

SOLUCIONES VARIACIONALES Y NUMÉRICAS DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES TRANSVERSALES DE PLACAS CIRCULARES CON BORDES LIBRES Y APOYOS CONCÉNTRICOS

Patricio A.A. Laura, Roberto H. Gutiérrez, Raúl E. Rossi,

*Departamento de Ingeniería
Universidad Nacional del Sur*

Avda. Alem 1253 - 8000 - Bahía Blanca - Argentina

e

*Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET)
Gorriti 43 - 8000 - Bahía Blanca - Argentina*

Sergio A. Vera, Daniel A. Vega, María E. Pronsato y

Carolina Pistonesi

*Departamento de Física
Universidad Nacional del Sur*

Avda. Alem 1253 - 8000 - Bahía Blanca - Argentina

RESUMEN

El problema de vibraciones transversales de una placa circular de espesor uniforme y borde libre con un apoyo circular concéntrico intermedio fue tratado por Bodine hace medio siglo. Si bien el planteo analítico de Bodine fue el exacto sus resultados numéricos carecían de suficiente precisión como ha sido demostrado recientemente por autores del presente trabajo.

En este estudio se reseñan varias soluciones obtenida por los autores sobre placas circulares simple y doblemente conexas, de espesor uniforme o variable en forma discontinua y con apoyos concéntricos intermedios. Se presentan soluciones variacionales y en algunas situaciones se obtienen soluciones numéricas, en forma independiente, mediante el método de elementos finitos. En todos los casos se muestra que existe una excelente concordancia.

ABSTRACT

The problem of free vibrations of a circular plate with an intermediate circular support and a free edge was solved by Bodine fifty years ago in a well known paper.

It has been shown recently by the authors of the present paper that Bodine's results are, in general, inaccurate. In the present study the authors review their research on the subject matter including the treatment of vibrating plates of nonuniform thickness.

INTRODUCCIÓN

Diversas soluciones han sido obtenidas en el caso de placas vibrantes rectangulares y circulares con apoyos intermedios y desplazamiento nulo en el borde exterior de la placa¹⁻⁴.

La frecuencia fundamental de vibración transversal de una placa circular simplemente conexa de borde libre y un apoyo concéntrico circular fue obtenida mediante un método analítico exacto por Bodine en un artículo muy conocido de la literatura técnico-científica⁵.

Sin embargo se ha demostrado recientemente que los resultados obtenidos⁵ no poseen suficiente precisión⁶.

En primer lugar en el presente trabajo se discuten resultados obtenidos recientemente por los autores en el caso de espesor uniforme de la placa o losa⁷ ver Figura 1. En esta referencia se presenta la solución exacta del problema y también una solución analítica aproximada mediante el método de Rayleigh-Ritz optimizado⁷ demostrándose la existencia de una excelente concordancia.

Luego, se aplica la solución variacional⁸ para analizar el comportamiento dinámico del sistema estructural mostrado en la Figura 2.

Por último se generaliza el problema de Bodine y se comparan resultados variacionales con autovalores determinados mediante el método de elementos finitos⁹⁻¹⁰.

Vibraciones Transversales de Una Losa Anular de Espesor Constante y Bordos Libres Con Un Apoyo Intermedio Concéntrico - Circular.

En el caso de modos normales axisimétricos de vibración de la placa anular de espesor uniforme la amplitud de vibración queda expresada en términos de funciones de Bessel¹¹:

$$W_1 = A_1 J_0(kr) + B_1 Y_0(kr) + C_1 I_0(kr) + D_1 K_0(kr) \quad , \quad b \leq r \leq c \quad (1)$$

$$W_2 = A_2 J_0(kr) + B_2 Y_0(kr) + C_2 I_0(kr) + D_2 K_0(kr) \quad , \quad c \leq r \leq a \quad (2)$$

$$\text{donde } k = \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}} \sqrt{\omega}.$$

El determinante - ecuación es generado utilizando las condiciones de borde y de continuidad gobernantes :

$$\left(\frac{d^2 W_1}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW_1}{dr} \right) \Big|_{r=b} = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{d}{dr} \nabla^2 W_1 \Big|_{r=b} = 0 \quad (3b)$$

$$W_1(c) = 0 \quad (3c)$$

$$W_2(c) = 0 \quad (3d)$$

$$\frac{dW_1}{dr}(c) = \frac{dW_2}{dr}(c) \quad (3e)$$

$$\frac{d^2 W_1}{dr^2}(c) = \frac{d^2 W_2}{dr^2}(c) \quad (3f)$$

$$\left(\frac{d^2 W_2}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dW_2}{dr} \right)_{r=a} = 0 \quad (3g)$$

$$\frac{d}{dr} \nabla^2 W_2 \Big|_{r=a} = 0 \quad (3h)$$

Es importante destacar el hecho de que la construcción del determinante - ecuación de 8 x 8 en términos de funciones de Bessel y la obtención del autovalor fundamental $(k_1 a)^2 = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_1 a^2$ ha sido notablemente favorecida por el uso del programa orientado MAPLE¹².
A título informativo y para ilustrar sobre la compleja estructura matemática del problema se menciona que la impresión del determinante desarrollado requirió 12 páginas.

Solución Analítica Aproximada.

Con el objeto de obtener una solución analítica aproximada para poder verificar primeramente los autovalores obtenidos mediante la formulación exacta y luego aplicarla en el caso de variación discontinua de espesor se aplicó el método de Rayleigh - Ritz optimizado, minimizando la funcional gobernante

$$J[W] = \frac{1}{2} \iint_{A_p} D \left\{ \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{d^2 W}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) \right] \right\} r \, dr \, d\theta - \frac{1}{2} \rho \omega^2 \iint_{A_p} h W^2 r \, dr \, d\theta \quad (4)$$

siendo A_p : area de la placa.

La amplitud de corrimiento fue aproximada mediante

$$W \cong W_a = \sum_{j=1}^9 G_j \varphi_j(r) \quad (5)$$

siendo

$$\varphi_j = (\alpha_j r^{p+j-1} + \beta_j r^{j+2} + \gamma_j r^{j+1} + 1)$$

p : parámetro de optimización de Rayleigh¹³;

$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$: constantes obtenidas al substituir cada función coordenada en (3a), (3c) y (3g).

Substituyendo (5) en (4) y requiriendo que

$$\frac{\partial J}{\partial G_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 9) \quad (6)$$

resulta un sistema lineal de ecuaciones en la G_j . De la condición de no trivialidad se genera el determinante - ecuación cuya raíz menor es el coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 . Dado que constituye una cota superior se requiere finalmente que

$$\frac{d\Omega_1}{dp} = 0 \quad (7)$$

obteniéndose en definitiva un valor optimizado del coeficiente de frecuencia¹³.

Resultados Numéricos y Su Discusión.

Tal como se dijo⁷, en el caso de una solución analítica exacta se consideró de utilidad obtener una solución independiente, aunque aproximada, que permitiera corroborar la validez de los resultados ya que la solución analítica exacta es sumamente compleja.

Los cálculos fueron efectuados tomando $\nu = 0.30$.

La Tabla 1 muestra la convergencia de la solución analítica aproximada al incrementar el número de funciones coordenadas para el caso en que $b/a = 0.1$, situación que presentó el mayor grado de dificultad numérica. Se deduce que para $N = 9$ se obtienen autovalores que prácticamente coinciden con los valores exactos concluyéndose que, en primera instancia, estos parecen tener una excelente precisión. Por otra parte la expresión aproximante utilizada converge adecuadamente a pesar de que no se satisface la condición de esfuerzo de Kirchhoff nulo en ambos contornos de la placa anular.

La Tabla 2 contiene valores de Ω_1 para el caso de espesor uniforme obtenidos mediante el método exacto y aquellos calculados mediante la técnica de Rayleigh - Ritz optimizado utilizando nueve funciones coordenadas. El acuerdo es excelente en todos los casos⁷.

En todas las Tablas los valores analíticos aproximados han sido truncados después del segundo decimal.

La Tabla 3 ilustra la convergencia del método⁸ para $b/a = 0.1$ y en una situación de espesor no uniforme ($h_1/h_0 = 0.8$).

Las Tablas 4 y 5 contienen valores de Ω_1 para $h_1/h_0 = 0.8$ y 0.6 respectivamente en función de varias combinaciones de las relaciones b/a , c/a y d/a ¹¹.

Los autovalores han sido determinados en los casos de las Tablas 3, 4 y 5 tomando diez funciones coordenadas polinómicas y, de acuerdo a la convergencia que se observa en la Tabla 3, puede concluirse que la precisión obtenida al utilizarse diez funciones coordenadas es adecuada, por lo menos desde el punto de vista de la utilización de valores de frecuencias naturales en un problema de ingeniería.

Se considera de interés mencionar el hecho de que la determinación de un solo autovalor mediante la solución exacta lleva un tiempo de aproximadamente 12 minutos, en una PC standar. En cambio el cálculo de todos los autovalores correspondientes a $b/a = 0.10$ y $h_1/h_0 = 0.6$ requirió 3 minutos 50 segundos, los casos restantes exigieron menos tiempo.

Por último se presenta una generalización del problema⁹ estudiado por Bodine, ver Figura 3. La Tabla 6 contiene resultados obtenidos mediante el enfoque analítico variacional y los determinados mediante la técnica de elementos finitos⁹⁻¹⁰.

La concordancia de resultados es excelente desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas.

AGRADECIMIENTOS

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Departamentos de Ingeniería y Física). S.A. Vera, D.A. Vega, M.E. Pronsato y C. Pistonesi han contado con el apoyo de becas del CONICET.

Los autores expresan su agradecimiento a la Sra. M. Susana Grenada por su valiosa cooperación en la preparación del presente manuscrito.

REFERENCIAS

- [1] V.H. Cortínez y P.A.A. Laura, *Journal of Sound and Vibration* 104, 533-535, 1986.
- [2] P.A.A. Laura y V.H. Cortínez, *Journal of Sound and Vibration* 106, 409-413, 1986.
- [3] P.A.A. Laura, R.H. Gutiérrez, V.H. Cortínez y J.C. Utjes, *Journal of Sound and Vibration* 113, 81-86, 1987.
- [4] H.C. Sanzi, P.A.A. Laura y V.H. Cortínez, *Journal of Sound and Vibration* 122, 393-395, 1988.
- [5] R.Y. Bodine, *Journal of Applied Mechanics* 26, 666-668, 1959.
- [6] P.A.A. Laura, R.H. Gutiérrez, S.A. Vera y D.A. Vega, *Institute of Applied Mechanics (CONICET, Bahía Blanca, Argentina) (sometido a publicación)*, 1999.
- [7] D.A. Vega, S.A. Vera, P.A.A. Laura, R.H. Gutiérrez y M.E. Pronsato, *Institute of Applied Mechanics (CONICET, Bahía Blanca, Argentina) (sometido a publicación)*, 1999.
- [8] R.H. Gutiérrez y P.A.A. Laura, *Institute of Applied Mechanics (CONICET, Bahía Blanca, Argentina) (sometido a publicación)*, 1999.
- [9] R.H. Gutiérrez, R.E. Rossi y P.A.A. Laura, *Institute of Applied Mechanics (CONICET) (sometido a publicación)*, 1999.
- [10] ALGOR PROFESSIONAL MECH/VE (1997). *Linear Stress and Vibration Analysis Processor Reference Manual.*, Part N° 6000.501 Revision 2.02. Pittsburgh, Pennsylvania, USA.
- [11] A.W. Leissa, *NASA SP160*, 1969.
- [12] B.W. Char, K.O. Geddes, G.H. Gonnet, B.L. Leong, M.B. Monagan y S.M. Watt. *MAPLE V.5, Library Reference Manual*, 1991.
- [13] P.A.A. Laura, *Ocean Engineering* 22, 235-250, 1995.

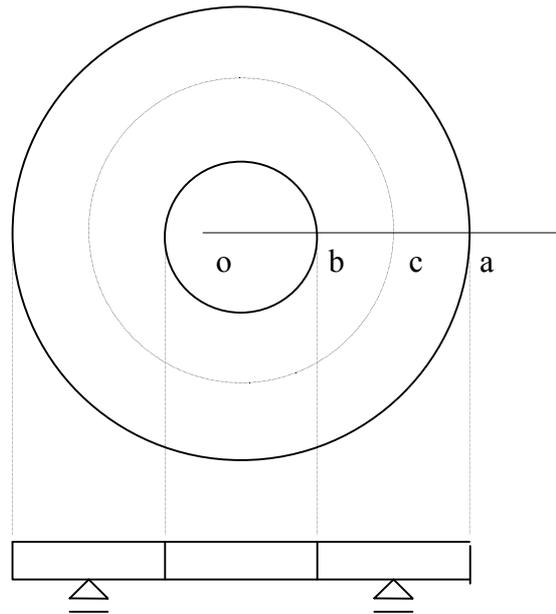


FIGURA 1. Sistema estructural considerado en [7] en el caso de espesor uniforme.

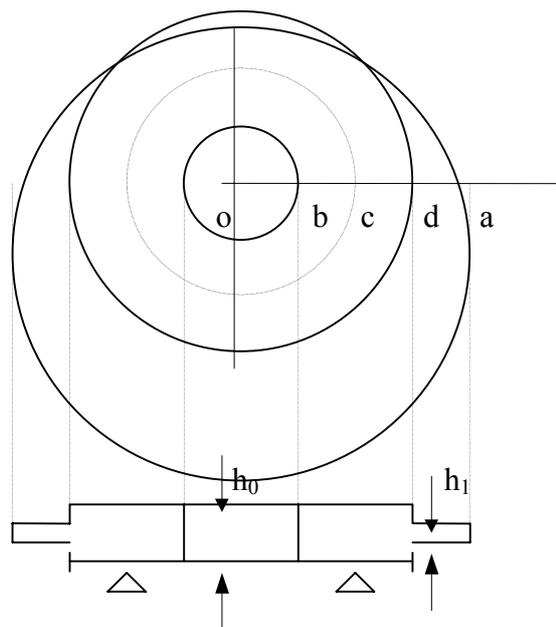
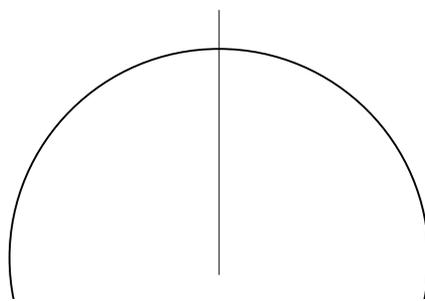


FIGURA 2. Sistema analizado en [8] en el caso en que el espesor varía en forma discontinua.



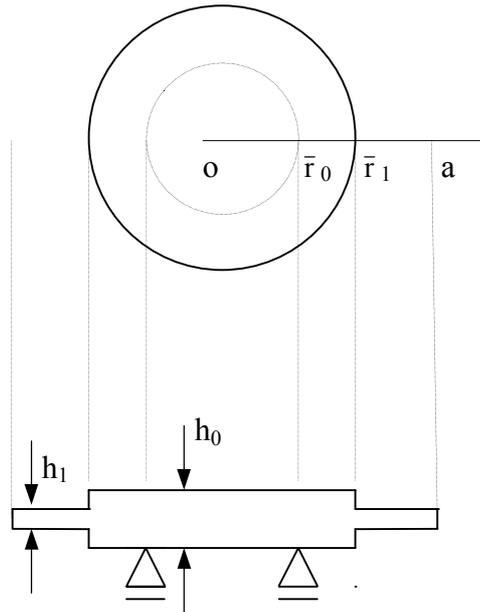


FIGURA 3. Generalización del problema de Bodine [9]

c/a								
0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	Observ.
5.39	5.62	6.31	7.55	9.29	10.36	9.07	---	N = 3
5.17	5.46	6.12	7.35	9.10	10.06	8.78	---	N = 4
4.39	4.89	5.71	6.99	8.56	9.23	8.10	---	N = 5
4.09	4.68	5.57	6.81	8.27	8.88	7.76	---	N = 6
4.01	4.64	5.52	6.75	8.19	8.78	7.68	---	N = 7
3.99	4.63	5.51	6.73	8.18	8.75	7.66	---	N = 8
3.98	4.62	5.50	6.72	8.17	8.74	7.65	---	N = 9
3.9790	4.6188	5.4983	6.7206	8.1687	8.7380	7.6434	6.1193	Exactos

Tabla 1 - Convergencia de los Valores de Ω_1 al Incrementar el Número de Funciones Coordenadas Cuando se Hace Uso del Método de Rayleigh - Ritz Optimizado y Comparación Con los Autovalores Fundamentales Exactos en el Caso en Que $b/a = 0.1$ (Espesor Uniforme)⁷.

b/a	c/a	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1		3.9790 (3.98)	4.6188 (4.62)	5.4983 (5.50)	6.7206 (6.72)	8.1687 (8.17)	8.7380 (8.74)	7.6434 (7.65)	6.1193
0.2			4.0647 (4.06)	4.9833 (4.98)	6.2194 (6.22)	7.7052 (7.71)	8.4347 (8.43)	7.4559 (7.46)	5.9612
0.3				4.3366 (4.34)	5.5798 (5.58)	7.1899 (7.19)	8.3399 (8.34)	7.5635 (7.56)	5.9782
0.4					4.8631 (4.86)	6.5760 (6.58)	8.3761 (8.38)	8.1054 (8.11)	6.2901
0.5						5.7861 (5.79)	8.2114 (8.21)	9.1699 (9.17)	7.0440
0.6							7.4639	10.5683	8.5810

						(7.46)	(10.57)	
0.7							10.9127	11.827
0.8								18.444

Tabla 2 . Valores Exactos de Ω_1 y Autovalores Obtenidos Mediante el Método de Rayleigh - Ritz Optimizado (Entre Paréntesis) Utilizando Nueve Funciones Coordinadas⁷.

Valores de Ω_1

	c/a	d/a = 0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
N = 3	0.2	4.66	5.03	5.41	5.66	5.73	5.71
	0.3		5.20	5.61	5.89	5.97	5.95
	0.4			6.18	6.56	6.70	6.70
	0.5				7.69	7.97	8.03
	0.6					9.68	9.82
	0.7						10.55
N = 9	0.2	3.67	3.86	4.03	4.15	4.19	4.18
	0.3		4.39	4.62	4.79	4.87	4.87
	0.4			5.40	5.66	5.79	5.81
	0.5				6.79	7.03	7.10
	0.6					8.40	8.53
	0.7						8.81
N = 10	0.2	3.67	3.86	4.03	4.15	4.19	4.18
	0.3		4.39	4.62	4.79	4.87	4.86
	0.4			5.40	5.66	5.79	5.81
	0.5				6.79	7.03	7.10
	0.6					8.40	8.52
	0.7						8.80

Tabla 3 - Análisis de la Convergencia del Método en el Caso de Espesor Variable ($h_1/h_0 = 0.80$; $b/a = 0.10$)⁸.

Valores de Ω_1

b/a	c/a	d/a = 0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0.2	0.3	3.84	4.03	4.19	4.25	4.26
	0.4		4.86	5.11	5.21	5.24
	0.5			6.22	6.48	6.55
	0.6				7.88	8.03
	0.7					8.48
0.3	0.4		4.14	4.34	4.49	4.52
	0.5			5.52	5.77	5.84
	0.6				7.33	7.48
	0.7					8.40
0.4	0.5			4.68	4.91	5.04
	0.6				6.62	6.82
	0.7					8.46
0.5	0.6				5.63	5.92

	0.7	8.32
0.6	0.7	7.40

Tabla 4 - Valores de Ω_1 Derminados Con 10 Funciones Coordenadas para Diversos Valores de b/a, c/a y d/a ($h_1/h_0 = 0.80$)⁸.

Valores de Ω_1

b/a	c/a	d/a = 0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0.1	0.2	3.29	3.71	4.14	4.46	4.55	4.48
	0.3		4.08	4.65	5.12	5.30	5.24
	0.4			5.27	5.97	6.30	6.29
	0.5				6.95	7.58	7.71
	0.6					8.83	9.09
	0.7						8.98
0.2	0.3		3.65	4.08	4.48	4.61	4.57
	0.4			4.79	5.41	5.66	5.66
	0.5				6.34	6.99	7.09
	0.6					8.29	8.57
	0.7						8.66
0.3	0.4			4.07	4.51	4.83	4.86
	0.5				5.63	6.20	6.31
	0.6					7.73	8.03
	0.7						8.62
0.4	0.5				4.72	5.21	5.41
	0.6					6.94	7.34
	0.7						8.79
0.5	0.6					5.78	6.34
	0.7						8.78
0.6	0.7						7.75

Tabla 5 - Valores de Ω_1 Determinados Con 10 Funciones Coordenadas Para Diversos Valores de b/a, c/a y d/a ($h_1/h_0 = 0.6$)⁸.

η_h	R_1	$R_0 = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.8	0.4	3.864	4.172	4.643	5.301	6.254	7.489	7.965	6.848	5.394	4.222
	0.5	3.978	4.311	4.831	5.567	6.564	7.787	8.233	7.046	5.538	4.325

(A)

0.6	0.6	4.089	4.456	5.030	5.869	7.010	8.275	8.607	7.330	5.754	4.490
	0.7	4.127	4.513	5.122	6.018	7.270	8.637	8.880	7.537	5.936	4.644
	0.4	3.797	4.024	4.352	4.759	5.397	6.363	6.790	5.714	4.398	3.381
	0.5	4.098	4.381	4.807	5.364	6.049	6.980	7.387	6.152	4.688	3.570
	0.6	4.406	4.782	5.356	6.164	7.175	8.181	8.327	6.878	5.203	3.932
	0.7	4.483	4.912	5.585	6.559	7.867	9.096	8.938	7.363	5.666	4.309
0.8	0.4	3.844	4.144	4.605	5.246	6.195	7.436	7.907	6.801	5.359	4.198
	0.5	3.995	4.333	4.857	5.605	6.606	7.832	8.269	7.072	5.553	4.335
	0.6	4.090	4.457	5.032	5.868	7.012	8.273	8.611	7.328	5.752	4.486
	0.7	4.126	4.511	5.119	6.013	7.259	8.624	8.873	7.531	5.927	4.634
(B) 0.6	0.4	3.689	3.892	4.182	4.548	5.186	6.169	6.549	5.517	4.259	3.289
	0.5	4.107	4.392	4.812	5.364	6.028	6.968	7.362	6.117	4.650	3.541
	0.6	4.388	4.758	5.321	6.098	7.071	8.046	8.250	6.787	5.127	3.866
	0.7	4.474	4.898	5.562	6.522	7.792	8.999	8.901	7.322	5.596	4.232

Table 6 - Comparación de autovalores obtenidos mediante (A) : método de Rayleigh-Ritz optimizado (N = 9) y (B) : método de elementos finitos¹².

$$(\eta_h = h_1 / h_0, \quad R_1 = \bar{r}_1 / a, \quad R_0 = \bar{r}_0 / a).$$

NOTA : al aplicar la técnica de elementos finitos se han utilizado entre 17954 ecuaciones y 17832 (para $R_0 = 0.1$ y $R_0 = 1$, respectivamente)⁹.