

ANÁLISIS TERMOELÁSTICO NO ESTACIONARIO DE UNA CONFIGURACIÓN ESFÉRICA INHOMOGÉNEA CON UNA CAVIDAD CONCÉNTRICA

Carlos A. Rossit, Patricio A. A. Laura, Diana V. Bambill y Salvador La Malfa

*Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET)
Gorriti 43, 8000 Bahía Blanca, Argentina*
y

*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur
Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina*
ima@criba.edu.ar

RESUMEN

En el presente estudio se resuelve el problema definido en el título obteniendo primeramente la solución térmica en términos de desarrollos no armónicos de Fourier procediéndose luego a la evaluación de deformaciones y tensiones termoelásticas.

En el caso en que la condición de borde es del tipo de Dirichlet y homogénea en ambos contornos se demuestra que los autovalores del problema térmico no estacionario convergen hacia los valores de una esfera maciza a medida que el radio del orificio interior tiene a cero.

ABSTRACT

The problem under consideration is solved in two steps. First the unsteady temperature distribution is determined by means of a non harmonic Fourier expansion. Then the thermoelastic variables are evaluated.

When the radius of the inner contour approaches zero the eigenvalues of the solution of the unsteady diffusion equation converge towards the values corresponding to a solid sphere when the boundary conditions in the hollow sphere are homogeneous and of the Dirichlet type.

INTRODUCCIÓN

Se presenta el análisis termoelástico de una esfera hueca compuesta con materiales dispuestos concéntricamente y condiciones convectivas en sus contornos de radios a y c , Figura 1.

Al resolver el problema mediante el clásico método de separación de variables, se llega a la ecuación de Helmholtz en dominios esféricos, en el caso de la variable espacial.

La solución analítica del problema mediante la técnica de desarrollos no armónicos de Fourier, hace necesaria la obtención de los autovalores del sistema; los que dependen entre otras propiedades de la relación a/c entre los radios interior y exterior.

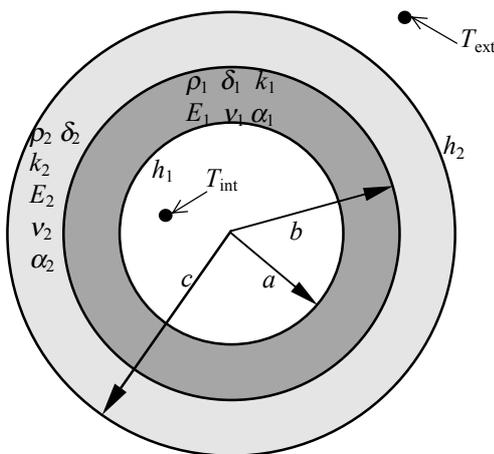
Se comprueba que, en el caso particular en que se tienen condiciones homogéneas de la primera clase en ambos contornos (condición de Dirichlet), a medida que a/c disminuye, es decir la cavidad esférica central se torna más diminuta, los autovalores del dominio doblemente conexo convergen hacia los valores de la esfera maciza. Obviamente la presencia de un orificio genera una situación de concentración de tensiones.

Esta propiedad, también se cumple en dominios bidimensionales, teniendo aplicación en el problema termoelástico de discos compuestos con orificio central así como en el estudio de las vibraciones de membranas compuestas donde permite demostrar que la presencia de un apoyo central puntual no altera las frecuencias naturales de la membrana sin apoyo^{1,2}.

Cabe destacar el hecho de que los fenómenos termoelásticos en recipientes tanto cilíndricos como esféricos son de considerable interés en una multitud de situaciones tecnológicas^{3,4}.

DESARROLLO

Se considera el caso de una esfera compuesta por dos materiales dispuestos concéntricamente, a una temperatura inicial constante T_0 , que disipa calor por convección en sus dos superficies límites, Figura 1.



- ρ : Densidad
- δ : Difusividad térmica
- k : Conductividad térmica
- E : Módulo de Young
- ν : Módulo de Poisson
- α : Expansión térmica lineal
- h : Coeficiente de transmisión superficial del calor
- T_{int} : Temperatura del medio interior
- T_{ext} : Temperatura del medio exterior

FIGURA 1: Sistema en estudio

Comportamiento Térmico.

El comportamiento térmico del sistema se encuentra gobernado por la ecuación no estacionaria de Fourier, para un dominio compuesto en coordenadas esféricas⁵.

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} = \frac{1}{\delta_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad i \begin{cases} =1 & a \leq r \leq b \\ =2 & b \leq r \leq c \end{cases} \quad (1)$$

Las condiciones de borde para $t > 0$ son :

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}(a, t) = h_1 [T_1(a, t) - T_{int}] \quad (2a)$$

$$T_1(b,t) = T_2(b,t) \tag{2b}$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}(b,t) = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}(b,t) \tag{2c}$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}(c,t) = h_2 [T_2(c,t) - T_{\text{ext}}] \tag{2d}$$

y la condición inicial en $t = 0$:

$$T_i(r,t) = T_0 \quad i = 1,2 \tag{3}$$

Dado que, en este caso se busca determinar la influencia de una pequeña cavidad centrada en una esfera compuesta con temperaturas nulas en ambas superficies límites, se considerarán valores muy pequeños de a/c y en las condiciones generales (2), se toman los siguientes valores :

$$T_{\text{int}} = T_{\text{ext}} = 0$$

$$h_1 = h_2 = \infty$$

Resolviendo la ecuación diferencial (1), por separación de variables se obtiene :

$$T_i(r,t) = X_i(r)\Gamma(t) \quad i = 1,2 \tag{4}$$

con

$$T(t) = Ce^{-\beta^2 t} \tag{5}$$

$$X_i(r) = A_i \frac{\text{sen} \frac{\beta}{\sqrt{\delta_i}} r}{r} + B_i \frac{\text{cos} \frac{\beta}{\sqrt{\delta_i}} r}{r} \quad i = 1,2 \tag{6}$$

donde β^2 es la constante de separación, no conocida, mientras A_i y B_i son constantes a ser determinada por aplicación de las condiciones de borde (2)

En efecto, reemplazando (6) en (2) y expresando el problema en función de los parámetros adimensionales :

$$\bar{r} = \frac{r}{c}; \quad \rho_0 = \frac{a}{c}; \quad \rho_1 = \frac{b}{c}; \quad \Omega = \frac{\beta c}{\sqrt{\gamma}}; \quad \delta = \frac{\delta_2}{\delta_1}; \quad k = \frac{k_2}{k_1}$$

se llega a :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

donde :

$$m_{11} = \text{sen}(\rho_0 \Omega)$$

$$m_{12} = \text{cos}(\rho_0 \Omega)$$

$$\begin{aligned}
m_{21} &= \text{sen}(\rho_1 \Omega) \\
m_{22} &= \text{cos}(\rho_1 \Omega) \\
m_{23} &= -\text{sen}\left(\frac{\rho_1 \Omega}{\sqrt{\delta}}\right) \\
m_{24} &= -\text{cos}\left(\frac{\rho_1 \Omega}{\sqrt{\delta}}\right) \\
m_{31} &= \rho_1 \Omega \text{cos}(\rho_1 \Omega) - \text{sen}(\rho_1 \Omega) \\
m_{32} &= -[\rho_1 \Omega \text{sen}(\rho_1 \Omega) + \text{cos}(\rho_1 \Omega)] \\
m_{33} &= k \left[\text{sen}\left(\frac{\rho_1 \Omega}{\sqrt{\delta}}\right) - \rho_1 \frac{\Omega}{\sqrt{\delta}} \text{cos}\left(\frac{\rho_1 \Omega}{\sqrt{\delta}}\right) \right] \\
m_{34} &= k \left[\text{cos}\left(\frac{\rho_1 \Omega}{\sqrt{\delta}}\right) + \frac{\rho_1 \Omega}{\sqrt{\delta}} \text{sen}\left(\frac{\rho_1 \Omega}{\sqrt{\delta}}\right) \right] \\
m_{43} &= \text{sen}\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\delta}}\right) \\
m_{44} &= \text{cos}\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\delta}}\right)
\end{aligned}$$

De la condición de nulidad del determinante de los coeficientes en (7) se obtienen los autovalores Ω_n que permiten una solución distinta de la trivial para el estado transitorio de temperatura.

Para determinar las constantes A_{in} y B_{in} que nos permiten conocer las autofunciones X_{1n} y X_{2n} se toma, por ejemplo $A_{in} = 1$ y de las tres primeras ecuaciones del sistema (7), se obtienen B_{1n} , A_{2n} y B_{2n} para cada Ω_n .

Se dispone entonces de infinitas soluciones particulares para el estado de temperatura

$$T_{in}(\bar{r}, t) = X_{in}(\bar{r}) e^{-\frac{\Omega_n^2 \delta_1 t}{c^2}} \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

Superponiendo adecuadamente las cuales se puede, dado la linealidad del problema, representar cualquier estado térmico transitorio del sistema :

$$T_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{in} e^{-\frac{\Omega_n^2 \delta_1 t}{c^2}} \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

en particular la condición inicial (3) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{in} = T_0 \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

de donde obtenemos las constantes C_n , aplicando la condición de ortogonalidad para las autofunciones :

$$\int_{\rho_o}^{\rho_1} \bar{r}^2 X_{1n}(\bar{r}) X_{1m}(\bar{r}) d\bar{r} + \frac{k}{\delta} \int_{\rho_1}^1 \bar{r}^2 X_{2n}(\bar{r}) X_{2m}(\bar{r}) d\bar{r} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq m \\ N_n & \text{para } n = m \end{cases}$$

Luego,

$$C_n = \frac{1}{N_n} \left[\int_{\rho_0}^{\rho_1} \bar{r}^2 T_0 X_{1n}(\bar{r}) d\bar{r} + \frac{k}{\delta} \int_{\rho_1}^1 \bar{r}^2 T_0 X_{2n}(\bar{r}) d\bar{r} \right] \quad (11)$$

Estado de Deformaciones y Tensiones

Dada la configuración geométrica y termomecánica del sistema en estudio el estado de deformaciones de la esfera queda unívocamente determinado conociendo el corrimiento radial u .

En cuanto al estado de tensiones, de las seis componentes del tensor de tensiones sólo serán no nulas σ_r y $\sigma_\theta = \sigma_\phi$

Tales variables se determinan en base a conocidas expresiones de la termoelasticidad⁶.

Las condiciones de borde serán :

$$\sigma_{r1}(\rho_0, t) = 0 \quad (12a)$$

$$u_1(\rho_1, t) = u_2(\rho_1, t) \quad (12b)$$

$$\sigma_{r1}(\rho_1, t) = \sigma_{r2}(\rho_1, t) \quad (12c)$$

$$\sigma_{r2}(1, t) = 0 \quad (12d)$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

Se han efectuado determinaciones numéricas para el sistema definido por los siguientes parámetros termomecánicos.

$$\rho_1 = \frac{b}{c} = 0.5 ; \quad \delta = 5 ; \quad \alpha = 5 ; \quad \frac{E_2}{E_1} = 1.4 ; \quad \nu_1 = 0.25 ; \quad \nu_2 = 0.3 ; \quad k = 1.4$$

El primer paso en la solución numérica del problema lo constituye la determinación de los autovalores del problema.

Debe destacarse el hecho de que los autovalores de la esfera hueca compuesta, a medida que el hueco central disminuye su radio, convergen hacia los autovalores de la misma esfera maciza, considerando como condición de borde $T = 0$ en todos los casos.

En la tabla siguiente se indican los primeros cinco autovalores para la esfera hueca con distintas relaciones entre el radio del hueco y el exterior de la esfera, y para la esfera maciza⁷.

a/c	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	Esfera maciza
n						

1	6.42121	5.54464	5.46617	5.45842	5.45765	5.45756
2	9.94306	9.11525	9.04594	9.03908	9.03840	9.03832
3	15.38789	13.04455	12.85540	12.83689	12.83504	12.83483
4	20.81861	18.30155	18.04621	18.02084	18.01830	18.01802
5	24.70465	22.10779	21.91482	21.89572	21.89381	21.89360

Tabla .1: Autovalores esfera térmica hueca compuesta para distintos valores de a/c . Comparación con esfera maciza compuesta.

Como se observa en la tabla, a medida que el radio de la cavidad esférica disminuye, los autovalores convergen rápidamente a los de la esfera maciza. (Para $a/c = 10^{-5}$ las diferencias son menores al 0.002% en todos los casos).

Se ha evaluado la influencia de una cavidad cuyo radio es el 1% del radio exterior de la esfera $a/c = 0.01$.

Las Figuras 2 a 5 evidencian tal influencia.

A través de la Figura 2, resulta claro que la distribución de temperatura para sucesivos valores de tiempo adimensional es prácticamente la misma que para la esfera simplemente conexas, salvo en las inmediaciones de la propia cavidad, ya que allí la temperatura debe descender bruscamente a cero por condiciones de borde.

Ello arroja resultados disímiles sobre las deformaciones y las tensiones.

En efecto, el estado de deformaciones no experimenta modificaciones sustanciales por la presencia del hueco central con respecto a las deformaciones de la esfera maciza⁸. (Figura 3).

En cuanto a las tensiones, se observa una marcada incidencia del hueco mantenido a temperatura nula.

Por ejemplo en las tensiones radiales (Figura 4) en los primeros instantes hay un incremento de las tensiones de tracción en proximidades de la cavidad; en los instantes siguientes en los que la esfera maciza se encuentra totalmente comprimida, la presencia del hueco genera tensiones de tracción.

Un efecto cualitativamente similar, aunque cuantitativamente mucho mayor se presenta en el caso de las tensiones tangenciales (Figura 5).

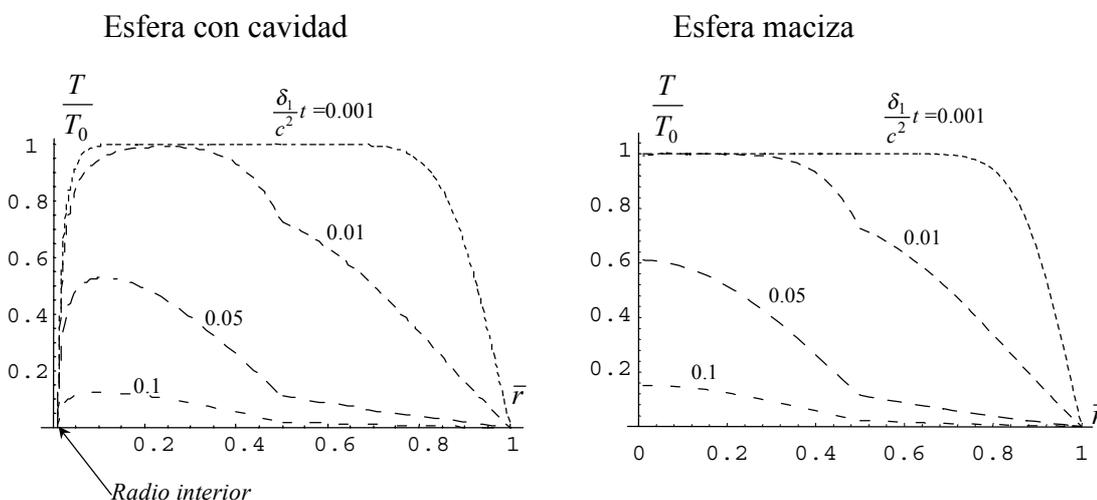


FIGURA 2: Comparación de distribuciones espaciales de temperatura para la esfera con cavidad y la esfera maciza para sucesivos valores del tiempo adimensional

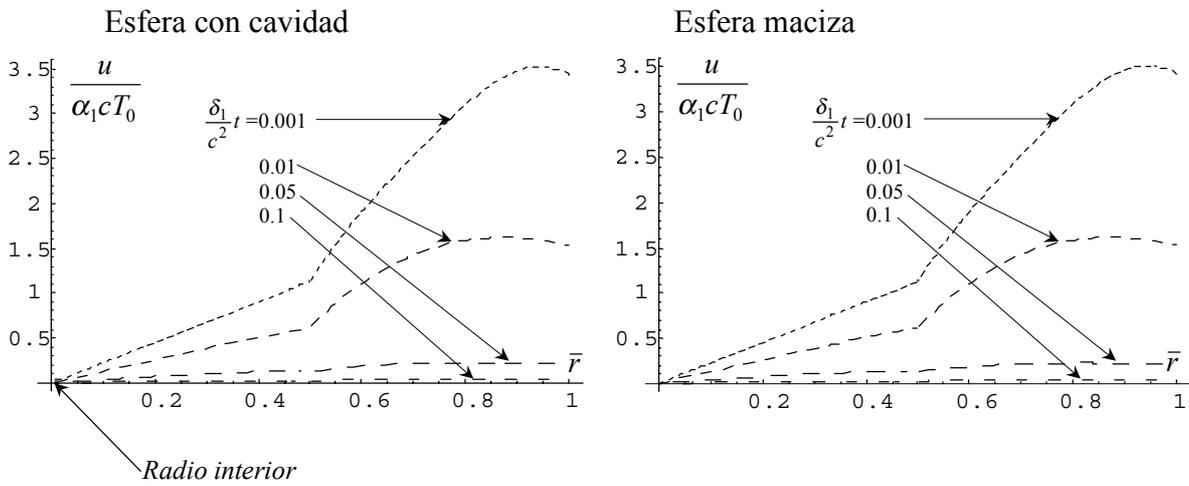
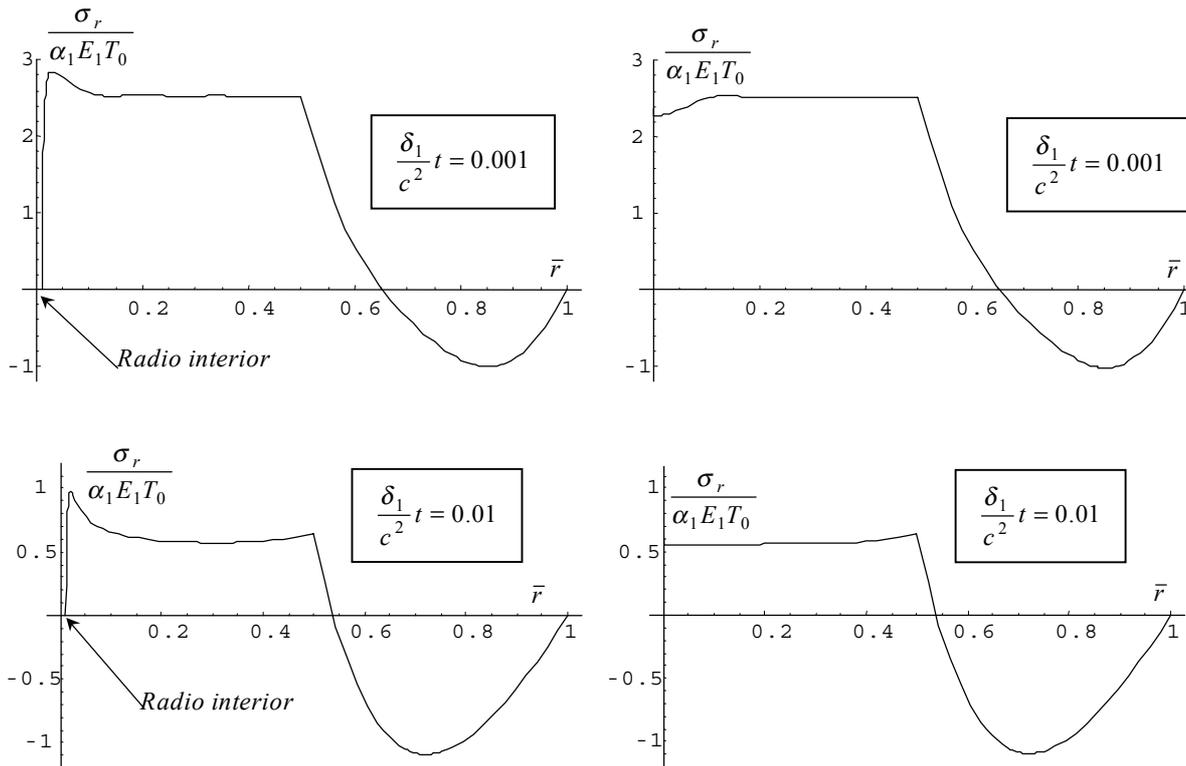


FIGURA 3: Comparación entre los coeficientes de desplazamiento radial de la esfera con cavidad y la esfera maciza para sucesivos valores de tiempo adimensional.



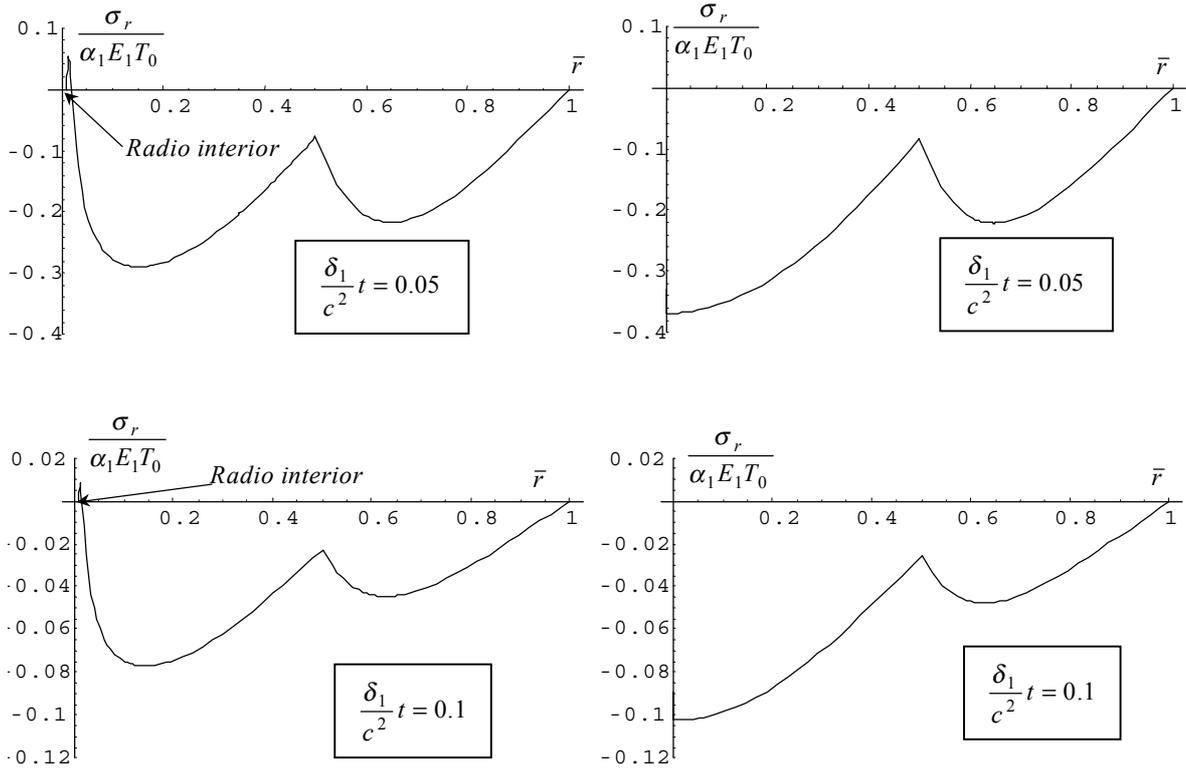
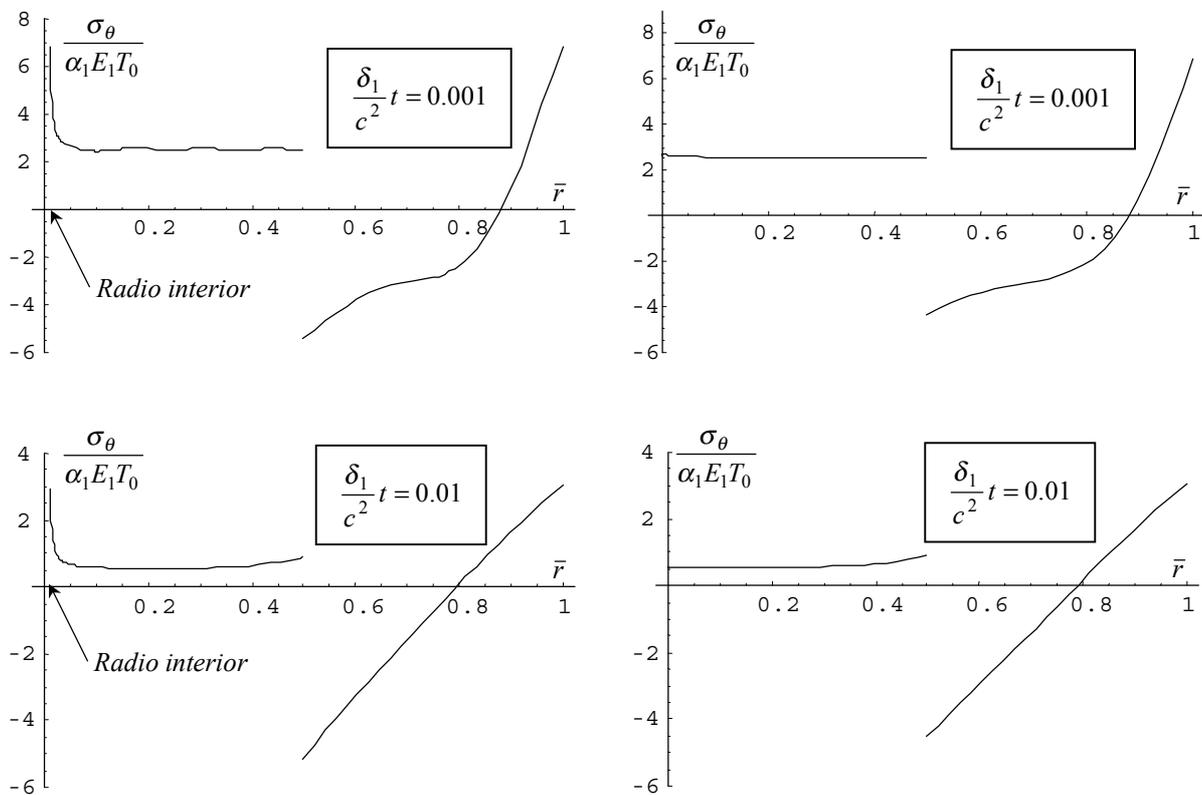


FIGURA 4: Comparación de la distribución espacial de tensiones radiales para la esfera con cavidad central y la esfera maciza para sucesivos valores de tiempo adimensional



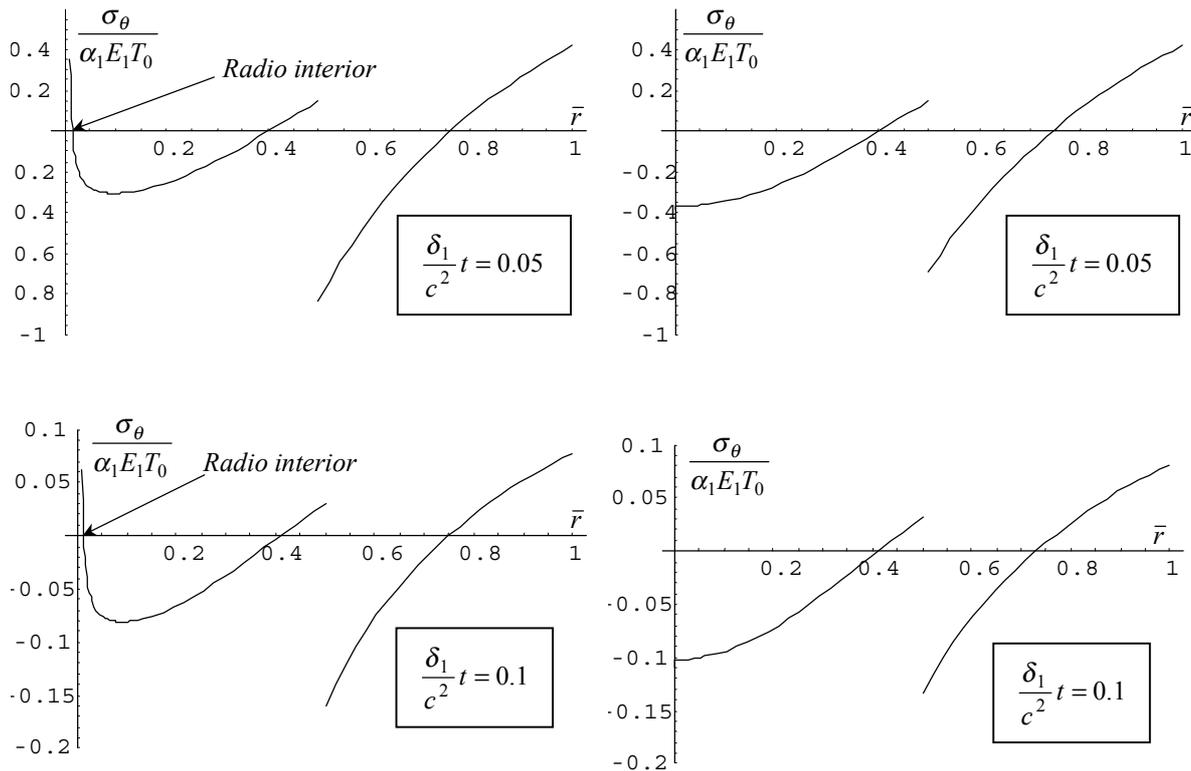


FIGURA 5: Comparación de la distribución espacial de tensiones tangenciales para la esfera con cavidad central y la esfera maciza para sucesivos valores de tiempo adimensional

AGRADECIMIENTOS

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET, la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Pcia. de Buenos Aires. Los tres primeros autores son docentes de la UNS e investigadores del CONICET mientras que el Sr. La Malfa es Miembro de la Carrera del Personal de Apoyo del CONICET y docente de la Facultad Regional Bahía Blanca (UTN).

REFERENCIAS

[1] Patricio A. A. Laura, Salvador La Malfa, Sergio A. Vera, Diego A. Vega y Miguel D. Sánchez, Journal of Sound and Vibration, 221(5), pp. 917-922, 1999.

[2] Patricio A. A. Laura, Carlos A. Rossit y Salvador La Malfa, Journal of Sound and Vibration 222(4), pp. 696-698, 1999.

[3] Carlos A. Rossit y Patricio A. A. Laura, Octavo Congreso Chileno de Ingeniería Mecánica. Universidad de Concepción, Concepción, Chile. Actas, Vol 1, pp. 237-241, 1998.

[4] Carlos A. Rossit, Patricio A. A. Laura y Diana V. Bambill, IV World Congress on Computational Mechanics, 1988.

[5] M. N. Özisik. Heat Conduction, John Wiley and Sons, New York, 1980.

[6] B. A. Boley y N. H. Weiner, John Wiley and Sons, New York, 1960.

[7] Carlos A. Rossit y Patricio A. A. Laura, Journal of Sound and Vibration, 1999.

[8] Carlos A. Rossit y Patricio A. A. Laura, XENIEF - X Congreso Sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones. San Carlos de Bariloche, Mecánica Computacional, Vol. XVIII, pp. 229-239, 1997.