formulación tradicional del método de los elementos finitos en desplazamientos, presenta problemas de mal condicionamiento de la matriz de rigidez y bloqueo de la solución cuando se tratan materiales cuasi incompresibles.<sup>11,14</sup> A fin de superar estos problemas, en este trabajo se utiliza un tratamiento en dos campos, en desplazamiento y presión, formulación  $\mathbf{u}/\mathbf{p}$ . A diferencia del campo de desplazamientos, que se considera continuo entre elementos, para la presión no se requiere tal continuidad y esta es considerada propia de cada elemento y por lo tanto puede ser condensada a nivel de elemento, antes de proceder con el ensamblaje de estos elementos.

La utilización de este desarrollo en una formulación  $\mathbf{u}/\mathbf{p}$  implica la modificación de la función de potencial, basada en desplazamientos  $\mathbf{u}$  o variables derivadas de estos (invariantes de las deformaciones o estiramientos principales), a efectos de incluir en la misma la presión  $\mathbf{p}$ . Una forma posible para esta función  $W$  es la dada por Sussman y Bathe,<sup>14</sup>

$$W = W_d - \frac{1}{2\kappa}(p - \tilde{p})^2 \quad (33)$$

siendo  $p$  la presión obtenida a partir del campo de desplazamientos y  $\tilde{p}$  una presión interpolada independientemente.

A nivel de elemento se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^t & \mathbf{K}_{up}^t \\ \mathbf{K}_{pu}^t & \mathbf{K}_{pp}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{t+\Delta t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^t \\ \mathbf{F}_p^t \end{bmatrix} \quad (34)$$

donde  $\mathbf{R}^{t+\Delta t}$  son las fuerzas nodales correspondientes a las cargas externas en el tiempo  $t + \Delta t$ . Suprimiendo el superíndice de tiempo  $t$  a efectos de simplificar la notación,

$$\mathbf{F}_u = \int_V \mathbf{B}_L^T \cdot \mathbf{S} \, dV, \quad \mathbf{F}_p = \int_V -C_{pp} (p - \tilde{p}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \hat{p}} \, dV = \mathbf{0} \quad (35)$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}_L^T : \mathbf{C}_{uu} : \mathbf{B}_L \, dV + \int_V \mathbf{B}_{NL}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_{NL} \, dV \quad (36)$$

$$\mathbf{K}_{up} = \int_V \mathbf{B}_L^T \cdot \mathbf{C}_{up} \, dV = \mathbf{K}_{pu}^T, \quad \mathbf{K}_{pp} = \int_V C_{pp} \, dV \quad (37)$$

siendo  $\mathbf{B}_L$  y  $\mathbf{B}_{NL}$  las clásicas relaciones deformación-desplazamiento lineal y no lineal, respectivamente,

$$C_{pp} = -\frac{1}{\kappa}, \quad \mathbf{C}_{up} = -C_{pp} \frac{\partial p}{\partial E_{kl}} \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_{uu} = \bar{\mathbf{C}} + C_{pp} \frac{\partial p}{\partial E_{kl}} \frac{\partial p}{\partial E_{rs}} + C_{pp}(p - \tilde{p}) \frac{\partial p}{\partial E_{kl} \partial E_{rs}} \quad (38)$$

A partir de aquí, se obtiene el segundo tensor de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}} + C_{pp}(p - \tilde{p}) \frac{\partial p}{\partial E_{kl}} \quad (39)$$

siendo  $\bar{\mathbf{S}}$  y  $\bar{\mathbf{C}}$  la parte desviadora del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y del tensor constitutivo en la configuración de referencia, respectivamente;  $\kappa$  es el modulo volumétrico del material, que para forzar una deformación a volumen cuasi constante debe tener un valor suficientemente alto, y  $\mathbf{E}$  es el tensor derecho de Green-Lagrange.

La presión  $p$ , depende del cambio de volumen ( $J_3$ ), producido por el campo de desplazamientos en cada punto de integración. Disponiendo de estas  $p$ , se obtiene una presión media  $\bar{p}$  a nivel de elemento. Naturalmente, y a diferencia del campo de desplazamientos, esta presión resulta discontinua entre elementos y por lo tanto también lo serán las tensiones. La condensación de la presión se realiza planteando las ecuaciones de equilibrio (34) y despejando la presión de la segunda de ellas,

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{K}_{pp}^{-1} (-\mathbf{F}_p - \mathbf{K}_{up}^T \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (40)$$

y luego se la reemplaza en la primera (34), quedando el siguiente sistema condensado

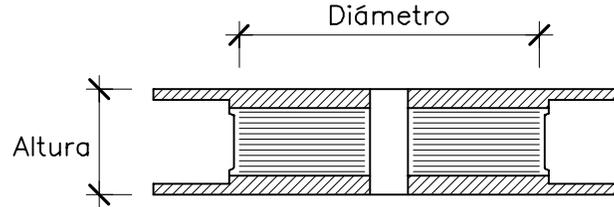
$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad \text{con} \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{up} \cdot \mathbf{K}_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{up}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_u - \mathbf{K}_{up} \cdot \mathbf{K}_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{F}_p^T \quad (41)$$

De esta forma, condensada a nivel elemental la variable de presión, se tiene una formulación en desplazamientos, con matrices de rigidez y vectores de fuerzas incrementados pero sin adicionar variable alguna al sistema global. Esta metodología se ha implementado en programa general de elementos finitos utilizando una formulación lagrangeana total.

## VALIDACIÓN NUMÉRICA

### Dispositivos de apoyo

Se ensayan dispositivos de caucho natural (*NRB = Natural Rubber Bearing*) y de alto amortiguamiento (*HRB = High Damping Rubber Bearing*) cuyas características son las indicadas en la figura 1.



Tipo	NRB	HRB
Diámetro (mm)	1600	1420
Area, $\pi \Phi^2/4$ (m <sup>2</sup> )	2.0106	1.5837
Altura (mm)	440	620
Espesor de las láminas de caucho (mm)	11.5	8
Número de láminas de caucho	19	31
Espesor de las láminas de acero (mm)	4.5	5.8
Número de láminas de acero	18	30

Figura 1: Características geométricas y mecánicas de los dispositivos ensayados. NRB = Natural Rubber Bearing. HRB = High Damping Rubber Bearing. SMiRT11 (1991).

Con el objetivo de determinar su rigidez horizontal y su amortiguamiento, al igual que confirmar similitudes entre modelos a escala real y modelos a escala reducida, estos dispositivos de apoyo fueron ensayados<sup>13</sup> bajo carga cíclica de baja frecuencia (0.01 Hz). Sobre los modelos a escala real se aplicaron cuatro ciclos de desplazamiento horizontal sinusoidal con carga vertical constante y amplitud variable entre un  $\pm 25\%$  y un  $\pm 200\%$  de deformación cortante. Sobre los modelos a escala reducida la amplitud de los ciclos de desplazamiento horizontal se extiende hasta  $\pm 400\%$ .

En el análisis numérico de los dispositivos *NRB* el modelo material aquí utilizado incluye sus partes hiperelástica y viscoelástica. La parte plástica del modelo se adiciona a las anteriores en el análisis de dispositivos

*HRB*. Los parámetros utilizados en el modelo hiperelástico y cinemático para ambos casos (*NRB* y *HRB*), son los indicados en la tabla 1.<sup>7</sup>

$G$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\mu_1^*$	$\mu_2^*$	$\mu_3^*$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
4.5	1.03	0.002	-0.02	1.9	5.9	-1.6

Tabla 1: Valores asignados a los parámetros materiales de los elastómeros.

Para el tiempo de relajación se utiliza un valor  $\tau = 0.5$  en el análisis de los dispositivos de caucho natural y  $\tau = 0.9$  en el análisis de dispositivos de alto amortiguamiento. La parte plástica del modelo, utilizada sólo en el caso de dispositivos de alto amortiguamiento, se obtiene al considerar una tensión de fluencia  $\sigma_y = 3.06$  kg/cm<sup>2</sup>, con endurecimientos isotrópico y cinemático nulos. En las figuras 2 y 3 se comparan las respuestas numéricas de este análisis con las experimentales.<sup>13</sup>

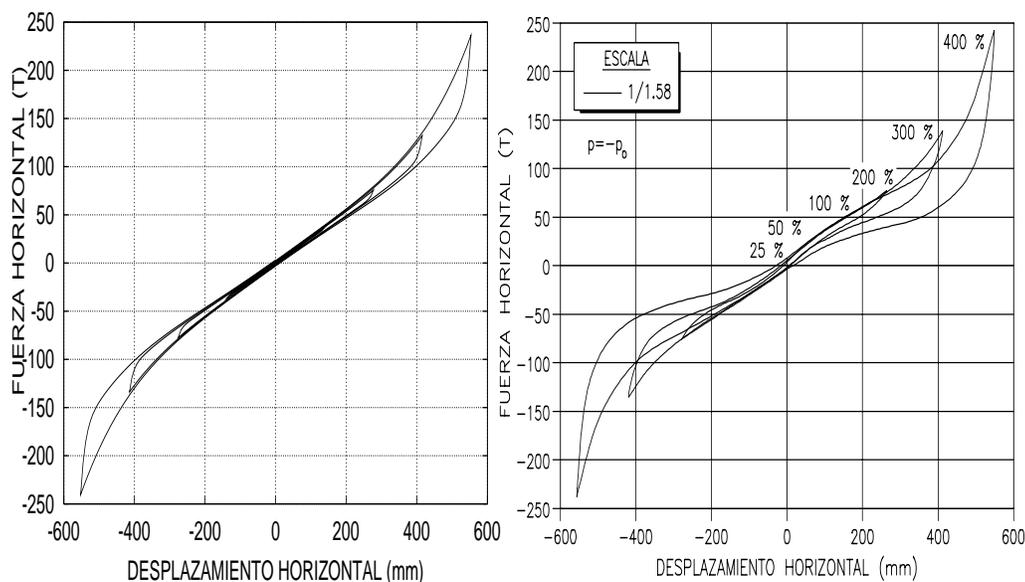


Figura 2: Dispositivo de caucho natural. Comparación de resultados numéricos (izquierda) con experimentales — SMiRT11 modelo a escala 1/1.58— (derecha).

## Aplicación a una estructura con aislamiento de base

Como ejemplo de aplicación, se compara el comportamiento de una estructura de hormigón armado tipo pórtico de un edificio de seis plantas con aislamiento sísmico de base mediante dispositivos de alto amortiguamiento, con relación a igual estructura de base fija. Se realizan comparaciones de desplazamientos máximos relativos entre plantas, aceleraciones máximas e índices de daño, cuando estas estructuras son sometidas a la componente N-S del terremoto de El Centro (1940).

Ambas estructuras, de base fija y con aislamiento de base, están formadas por una primera planta de 4 m de altura y cinco plantas superiores con una altura de 3 m. El ancho de las estructuras es fijo (10 m). Las dimensiones de columnas y vigas se escogen de tal manera que el período fundamental de vibración sea próximo al dado en la Normativa Española Sismoresistente NCSE-94 para entramados de hormigón armado:  $T(s) = 0.09H/\sqrt{L} = 0.54075$  s. El peso total de la estructura, 500 T, se distribuye en forma uniforme entre todas las plantas del edificio. La base se supone con una masa equivalente a una planta. La estructura con aislamiento sísmico de base está soportada sobre dispositivos HRB con las características geométricas

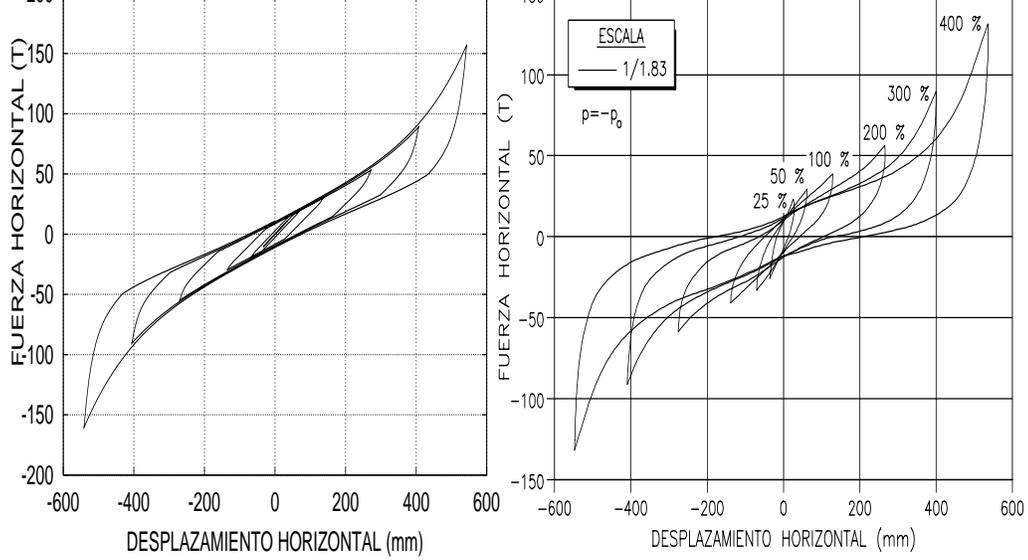


Figura 3: Dispositivo de alto amortiguamiento. Comparación de resultados numéricos (izquierda) con experimentales —SMiRT11 modelo a escala 1/1.83— (derecha).

y mecánicas indicadas en la figura 1.

Columnas y vigas son modeladas utilizando elementos finitos cuadráticos tipo viga de Timoshenko con sección transversal discretizada en seis capas de igual ancho y altura. Las capas externas (1/3 sección) son consideradas como material compuesto: hormigón (85%) y acero (15%), dando una cuantía del 4.5%. Las capas internas son modeladas como material simple, hormigón (100%). Para modelar base y dispositivos de apoyo, se utilizan elementos de cuatro nodos en deformación plana.

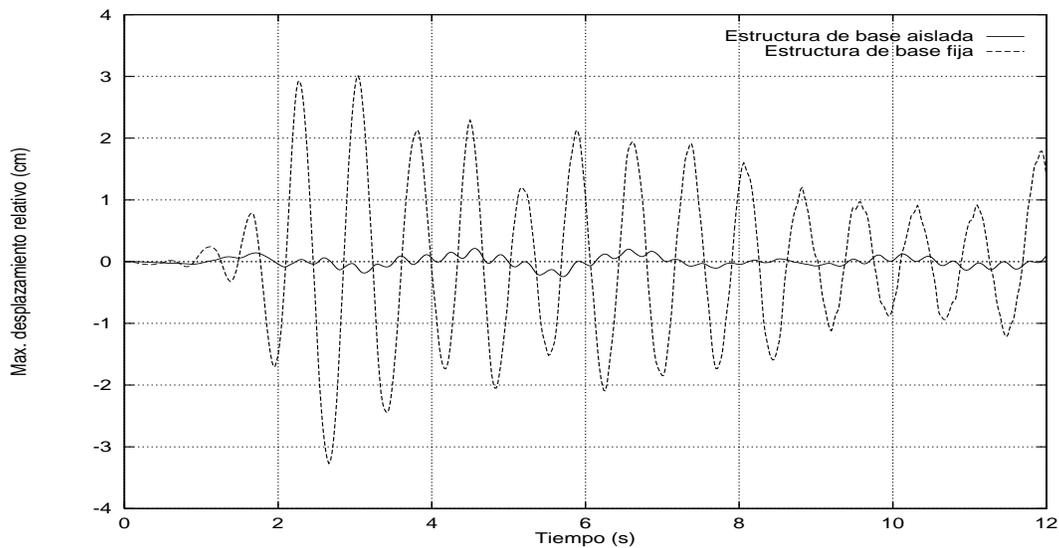


Figura 4: Desplazamientos relativos máximos entre pisos.

Las figuras 4 y 5 indican la historia de desplazamientos relativos máximos entre pisos y las aceleraciones absolutas máximas (punto más alto del edificio) en las estructuras con aislamiento de base y de base fija, respectivamente. Los valores máximos de las respuestas de ambas estructuras se resumen en la tabla 2.

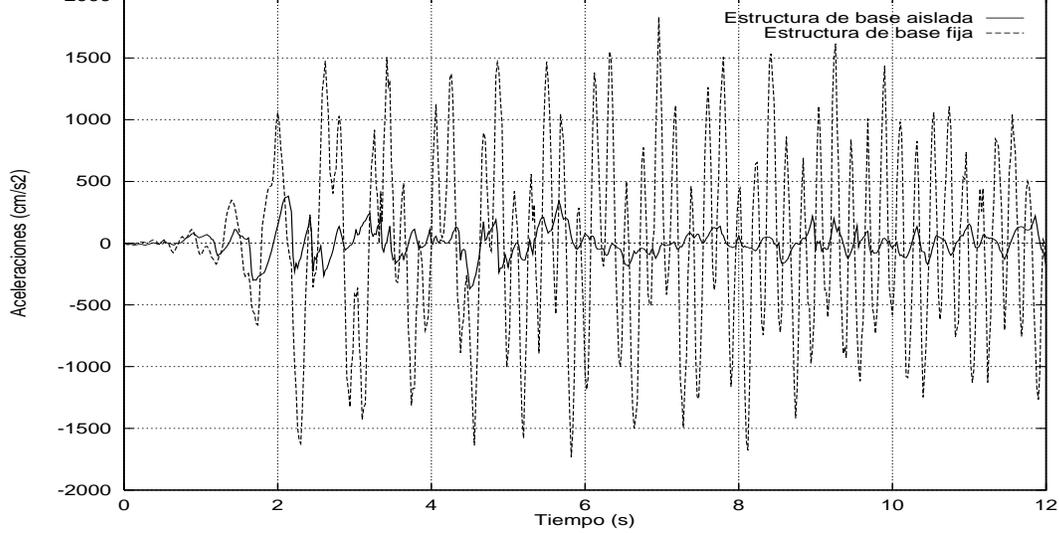


Figura 5: Aceleraciones máximas en las estructuras de base aislada y fija, piso 6.

Estructura	con aislamiento de base	de base fija
Desplazamiento de base (cm)	16.81	0.0
Desplazamiento del punto mas alto (cm)	15.49	16.2
Desplazamiento relativo total (cm)	1.53	16.2
Desplazamiento entre plantas (cm)	0.24	3.27
Aceleración del punto mas alto (cm/s <sup>2</sup> )	380.8	1831.6

Tabla 2: Valores máximos en la respuesta de las estructuras con aislamiento de base y de base fija.

En la figura 6 puede apreciarse la evolución del índice global de daño para las estructuras de base fija y de base aislada. Obsérvese que en el caso de la estructura de base fija el índice de daño global alcanza valores próximos al 60%, indicando que la estructura se encuentra seriamente dañada y en consecuencia fuera de

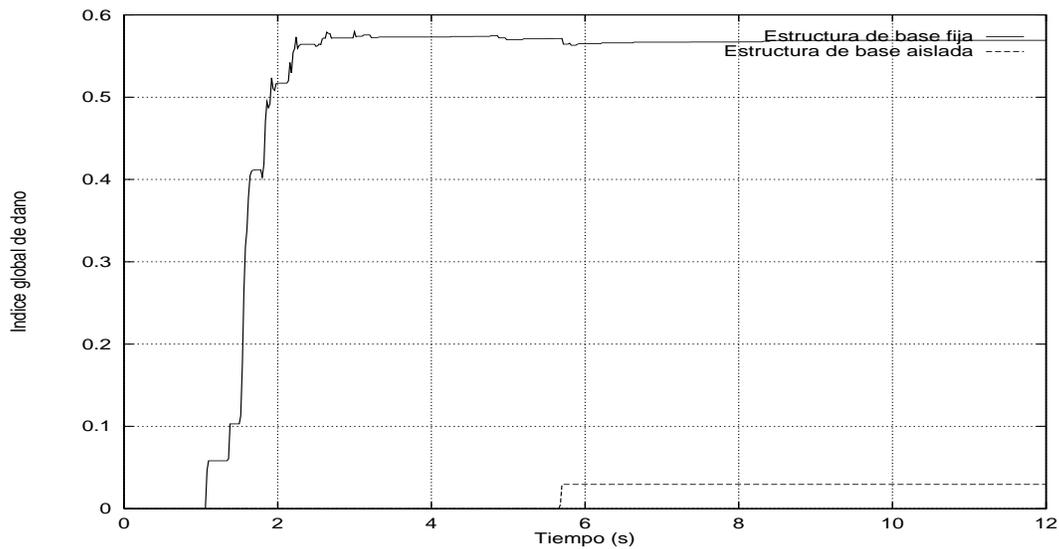


Figura 6: Evolución de los índices globales de daño en las estructuras de base fija y de base aislada.

servicio. Por otro lado, la estructura con aislamiento de base presenta un índice de daño global inferior al 3%. Un índice de daño global tan bajo como este indica que la estructura no solo continua en servicio después de producirse el terremoto, sino que los daños son mínimos y serían difícilmente detectados en una inspección visual.

## CONCLUSIONES

Se ha propuesto un modelo fenomenológico en grandes deformaciones derivado a partir de una formulación general termodinámicamente consistente para simular el comportamiento mecánico de los elastómeros. Considerando que en los elastómeros se pueden incorporar partículas a efecto de incrementar sus propiedades disipativas, se ha propuesto utilizar diferentes modelos para cada una de las dos componentes, concretamente, viscoelasticidad para el caucho y elastoplasticidad para las partículas agregadas. En la simulación numérica de ensayos de dispositivos de apoyo de elastómero laminado con desplazamientos cíclicos impuestos hasta deformaciones próximas a rotura ( $\pm 400\%$ ), el modelo numérico, con los parámetros materiales aquí propuestos, consigue reproducir razonablemente bien la forma de los diagramas fuerza-desplazamiento.

En el análisis sísmico de edificios con aislamiento de base se pone de manifiesto el correcto funcionamiento de los distintos modelos constitutivos en un código general de cálculo dinámico de estructuras por el método de elementos finitos. En la simulación numérica del sistema estructura-dispositivo de aislamiento se utilizaron simultáneamente modelos constitutivos para elastómeros en elementos finitos de estado plano, junto con modelos para hormigón y acero en elementos finitos de barra a flexión discretizados por capas.

## REFERENCIAS

- [1] A. Barbat and L. Bozzo. Seismic analysis of base isolated buildings. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 4(2):153–192, 1997.
- [2] A. Barbat, S. Oller, E. Oñate, and A. Hanganu. Viscous damage model for Timoshenko beam structures. *International Journal of Solids and Structures*, 34(30):3953–3976, 1997.
- [3] J. M. Kelly. *Dynamic and Failure Characteristics of Bridgestone Isolation Bearings*. Earthquake Engineering Research Center. College of Engineering, University of California at Berkeley, 1991.
- [4] J. M. Kelly. *Final Report on the International Workshop on the Use of Rubber-Based Bearing for the Earthquake Protection of Buildings*. Earthquake Engineering Research Center. College of Engineering, University of California at Berkeley, 1995.
- [5] R. W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1984.
- [6] S. Oller, E. Oñate, J. Miquel, and S. Botello. A plastic damage constitutive model for composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(17):2501–2518, 1996.
- [7] O. Salomón. *Un modelo numérico para el análisis de estructuras con aislamiento sísmico*. PhD thesis, E.T.S.E.C.C.P.B., Universidad Politécnica de Cataluña, 1998.
- [8] O. Salomón, S. Oller, and A. Barbat. Modelling of laminated elastomeric passive-control bearing for seismic analysis. *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, Argentina, 1998.
- [9] O. Salomón, S. Oller, and A. Barbat. Finite element analysis of base isolated buildings subjected to earthquake loads. accepted at: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999.
- [10] O. Salomón, S. Oller, and A. Barbat. Simulación numérica de elastómeros multi-fase en estiramientos principales. accepted at: *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 1999.
- [11] J. C. Simo and R. Taylor. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 85:273–310, 1991.
- [12] R. I. Skinner, W. H. Robinson, and G. McVerry. *An Introduction to Seismic Isolation*. John Wiley and Sons, Chichester, 1993.
- [13] SMiRT11. *Seismic Isolation and Response Control for Nuclear and Non-Nuclear Structures*. Structural Mechanics in Reactor Technology. SMiRT11, Tokyo, 1991.
- [14] T. Sussman and K.J. Bathe. A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. *Computers and Structures*, 26(1/2):357–409, 1987.