

INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE ELEMENTOS FINITOS CUADRILÁTEROS

Claudio E. Jouglard

*Laboratorio de Mecánica Computacional. Departamento de Física.
Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires
Paseo Colón 850, (1063) Buenos Aires, Argentina.
e-mail: jouglard@comnet.com.ar*

RESUMEN

El uso de la cuadratura reducida de Gauss de un punto es beneficioso en algoritmos no lineales porque se reduce substancialmente el número de evaluaciones de operadores gradiente y ecuaciones constitutivas. La mayor desventaja de la cuadratura de un punto en elementos cuadriláteros es una inestabilidad de la malla conocida en inglés como *hourglassing* (reloj de arena).

La técnica que aquí se presenta permite obtener la expresión explícita de las matrices de elementos finitos cuadriláteros sin usar la cuadratura de Gauss y sin conocimiento previo de los modos espurios. Se basa en el desarrollo de Taylor de los integrandos y los elementos resultantes no tienen modos espurios y pasan el patch test.

ABSTRACT

One-point quadrature provides great benefits in nonlinear algorithms because the number of evaluations of gradient operators and constitutive equations is reduced substantially. The major drawback of one-point quadrature in quadrilateral elements is a mesh instability often known as hourglassing.

The technique presented here gives the explicit expression of finite element matrices of quadrilateral elements without the use of Gauss integration and without knowledge of the spurious modes. It is based in the Taylor series expansion of the integrands and the resulting elements have no spurious modes and pass the patch test.

INTRODUCCION

La integración de las matrices de rigidez de cuadriláteros puede ser hecha analíticamente^{1,2}, pero usualmente se emplea la integración numérica mediante cuadratura de Gauss³ dado su sencillez de codificación y la facilidad de su extensión a problemas no lineales. La evaluación de una integral mediante la cuadratura de Gauss consiste en una suma ponderada de evaluaciones del integrando en ciertas ubicaciones conocidas como puntos de Gauss. El esfuerzo numérico es proporcional al número de estos puntos de integración.

El número mínimo de puntos es determinado por condiciones de consistencia y estabilidad³ y se lo conoce como cuadratura completa. La cuadratura completa es costosa pero el uso de un número menor de puntos de integración da elementos con modos espurios ó mecanismos⁴. Para cuadriláteros para la ecuación de Laplace ó para problemas de tensión ó deformación plana la integración completa requiere 2x2 puntos de integración. Si usamos una cuadratura reducida de un punto los elementos resultantes presentan modos espurios conocidos como modos *reloj de arena* (hourglassing modes^{5,6}). Muchos autores⁵⁻¹² han desarrollado controles efectivos de estos modos añadiendo algún tipo de estabilización al elemento obtenido mediante cuadratura de un punto.

En este trabajo los integrandos de las matrices de rigidez se expanden en series de Taylor en coordenadas paramétricas en torno del centroide del elemento. Luego se efectúa un análisis para truncar estas series con el menor número de términos que aseguren convergencia y estabilidad.

Primeramente se presentará la formulación de elementos finitos para conducción estacionaria de calor, luego se mostrarán la matriz gradiente y la matriz de rigidez para una interpolación Lagrangiana general sobre cuadriláteros. A continuación se analizarán los requisitos de convergencia y se presentará el nuevo procedimiento de integración. Finalmente se obtendrán las matrices para interpolaciones bilineales y bicuadráticas.

FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS PARA CONDUCCIÓN DE CALOR

Considere las ecuaciones que gobiernan la conducción estacionaria de calor en dos dimensiones sobre un dominio Ω con frontera Γ de normal \mathbf{n} , el cual se subdivide en una parte Γ_θ con temperaturas θ prescritas y otra parte Γ_q con flujos normales q_n prescritos:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + Q &= 0 & , & \text{ en } \Omega \\ \theta &= \bar{\theta} & , & \text{ en } \Gamma_\theta \\ q_n &= \bar{q}_n & , & \text{ en } \Gamma_q \end{aligned} \quad (1)$$

Donde q_x , q_y son los flujos de calor en las direcciones x, y y Q es el término fuente. Las ecuaciones anteriores se completan con la ley de Fourier de conducción de calor

$$q_x = -k \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (2)$$

Donde k es el coeficiente de conductividad térmica.

Para una aproximación por elementos finitos la temperatura es aproximada como

$$\theta = \sum_i N_i(x, y) \theta_i = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta} \quad (3)$$

donde \mathbf{N} es el vector de funciones de forma y $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de temperaturas nodales. Luego podemos definir el vector de gradientes térmicos \mathbf{g} y el vector de flujos térmicos \mathbf{q} como

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \partial \theta / \partial x \\ \partial \theta / \partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = -\mathbf{C} \mathbf{g} = -\mathbf{C} \mathbf{B} \boldsymbol{\theta} \quad (4)$$

donde \mathbf{B} es la matriz gradiente y \mathbf{C} es la matriz de coeficientes de conductividad

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \partial \mathbf{N}^T / \partial x \\ \partial \mathbf{N}^T / \partial y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \mathbf{x}^T \\ \mathbf{b} \mathbf{y}^T \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (5)$$

Aplicando el método de Galerkin³ obtenemos las ecuaciones de balance de flujos en cada nodo

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{K} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{f}_{ext} \quad (6)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de conductividad

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (7)$$

\mathbf{f}_{ext} es el flujo nodal externo de calor y \mathbf{f}_{int} es el flujo nodal interno de calor que puede escribirse como

$$\mathbf{f}_{int} = - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{q} \, d\Omega \quad (8)$$

ELEMENTOS CUADRILÁTEROS DE CUATRO NODOS

Considere el mapeo de un elemento cuadrilateral de cuatro nodos del espacio físico de coordenadas x, y en el espacio paramétrico ξ, η de un elemento de referencia patrón como muestra la figura 1.

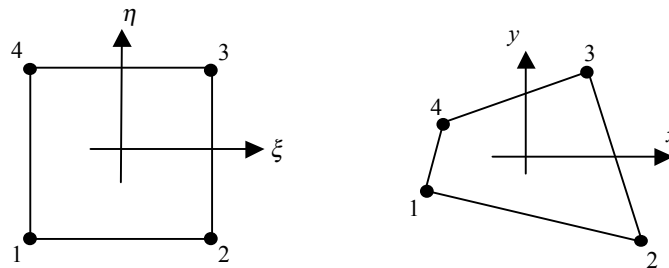


Figura 1. Mapeo del elemento cuadrilateral de cuatro nodos

La configuración del elemento patrón en las coordenadas paramétricas es un cuadrado biunitario $[-1,1] \times [-1,1]$. Las coordenadas espaciales x, y son interpoladas en el elemento a partir de sus valores nodales x_i, y_i usando las usuales funciones de forma bilineales³

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta \\ y(\xi, \eta) &= b_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\xi\eta \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4 & b_0 &= (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/4 \\ a_1 &= (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)/4 & b_1 &= (-y_1 + y_2 + y_3 - y_4)/4 \\ a_2 &= (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)/4 & b_2 &= (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)/4 \\ a_3 &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/4 & b_3 &= (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)/4 \end{aligned} \quad (10)$$

Las derivadas de las funciones de forma del elemento con respecto a ambos sistemas de coordenadas están relacionadas por la matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

La relación inversa viene dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde J es el *Jacobiano* dado por el determinante de la matriz Jacobiana

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = J_0 (1 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta) \quad (13)$$

donde

$$J_0 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (14)$$

$$\gamma_1 = (a_1 b_3 - a_3 b_1) / J_0$$

$$\gamma_2 = (a_3 b_2 - a_2 b_3) / J_0$$

El coeficiente J_0 es siempre positivo y es igual a un cuarto del área del elemento. Para un elemento rectangular o paralelogramo tenemos $a_3 = b_3 = 0$, esto implica que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ y resulta un Jacobiano constante. Los coeficientes γ_1 y γ_2 pueden interpretarse como medidores de la distorsión del elemento¹⁵.

Matriz gradiente para interpolación Lagrangiana

Para una interpolación Lagrangiana de las temperaturas nodales, las funciones de forma pueden escribirse como

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \sum_{p=0}^{p_{max}} \sum_{q=0}^{p_{max}} \alpha_{pq} \xi^p \eta^q \quad (15)$$

donde p_{max} es el orden de la interpolación Lagrangiana que asumimos igual en ambas coordenadas.

Las derivadas de las funciones de forma respecto de las coordenadas espaciales x, y pueden obtenerse mediante la regla de la cadena, ec.(12), como

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \sum_{p=0}^{p_{max}} \sum_{q=0}^{p_{max}} \frac{\mathbf{b}\mathbf{x}_{pq} \xi^p \eta^q}{J(\xi, \eta)} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} = \sum_{p=0}^{p_{max}} \sum_{q=0}^{p_{max}} \frac{\mathbf{b}\mathbf{y}_{pq} \xi^p \eta^q}{J(\xi, \eta)}$$

Donde $\mathbf{b}\mathbf{x}_{pq}$, $\mathbf{b}\mathbf{y}_{pq}$ serán llamados *vectores gradiente de orden p, q* .

$$\mathbf{b}\mathbf{x}_{pq} = \begin{cases} \alpha_{p+1q} (p+1)b_2 - \alpha_{pq+1} (q+1)b_1 + \alpha_{pq} (p-q)b_3 & \text{si } p < p_{max} \text{ y } q < p_{max} \\ -\alpha_{p_{max}q+1} (q+1)b_1 + \alpha_{p_{max}q} (p_{max} - q)b_3 & \text{si } p = p_{max} \text{ y } q < p_{max} \\ \alpha_{p+1q_{max}} (p+1)b_2 + \alpha_{pq_{max}} (p - q_{max})b_3 & \text{si } p < p_{max} \text{ y } q = p_{max} \\ 0 & \text{si } p = p_{max} \text{ y } q = p_{max} \end{cases} \quad (17)$$

$$\mathbf{by}_{pq} = \begin{cases} \alpha_{pq+1}(q+1)a_1 - \alpha_{p+1q}(p+1)a_2 + \alpha_{pq}(q-p)a_3 & \text{si } p < p_{max} \text{ y } q < p_{max} \\ \alpha_{p_{max}q+1}(q+1)a_1 + \alpha_{p_{max}q}(q-p_{max})a_3 & \text{si } p = p_{max} \text{ y } q < p_{max} \\ -\alpha_{p+1q_{max}}(p+1)a_2 + \alpha_{pq_{max}}(q_{max}-p)a_3 & \text{si } p < p_{max} \text{ y } q = p_{max} \\ 0 & \text{si } p = p_{max} \text{ y } q = p_{max} \end{cases}$$

Luego la matriz gradiente puede escribirse como

$$\mathbf{B}(\xi, \eta) = \sum_{p=0}^{p_{max}} \sum_{q=0}^{p_{max}} \frac{\mathbf{B}_{pq} \xi^p \eta^q}{J(\xi, \eta)} \quad (18)$$

Donde \mathbf{B}_{pq} serán llamadas *matrices gradiente de orden p, q* y se definen como

$$\mathbf{B}_{pq} = \begin{bmatrix} \mathbf{bx}_{pq}^T \\ \mathbf{by}_{pq}^T \end{bmatrix} \quad (19)$$

Matriz de conductividad para el elemento

Aplicando la transformación de coordenadas espaciales a paramétricas, la matriz de conductividad del elemento es

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} J d\xi d\eta \quad (20)$$

Substituyendo las matrices gradiente de la ec. (18) obtenemos

$$\mathbf{K} = \sum_{r=0}^{2p_{max}} \sum_{s=0}^{2p_{max}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{K}_{rs} \frac{\xi^r \eta^s}{4} \frac{J_0}{J(\xi, \eta)} d\xi d\eta \quad (21)$$

donde \mathbf{K}_{rs} serán llamadas *matrices de conductividad de orden r, s* definidas como

$$\mathbf{K}_{rs} = \frac{4}{J_0} \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=j_1}^{j_2} \mathbf{B}_{ij}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{r-is-j} \quad (22)$$

donde $i_1 = \max(0, r-p_{max})$, $i_2 = \min(r, p_{max})$, $j_1 = \max(0, s-p_{max})$, $j_2 = \min(s, p_{max})$.

INTEGRACIÓN NUMÉRICA. REQUISITOS PARA LA CONVERGENCIA

Note que las integrales (21) son el cociente de dos polinomios en ξ, η , si bien la integración analítica es posible en algunos casos^{1,2}, la práctica usual consiste en evaluar estas integrales usando cuadratura Gaussiana^{3,4,13}, la cual puede aplicarse eficientemente en problemas no lineales. En una dimensión una regla de Gauss de n puntos integra exactamente un polinomio de grado $(2n-1)$. Un punto importante es determinar el número mínimo de puntos requeridos, dado que el esfuerzo computacional es proporcional a esta cantidad.

Además, debemos asegurar la convergencia del procedimiento numérico con las matrices aproximadas obtenidas por integración numérica. Para esto debemos cumplir condiciones de consistencia y estabilidad. Los requisitos de consistencia aseguran que cuando el tamaño del elemento tiende a cero entonces la solución aproximada tiende a la solución exacta. Para satisfacer este requisito el elemento debe ser capaz de reproducir, como mínimo, cualquier estado de flujo constante, esto es un patch test³ constante. Para obtener el mismo orden de convergencia que con las

matrices integradas analíticamente, el elemento debe poder reproducir cualquier estado de flujo del máximo orden que pueda ser representado por las funciones de interpolación de la temperatura.

Las condiciones de estabilidad exigen que la solución del sistema de ecuaciones resultante sea única y que no contenga mecanismos espurios. En general, los mecanismos espurios aparecen cuando se usan reglas de cuadratura de bajo orden, y se manifiestan para todas las formas geométricas del elemento, inclusive las regulares como el rectángulo o el paralelogramo. Se debe notar que si el elemento integrado analíticamente no tiene modos espurios y la regla de integración usada calcula exactamente las integrales para formas geométricas regulares ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), entonces las matrices obtenidas numéricamente no tienen modos espurios. La prueba es simple, dado que los autovalores de las matrices integradas numéricamente son funciones analíticas¹⁶ de los coeficientes de distorsión γ_1 , γ_2 , entonces, si existe un modo espurio debe haber un autovalor nulo impropio para cualquier valor de γ_1 , γ_2 , en particular para $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Pero como para estos valores las matrices integradas numéricamente coinciden con las analíticas, que no tienen autovalores nulos impropios, entonces se concluye que las matrices integradas numéricamente no tienen modos espurios.

SERIES DE TAYLOR DE LAS MATRICES DE CONDUCTIVIDAD

Se propone expandir los integrandos de las matrices de conductividad, ec.(21), en series de Taylor en torno del centroide del elemento. Luego, es posible obtener una matriz aproximada truncando la serie con el menor número de términos que asegure convergencia y estabilidad. La series de Taylor de las matrices de conductividad son

$$\mathbf{K} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{K}}_{mn} \frac{\xi^m \eta^n}{4} d\xi d\eta \quad (23)$$

Donde $\tilde{\mathbf{K}}_{mn}$ serán llamadas *matrices naturales de conductividad de orden m,n* y se definen como

$$\tilde{\mathbf{K}}_{mn} = \sum_{i=i_1}^m \sum_{j=j_1}^n \binom{i+j}{i} (-1)^{i+j} \gamma_1^i \gamma_2^j \mathbf{K}_{m-i, n-j} \quad (24)$$

donde $i_1 = \max(0, m-2p_{max})$, $j_1 = \max(0, n-2p_{max})$, y

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}, \quad i \geq j \quad (25)$$

son los coeficientes binomiales e $i!$ es el factorial de i , esto es, $i! = i(i-1)(i-2)\dots 1$ y $0! = 1$.

Para asegurarnos que las matrices aproximadas no tengan modos espurios, retenemos los mismos términos que aparecen en los integrandos de un elemento de geometría regular, esto es, con Jacobiano constante ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), obteniendo

$$\tilde{\mathbf{K}} = \sum_{r=0}^{2p_{max}} \sum_{s=0}^{2p_{max}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{K}}_{rs} \frac{\xi^r \eta^s}{4} d\xi d\eta \quad (26)$$

Ahora podemos evaluar esta integral analíticamente, pues el integrando es simplemente un polinomio. Llevando en cuenta las propiedades de las integrales

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\xi^r \eta^s}{4} d\xi d\eta = \begin{cases} \frac{1}{(r+1)(s+1)} & \text{si } r \text{ y } s \text{ son pares} \\ 0 & \text{si } r \text{ o } s \text{ son impares} \end{cases} \quad (27)$$

La matriz de conductividad resultante es

$$\tilde{\mathbf{K}} = \sum_{m=0}^{p_{max}} \sum_{n=0}^{p_{max}} \frac{\tilde{\mathbf{K}}_{2m2n}}{(2m+1)(2n+1)} \quad (28)$$

Como se demostrará a continuación, el número de términos retenidos para estabilidad es suficiente para alcanzar la máxima tasa de convergencia del elemento.

Convergencia y estabilidad de las matrices aproximadas

Para un cuadrilátero de lados rectos las coordenadas x,y son funciones bilineales de las coordenadas ξ,η . Luego, tomando por ejemplo la coordenada $x(\xi,\eta)$, las potencias de esta coordenada son

$$x^n = (a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta)^n = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n \beta_{pq} \xi^p \eta^q \quad (29)$$

Esto implica que si la interpolación Lagrangiana es de orden n en las coordenadas ξ,η , entonces puede reproducir exactamente cualquier polinomio completo en x,y . Consideremos entonces un polinomio completo de grado n en x,y para las temperaturas representado por sus valores nodales $\boldsymbol{\theta}_N$. El flujo térmico asociado será un polinomio completo de grado $n-1$ en x,y que puede expresarse como

$$\mathbf{q}(x,y) = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} \mathbf{q}_{rs} \xi^r \eta^s \quad (30)$$

Donde \mathbf{q}_{rs} son vectores con los coeficientes de la interpolación de Lagrange del flujo en coordenadas paramétricas. Luego de la ec.(8) el flujo nodal interno de calor puede escribirse como

$$\mathbf{f}_{int} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\sum_{p=0}^{p_{max}} \sum_{q=0}^{p_{max}} \mathbf{B}_{pq}^T \xi^p \eta^q \right) \left(\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} \mathbf{q}_{rs} \xi^r \eta^s \right) d\xi d\eta = - \sum_{p=0}^{p_{max}+n-1} \sum_{q=0}^{p_{max}+n-1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{f}_{pq}^{int} \xi^p \eta^q d\xi d\eta \quad (31)$$

donde

$$\mathbf{f}_{rs}^{int} = - \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=j_1}^{j_2} \mathbf{B}_{r-i,s-j}^T \mathbf{q}_{ij} \quad (32)$$

con $i_1 = \max(0, r-p_{max})$, $i_2 = \min(r, n-1)$, $j_1 = \max(0, s-p_{max})$, $j_2 = \min(s, n-1)$. Usando la ecs. (6) y (23) el flujo nodal interno de calor puede escribirse también como

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{K} \boldsymbol{\theta}_N = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \boldsymbol{\theta}_N \frac{\xi^p \eta^q}{4} d\xi d\eta \quad (33)$$

Comparando las ecuaciones (31) y (33), y llevando en cuenta que el desarrollo en potencias del integrando debe ser igual en ambas integrales tenemos

$$\tilde{\mathbf{K}}_{pq} \boldsymbol{\theta}_N = \mathbf{0}, \quad \text{si } p, q > p_{max} + n - 1 \quad (34)$$

Esto implica que todas las matrices naturales de conductividad de orden p,q con $p,q > p_{max} + n - 1$ tendrán $(n+1)(n+2)/2$ modos singulares asociados con los valores nodales \mathbf{d}_N , pues un polinomio completo de grado n en x,y se define con $(n+1)(n+2)/2$ valores independientes.

Luego es posible truncar la sumatoria (33) como

$$\mathbf{f}_{int} = \sum_{p=0}^{p_{max}+n-1} \sum_{q=0}^{p_{max}+n-1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \boldsymbol{\theta}_N \frac{\xi^p \eta^q}{4} d\xi d\eta \quad (35)$$

y en virtud de las propiedades de las integrales (27), tenemos después de integrar

$$\mathbf{f}_{int} = \sum_{r=0}^{r_{max}} \sum_{s=0}^{r_{max}} \frac{\tilde{\mathbf{K}}_{2r2s} \boldsymbol{\theta}_N}{(2r+1)(2s+1)}, \quad r_{max} = \begin{cases} (p_{max} + n - 2)/2 & \text{si } (p_{max} + n) \text{ es par} \\ (p_{max} + n - 1)/2 & \text{si } (p_{max} + n) \text{ es impar} \end{cases} \quad (36)$$

Esto implica que si tenemos una interpolación Lagrangiana en ξ, η de orden p_{max} y deseamos pasar un patch test de orden $n-1$ entonces debemos retener las matrices de conductividad hasta el orden $p_{max}+n-2$ si $p_{max}+n$ es par ó hasta orden $p_{max}+n-1$ si $p_{max}+n$ es impar. Para obtener la máxima tasa de convergencia para el elemento ($n=p_{max}$) debemos retener términos hasta el orden $2p_{max}-2$, y dado que por estabilidad se han retenido términos hasta el orden $2p_{max}$, luego la máxima tasa de convergencia queda asegurada.

Matriz de consistencia y de estabilización

La matriz aproximada puede escribirse como

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}^C + \tilde{\mathbf{K}}^S \quad (37)$$

donde $\tilde{\mathbf{K}}^C$ es la *matriz de consistencia* que asegura la misma tasa de convergencia que para la matriz integrada analíticamente que puede expresarse como

$$\tilde{\mathbf{K}}^C = \sum_{m=0}^{p_{max}-1} \sum_{n=0}^{p_{max}-1} \frac{\tilde{\mathbf{K}}_{2m2n}}{(2m+1)(2n+1)} \quad (38)$$

y $\tilde{\mathbf{K}}^S$ es la *matriz de estabilización* que asegura que la matriz aproximada no contenga modos espurios

$$\tilde{\mathbf{K}}^S = \sum_{m=0}^{p_{max}-1} \frac{(\tilde{\mathbf{K}}_{2m2p_{max}} + \tilde{\mathbf{K}}_{2p_{max}2m})}{(2m+1)(2p_{max}+1)} \quad (39)$$

Por las propiedades (34) las matrices de estabilización no deben aportar flujo térmico nodal para un campo de temperaturas definido por un polinomio completo de grado p_{max} en x, y . Se debe resaltar que algunas formulaciones de integración alternativa sobre cuadriláteros, como las presentada por Mizukami¹⁷ y más recientemente por Hansbo¹⁸, proveen matrices de estabilización que no cumplen la condición (34) cuando el elemento esta distorsionado y por lo tanto solo pasan el patch test para geometrías de elemento regulares.

CUADRILÁTERO CON INTERPOLACIÓN BILINEAL DE TEMPERATURA

Para una interpolación bilineal tenemos $p_{max}=1$, por lo tanto la matriz aproximada de conductividad es

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_{00} + \frac{1}{3}(\tilde{\mathbf{K}}_{20} + \tilde{\mathbf{K}}_{02}) \quad (40)$$

Esta matriz es la misma obtenida por Liu et al.¹², usando expansiones de Taylor de las matrices gradiente y asumiendo un Jacobiano constante. Para este caso las matrices de consistencia y estabilidad son

$$\mathbf{K}^C = \tilde{\mathbf{K}}_{00} = \mathbf{K}_{00} \quad (41)$$

$$\mathbf{K}^S = \frac{1}{3}(\tilde{\mathbf{K}}_{20} + \tilde{\mathbf{K}}_{02})$$

La matriz $\tilde{\mathbf{K}}^C$ es la matriz que se obtiene con una cuadratura de Gauss de un punto⁹. Para este caso la matriz de estabilización solo tiene un autovalor no nulo con un modo asociado $\boldsymbol{\gamma}$, llamado vector de estabilización^{9,12}, y por lo tanto puede escribirse como

$$\mathbf{K}^S = \frac{k}{12 J_0} (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T \quad (42)$$

Se debe notar que el vector $\boldsymbol{\gamma}$ es ortogonal a todos los campos lineales de temperatura y por lo tanto la matriz de estabilización no aporta flujo calórico para estos campos.

CUADRILÁTERO CON INTERPOLACIÓN BICUADRÁTICA DE TEMPERATURA

Para una interpolación bicuadrática tenemos $p_{max}=2$, por lo tanto para este caso la matrices de consistencia y estabilidad son

$$\mathbf{K}^C = \tilde{\mathbf{K}}_{00} + \frac{1}{3}(\tilde{\mathbf{K}}_{20} + \tilde{\mathbf{K}}_{02}) + \frac{1}{9}\tilde{\mathbf{K}}_{22} \quad (43)$$

$$\mathbf{K}^S = \frac{1}{5}(\tilde{\mathbf{K}}_{40} + \tilde{\mathbf{K}}_{04}) + \frac{1}{15}(\tilde{\mathbf{K}}_{42} + \tilde{\mathbf{K}}_{24})$$

Se debe notar que la matriz consistente $\tilde{\mathbf{K}}^C$ no es la misma matriz obtenida usando cuadratura Gaussiana de 2x2 puntos, y por lo tanto no presenta los mismos modos espurios que aparecen en la literatura³.

La matriz de estabilización $\tilde{\mathbf{K}}^S$ puede simplificarse considerablemente dado que posee seis modos singulares.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un procedimiento para obtener las expresiones explícitas de las matrices de conductividad térmica para cuadriláteros. El énfasis ha sido puesto en la presentación de la metodología. Se ha demostrado que el procedimiento asegura la consistencia y estabilidad de las matrices obtenidas. Los términos retenidos durante el truncamiento de las series de Taylor de las matrices de conductividad aseguran la estabilidad, pues las matrices obtenidas coinciden las obtenidas analíticamente cuando el Jacobiano es constante. Se demostró que estos términos son también suficientes para alcanzar la máxima tasa de convergencia del elemento.

Se debe resaltar que el procedimiento aquí presentado no tiene la intención de incrementar el rendimiento de un elemento finito en particular, sino que se lo debe considerar como un método de integración alternativa. Si el elemento original posee una formulación pobre con modos espurios el método presentado no puede alterar estas propiedades.

Se analizaron dos casos, interpolación bilineal y bicuadrática. En el primer caso la matriz obtenida coincide con la dada por Liu et al.¹², y en el segundo caso la matriz obtenida parece ser nueva. Para este último caso las matrices resultantes son algo complicadas y en particular la matriz de estabilización debe ser simplificada para ser competitiva con la integración Gaussiana.

REFERENCIAS

- [1] D.K. Babu and G.F. Pinder, "Analytical integration formulae for linear isoparametric finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, 1153-1166 (1984).

- [2] H.T. Rathod, "Some analytical integration formulae for a four node isoparametric element", *Comp. Struct.*, **30**, 1101-1109 (1988).
- [3] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, McGraw Hill, Vol. I., 4 edn., McGraw-Hill, London, 1989.
- [4] B.M. Irons and S. Ahmad, *Techniques of Finite Elements*, Horwood, Chichester, 1980.
- [5] T. Belytschko and J.S.J. Ong, "Hourglass control in linear and nonlinear problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **43**, 251-276 (1984).
- [6] D. Kosloff and G.A. Frazier, "Treatment of hourglass patterns in low order finite element codes", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, **2**, 57-72 (1978).
- [7] D.P. Flanagan and T. Belytschko, "A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**, 679-706 (1981).
- [8] T. Belytschko, Correction of article by D.P. Flanagan and T. Belytschko, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **19**, 467-468 (1983).
- [9] W.K. Liu and T. Belytschko, "Efficient linear and nonlinear heat conduction with a quadrilateral element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, 931-948 (1984).
- [10] O.P. Jacquotte, J.T. Oden, "An accurate and efficient a posteriori control of hourglass instabilities in underintegrated linear and nonlinear elasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **55**, 105-128 (1986).
- [11] J.C. Schulz, "Finite element hourglassing control", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **21**, 1039-1048 (1985).
- [12] W.K. Liu, J.S.J. Ong, and R.A. Uras, "Finite element stabilization matrices - a unification approach", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **53**, 13-46 (1985).
- [13] T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [14] U. Hueck and P. Wriggers, "A formulation for the 4-node quadrilateral element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **38**, 3007-3037 (1995).
- [15] K.-Y. Yuan, Y.-S. Huang and T.H.H. Pian, "Inverse mapping and distortion measures for quadrilaterals with curved boundaries", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **37**, 861-875 (1994).
- [16] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press Inc, New York, 1982.
- [17] A. Mizukami, "Some integration formulas for a four-node isoparametric element", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **59**, 111-121 (1986).
- [18] P. Hansbo, "A new approach to quadrature for finite elements incorporating hourglass control as a special case", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **158**, 301-309 (1998).
- [19] W.K.Liu, Y. Guo, S. Tang and T. Belytschko, "A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **154**, 69-132 (1998).