

LAS CONDICIONES DE CONTORNO SOBRE LA PARED EN EL MODELADO DE FLUJO TURBULENTO

R. Javier Príncipe y Marcela B. Goldschmit

Centro de Investigación Industrial (CINI) FUDETEC
Córdoba 320
(1054) Buenos Aires, Argentina
e-mail: sidgld@siderca.com

RESUMEN

En este trabajo se comparan las posibles condiciones de borde aplicables a flujos turbulentos simulados con el modelo $k-\varepsilon$ y su efecto sobre la predicción del campo de temperaturas.

ABSTRACT

In this paper we compare different boundary conditions applicable to turbulent flows simulated with the $k-\varepsilon$ model and his effect on the temperature distribution prediction

INTRODUCCION

La turbulencia es un fenómeno tridimensional transitorio, no lineal cuyas características de flujo tienen lugar en escala de longitudes pequeñas, del orden de 10^{-3} veces menor que el dominio del flujo¹. Si bien podrían aplicarse las ecuaciones de Navier Stokes en variables instantáneas en esta escala, para modelar numéricamente problemas industriales, se necesitarían computadoras de una capacidad no obtenible en la actualidad. Por ello, es necesario emplear *modelos de turbulencia* basados en usar la ecuación de Navier-Stokes promediada en el tiempo y un conjunto de ecuaciones o relaciones que permitan representar el tensor de tensiones medio turbulento. El modelo de turbulencia $k - \varepsilon$ de Launder y Spalding² es el más usado en aplicaciones industriales (k : energía cinética turbulenta; ε : velocidad de disipación de energía cinética turbulenta). Algunas de nuestras publicaciones^{4-8,10,11} muestran la aplicación del modelo de turbulencia $k - \varepsilon$ al movimiento del acero líquido en la colada continua.

Con la hipótesis de flujo viscoso, incompresible, estacionario, densidad constante (ρ), viscosidad constante (μ), ausencia de fuerzas externas, ausencia de fuentes volumétricas de calor, número de Prandtl turbulento constante (σ_θ), ausencia de fuerzas de flotación, disipación viscosa despreciable, difusividad térmica

constante (α), las siguientes ecuaciones forman el modelo $k - \varepsilon$ cuando se utiliza el algoritmo iterativo ($k - L$)-predictor / (ε)-corrector¹⁶⁻¹⁹ :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{v}} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} = - \underline{\nabla} P + \underline{\nabla} \cdot [2(\mu + \mu^t) \underline{\mathbf{S}}] \quad (2)$$

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^T) \quad (3)$$

$$\rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\nabla} k = \underline{\nabla} \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu^t}{\sigma_k} \right) \underline{\nabla} k \right] + 2\mu^t \underline{\mathbf{S}} : \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} - \frac{\rho k^{3/2}}{L} \quad (4)$$

$$\rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\nabla} \varepsilon = \underline{\nabla} \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu^t}{\sigma_\varepsilon} \right) \underline{\nabla} \varepsilon \right] + 2\rho C_\mu C_1 k \underline{\mathbf{S}} : \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} - \rho \frac{C_2 \varepsilon^2}{k} \quad (5)$$

$$\mu^t = c_\mu \rho \sqrt{k} L \quad (6)$$

$$L = k^{3/2} / \varepsilon \quad (7)$$

$$\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\nabla} \theta = \underline{\nabla} \cdot \left[\left(\alpha + \frac{\mu^t}{\rho \sigma_\theta} \right) \underline{\nabla} \theta \right] \quad (8)$$

donde $\underline{\mathbf{v}}$ es la velocidad media y θ la temperatura. Los valores de las constantes empíricas que aparecen en las ecuaciones fueron obtenidas por Launder y Spalding², $C_1 = 1.44$; $C_2 = 1.92$; $C_\mu = 0.09$; $\sigma_k = 1.0$; $\sigma_\varepsilon = 1.3$; $\sigma_\theta = 0.9$ (número de Prandtl turbulento).

La validez del modelo $k - \varepsilon$ está restringida a flujos con número de Reynolds elevados ($\Re = \frac{\rho V L}{\mu}$). Sin embargo, dicho número es una propiedad local del flujo, pues depende de la escala de velocidades (V) y de longitudes (L) que pueden variar en el dominio considerado. La velocidad pasa de ser nula en las paredes sólidas a un valor dado por la corriente externa en una capa de longitud muy pequeña. Así, el \Re local, tomado con la escala externa de velocidad y con la longitud dada por la distancia a la pared, aumenta hacia el interior del dominio turbulento. Siempre existirá una zona inmediata a la pared en la cual el \Re es bajo, denominada *capa límite*. En dicha zona hay que hacer alguna modificación al modelo que tenga en cuenta estos efectos de "laminarización". Existen dos caminos para tratar este problema:

- Uno consiste en modificar las ecuaciones diferenciales de k y ε para tener en cuenta la variación de las escalas de longitud en la zona cercana a la pared. Se obtienen así los llamados *modelos $k - \varepsilon$ de bajo número de \Re* ¹³⁻¹⁵. En general estos modelos también incluyen funciones que modifican la viscosidad turbulenta que dependen de la distancia a la pared.
- Otra posibilidad ampliamente divulgada es la utilización de las *leyes de pared*², opción utilizada en este trabajo. Consiste en tomar un dominio computacional más chico que el dominio físico, removiendo la capa límite, y utilizar perfiles universales de velocidad para trasladar la condición de borde desde la pared a la frontera del dominio considerado. Estos modelos tienen la desventaja de que se pierden los detalles del movimiento en la zona cercana a la pared. En cambio, además de resolver el problema de la laminarización, reducen significativamente el costo computacional al remover una zona de gradiente elevados que obligaría a una fuerte discretización de la malla.

EL PERFIL DE VELOCIDADES EN LA CAPA LIMITE

Se considera a continuación el caso de una capa límite sobre una placa plana, bidimensional ($x - y$), en ausencia de fuerzas externas y con gradiente de presión nulo²⁷, asumiendo que la velocidad media es independiente de x (longitud de la placa), las ecuaciones de cantidad de movimiento se simplifican a:

$$0 = \frac{d}{dy} \left(\frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu^t}{\rho} \right) \frac{du}{dy} \quad (9)$$

donde u es la velocidad media en la dirección x . Esta ecuación implica que la tensión de corte total (τ) (laminar y turbulenta) es constante en la capa límite. Por lo cual se obtiene:

$$\frac{\tau}{\rho} = \left(\frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu^t}{\rho} \right) \frac{du}{dy} \quad (10)$$

La integración de la ecuación 10 conduce a los llamados perfiles universales de velocidad.

Aunque este resultado se obtiene en el caso de una capa límite sobre una placa (lo que implica una tensión de corte constante), los mismos perfiles se observan en otros ejemplos en la zona cercana a la pared^{27,28}; por esta razón estas leyes se consideran universales.

Ley logarítmica

Las fluctuaciones del campo de velocidades se anulan en la pared, por lo que también se anulan las tensiones turbulentas, mientras que las tensiones laminares tienen un valor no nulo; esta zona es denominada *subcapa laminar*. A medida que nos alejamos de la pared las tensiones turbulentas crecen rápidamente y las tensiones laminares se vuelven despreciables; esta zona es denominada *subcapa turbulenta*. Para integrar la ecuación 10 se debe tener en cuenta la existencia de estas dos subcapas.

- En la *subcapa laminar* se puede integrar la ecuación 10 despreciando las tensiones turbulentas, desde la pared ($y = 0$) hasta cualquier punto de la subcapa (y) obteniendo un perfil de velocidades lineal

$$\frac{y\rho}{\mu} = \frac{\rho u}{\tau} \quad (11)$$

- En la *subcapa turbulenta* se puede integrar la ecuación 10 despreciando las tensiones laminares. Notando u_* (velocidad de fricción) a la escala de velocidades y $L = C_\mu^{-3/4} \kappa y$ a la escala de longitudes (donde κ es la constante de von Karman $\kappa = 0.4$), se obtiene $\mu^t = \rho \kappa y u_*$ reemplazando en la ec. 10 e integrando desde el borde externo de la subcapa laminar (y_{l_0}) da por resultado

$$\frac{\tau}{\rho} \ln \left(\frac{y}{y_{l_0}} \right) = \kappa u_* (u - u_{l_0}) \quad (12)$$

Finalmente hay que imponer la continuidad de las ecs. 11 y 12 para determinar la constante u_{l_0} . Mediciones experimentales²⁸ dan por resultado $y_{l_0} = \frac{11.6\mu}{\rho u_*}$. Se obtiene entonces

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & y^+ < 11.6 \\ \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5.5 & y^+ > 11.6 \end{cases} \quad (13)$$

donde las variables adimensionales son: $u^+ = \frac{\rho u u_*}{\tau}$; $y^+ = \frac{\rho y u_*}{\mu}$. Según evidencia experimental²⁸ la ley logarítmica se aparta ligeramente de los resultados experimentales en una zona intermedia $5 < y^+ < 30$.

Ley de Reitchardt

La ley de Reitchardt²⁰⁻²² coincide con la ley logarítmica excepto en la zona intermedia, donde se acerca más a los resultados experimentales.

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln (1 + \kappa y^+) + 7.8 \left(1 - e^{-y^+/11.0} - \frac{y^+}{11.0} e^{-0.33y^+} \right) \quad (14)$$

Velocidad de fricción

Hay dos posibles elecciones de la velocidad de fricción:

- **Opción \underline{v}** : esta opción surge de notar que fuera de la subcapa laminar sólo son apreciables las tensiones turbulentas. Se define,

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (15)$$

Por lo cual u_* da una medida de las fluctuaciones de la velocidad. Con esta elección la velocidad adimensional queda escrita como $u^+ = \frac{u}{u_*}$.

- **Opción \underline{k}** : esta opción surge del significado propio de k que representa una medida de las fluctuaciones de la velocidad. Se define,

$$u_* = C_\mu^{1/4} k^{1/2}$$

En este caso la velocidad adimensional está dada por $u^+ = \frac{\rho u u_*}{\tau}$.

En la Figura 1 se muestra el comportamiento de las dos leyes mencionadas en todo el rango de y^+ .

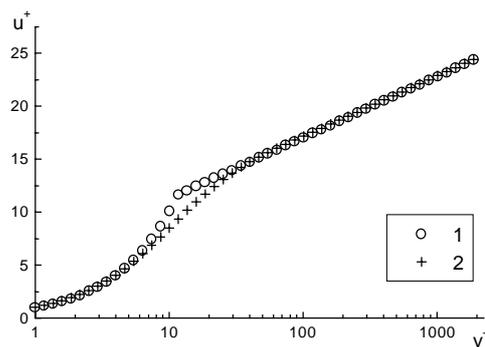


Figura 1: Comportamiento de la velocidad adimensional en la capa límite
 1) Ley lineal-logarítmica
 2) Ley de Reitchardt

CONDICIONES DE CONTORNO SOBRE k y ε

En la Figura 2 se muestran los perfiles de k y ε en la capa límite obtenidos a partir de mediciones experimentales²⁹.

Subcapa turbulenta

La elección de las condiciones de contorno para k y ε está vinculada con la elección de la velocidad de fricción y el esquema iterativo utilizado para resolver el sistema de ecuaciones; se deducen a partir de la suposición

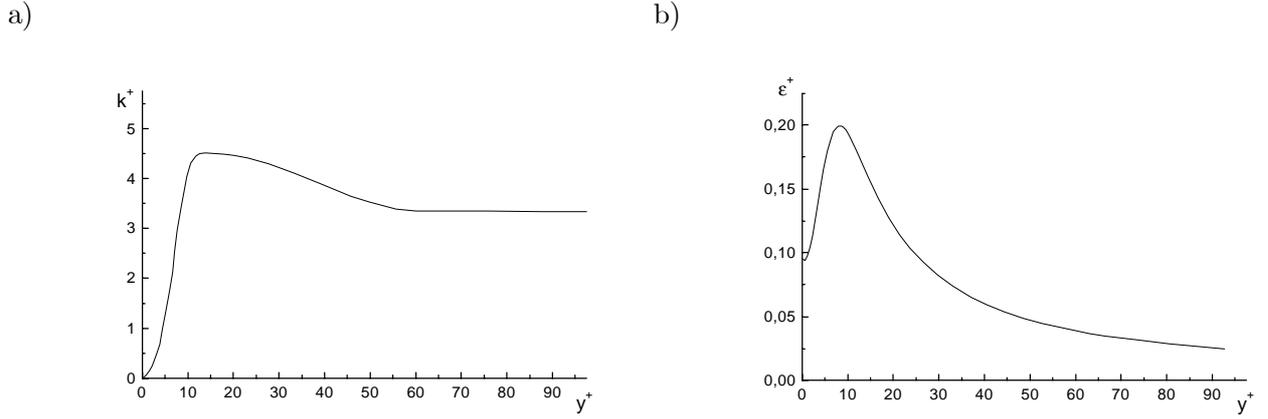


Figura 2: comportamiento de las variables turbulentas en la capa límite
a) Energía cinética turbulenta
b) Velocidad de disipación de energía cinética turbulenta

de la existencia de un estado de equilibrio local en el cual la producción de energía cinética turbulenta iguala la destrucción, no existe transporte y la viscosidad laminar es despreciable

$$0 = \frac{d}{dy} \left[\frac{\mu^t}{\sigma_k} \frac{dk}{dy} \right] + \mu^t \left(\frac{du}{dy} \right)^2 - \frac{\rho k^{3/2}}{L} \quad (16)$$

$$0 = \frac{d}{dy} \left[\frac{\mu^t}{\sigma_\epsilon} \frac{d\epsilon}{dy} \right] + \rho C_\mu C_1 k \left(\frac{du}{dy} \right)^2 - \rho \frac{C_2 \epsilon^2}{k} \quad (17)$$

Reemplazando $\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\mu^t}$ en las ecuaciones anteriores, y suponiendo que la difusión de k es despreciable, se obtiene las condiciones de contorno para k y ϵ en la subcapa turbulenta.

- **Opción \underline{y} :**

$$k = \frac{\tau}{\rho C_\mu^{1/2}} \quad ; \quad \epsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (18)$$

- **Opción k :**

$$\frac{dk}{dy} = 0 \quad ; \quad \epsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (19)$$

Subcapa laminar

Los perfiles de k y ϵ discutidos en la sección anterior corresponden a un estado de equilibrio local que se alcanza sólo en la región donde los efectos viscosos son despreciables (subcapa turbulenta). En la subcapa laminar no existe equilibrio, de hecho en la pared la energía cinética turbulenta se anula ya que la velocidad, tanto media como fluctuante se anula. Luego las condiciones de contorno deben ser corregidas en esta subcapa²¹.

- **Opción \underline{v}** :

$$k = \frac{\tau}{\rho C_\mu^{1/2}} f_k \quad ; \quad \varepsilon = C_\mu^{3/4} k^{3/2} f_\varepsilon \quad (20)$$

$$f_k = \begin{cases} 1 & y^+ > 10 \\ \left(\frac{y^+}{10}\right)^2 & y^+ < 10 \end{cases} \quad (21)$$

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho\sqrt{k} y}{\mu 2 \kappa C_\mu^{-3/4}}\right) \right]} \quad (22)$$

- **Opción \underline{k}** : Esta opción no puede usarse en la subcapa laminar.

CONDICIONES DE CONTORNO EN LA CAPA LIMITE TERMICA

Si se desea resolver un problema acoplado térmicamente, debido al hecho de que el dominio computacional es más chico que el dominio físico, se debe tener en cuenta el perfil de temperaturas en la capa límite para trasladar la condición de borde, como en el caso de las velocidades. Si la condición de borde en la pared es de flujo de calor, ésta se aplica directamente en el borde del dominio computacional. En cambio si la condición de borde en la pared es de temperatura será necesario calcular la condición de contorno en el borde del dominio computacional utilizando perfiles de temperatura.

A partir de la ecuación de transporte de energía, suponiendo que la velocidad y la temperatura sólo dependen de y , se deduce que el flujo de calor, $q = -\rho C_p \left(\alpha + \frac{\mu^t}{\rho\sigma_\theta} \right) \frac{d\theta}{dy}$, es constante en la capa límite. Los perfiles de temperatura se obtienen integrando esta ecuación.

- En la *subcapa laminar térmica*, la viscosidad turbulenta es despreciable, luego

$$q y = -\rho C_p \alpha (\theta - \theta_w) \quad (23)$$

- En la *subcapa turbulenta térmica*, la difusividad térmica es despreciable, luego

$$q \ln \frac{y}{y_0^\theta} = \rho C_p u_* \kappa (\theta_0 - \theta) \quad (24)$$

donde el subíndice w indica la pared, el subíndice 0 indica el borde la subcapa laminar térmica (y_0^θ).

Adimensionalizando las variables según $\theta^+ = \frac{\rho C_p u_*}{q} (\theta_w - \theta)$; $y^+ = \frac{y u_*}{\nu}$ se obtiene

$$\theta^+ = \begin{cases} \text{Pr } y^+ & y^+ < y_0^{\theta^+} \\ \sigma_\theta \left[\frac{1}{\kappa} \ln y^+ + P_T \right] & y^+ > y_0^{\theta^+} \end{cases} \quad (25)$$

donde $P_T = \frac{1}{\sigma_\theta} \left[\text{Pr } y_0^{\theta^+} - \frac{\sigma_\theta}{\kappa} \ln y_0^{\theta^+} \right]$ es una función de los números de Prandtl laminar (Pr) y turbulento que representa el salto de temperaturas en la subcapa viscosa debido al flujo de calor a través de ella. En la bibliografía se encuentran distintas expresiones para dicha función,

$$\text{Ref [23]} \quad P_T = 9.24 \left[\left(\frac{\text{Pr}}{\sigma_\theta} \right)^{3/4} - 1 \right] \quad (26)$$

$$\text{Ref [24]} \quad P_T = 9.24 \left[\left(\frac{\text{Pr}}{\sigma_\theta} \right)^{3/4} - 1 \right] \left[1 + 0.28 \exp\left(-0.007 \frac{\text{Pr}}{\sigma_\theta}\right) \right] \quad (27)$$

$$\text{Ref [2]} \quad P_T = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} \left(\frac{26.0}{\kappa} \right)^{1/2} \left(\frac{\sigma_\theta}{\text{Pr}} \right)^{1/4} \left(\frac{\text{Pr}}{\sigma_\theta} - 1 \right) \quad (28)$$

En la Figura 3 se muestra el perfil de θ^+ en la capa límite para $Pr = 0.71$ (aire) y $\sigma_\theta = 0.9$.

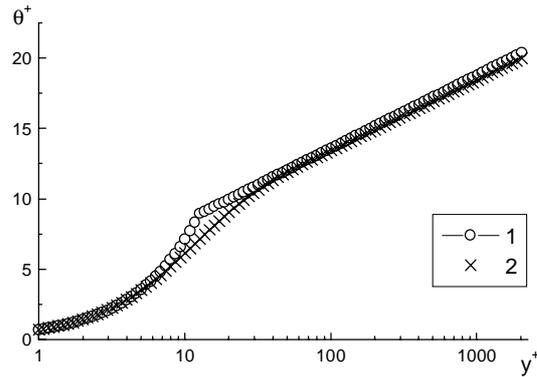


Figura 3: perfil de temperatura en la capa límite

FLUJO EN UN ESCALON

A continuación se considera el flujo turbulento en un canal con una expansión abrupta con alguna de las paredes calentadas con un flujo de calor uniforme. En la referencia²⁶ se publicó un resumen de los resultados que distintos investigadores dieron a este problema utilizando distintos modelos de turbulencia $k - \varepsilon$ con transporte de temperaturas suponiendo un número de Prandtl turbulento constante (ε igual a 0.9). La geometría, y detalles del modelo se encuentran en la Figura 4.

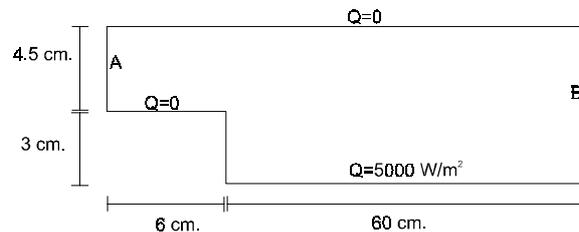


Figura 4: geometría y condiciones de contorno

Las condiciones de contorno²⁶ en la entrada (A) están dadas por perfiles fijos de velocidad k y ε y una temperatura constante e igual a 293 K y corresponden a un número de Reynolds de 20000. Las paredes están calentadas con los flujos indicados en la figura y a la salida (B) está prescrita tracción y flujo de calor nulos.

En la Figura 5 se muestran los perfiles de y^+ , el coeficiente de fricción C_f (definido como $C_f = \frac{2\tau}{\rho U^2}$ donde τ es la tensión de corte sobre la pared y U la velocidad media en la entrada), y el número de Nusselt Nu (definido según $Nu = \frac{QH}{k(\theta_w - \theta)}$ donde Q es el calor aplicado, H la altura del escalón y θ_w la temperatura a lo largo de la pared) en función de la distancia adimensional x^+ desde el escalón, cuando la distancia a la pared es de 2 mm. y las siguientes funciones de pared:

Caso 1: Opción \underline{v} y Ley logarítmica

Caso 2: Opción \underline{v} y Ley de Reichardt

Caso 3: Opción k y Ley logarítmica

Caso 4: Opción k y Ley de Reichardt

En la figura 5 se puede observar las diferencias en los resultados producidos por la elección de las condiciones de contorno. La opción \underline{v} implica una condición de borde de tipo Dirichlet para k , mientras que

la opción **k** una condición de borde de tipo Neumann. Cuando se utiliza la definición de la velocidad de fricción dada por la opción **v**, se obtiene en el punto de estancamiento del final de la recirculación (punto de "reattachment") un valor de y^+ nulo, debido al hecho de que la tensión de corte se anula en ese punto. Esto produce una incorrecta predicción del campo de temperaturas que se manifiesta en la distribución del número de Nusselt, que presenta un mínimo en ese punto, en lugar del máximo esperado experimentalmente¹². La utilización de la opción **k** para la elección de la velocidad de fricción predice el comportamiento correcto como se observa en la figura 5.

La predicción del coeficiente de fricción también es diferente, aunque el comportamiento cualitativo es el mismo y la longitud de la recirculación también.

Finalmente se puede mencionar que no se observan diferencias en los resultados obtenidos al utilizar la ley logarítmica o la de Reitchardt, aunque esta última presenta una mejor convergencia con el algoritmo k - L -predictor ε corrector

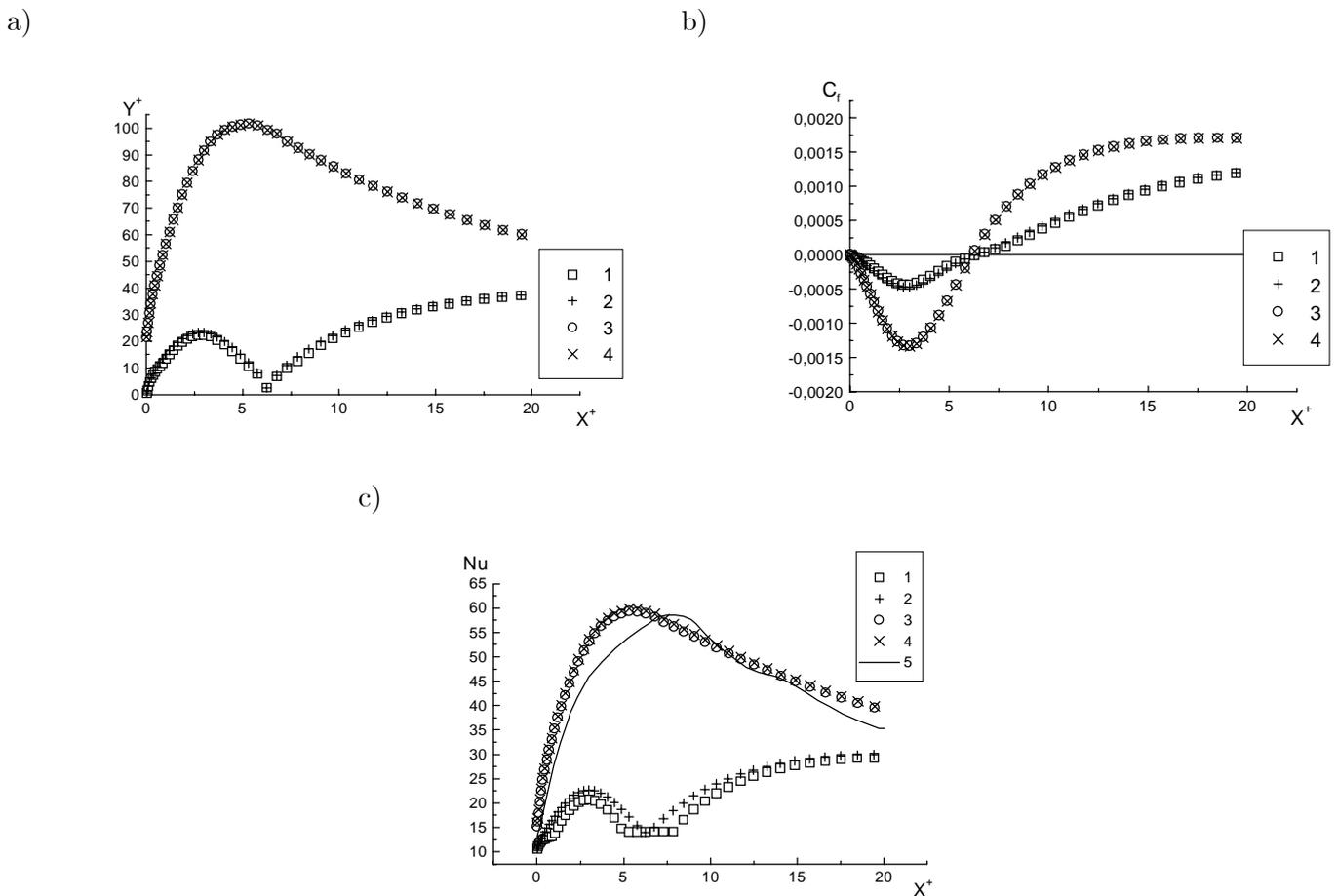


Figura 5: perfiles en función de x^+ de:

- Comportamiento de y^+ en la pared
- Coefficiente de fricción sobre la pared
- Número de Nusselt en la pared, donde 5 muestra resultados experimentales²⁵

CONCLUSIONES

En este trabajo se comparan diferentes condiciones de contorno que pueden ser aplicadas sobre las paredes en el modelado de flujo turbulento de alto número de Reynolds con el modelo $k-\varepsilon$ y el algoritmo iterativo $k-L$ -predicador ε corrector. La elección de dichas condiciones de contorno, a través de la velocidad de fricción, influye sobre los resultados obtenidos para la distribución de temperatura. Este efecto es particularmente importante si se desea resolver problemas que presenten acoplamiento térmico por ejemplo con fuerzas de flotación.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Dr. Eduardo N. Dvorkin por su importante apoyo en las tareas de investigación. Este trabajo se realizó con el apoyo financiero de las empresas de la Organización Techint.

REFERENCIAS

- [1] W. Rodi, Turbulence models and their application in hydraulics. A state of the art review, International Association for Hydraulic Research, The Netherlands, 1980.
- [2] B.E. Launder y D.B. Spalding, "The numerical computation of turbulent flows", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 3, 269-289, 1974.
- [3] N.C. Markatos, "The mathematical modelling of turbulent flows", *Applied Mathematical Modeling*, 10, 190-220, 1986.
- [4] M.B. Goldschmit, R. J. Príncipe y M. Koslowski, "Applications of a (k-e) model for the analysis of continuous casting processes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (en prensa)
- [5] M.B. Goldschmit, "Computational fluid mechanics applications in continuous casting", 80th Steelmaking Conference, Chicago, EEUU, 1997.
- [6] E.N. Dvorkin, M.B. Goldschmit y M.A. Cavaliere, "Computational mechanics applications at Siderar Steel Mill", 2nd. International Congress on Metallurgy and Materials Technology, São Paulo, Brasil, 1997.
- [7] A. Campos y M.B. Goldschmit, "Estudio de la distribución de flujo en el tundish de Siderca", 2nd. International Congress on Metallurgy and Materials Technology, São Paulo, Brasil, 1997.
- [8] A. Campos, M. Goldschmit, E. Rey, G. Walter, P. Ventura, M. Cermignani, E. Guastella, A. Garamendy y J. Madias, "Mejoras en el tundish de la colada continua II de SIDERCA", 11vo. Seminario de Colada Continua, Octubre 1997.
- [9] M.B. Goldschmit y J.R. Príncipe, "Applications of a ($k-\varepsilon$) model for the analysis of steelmaking processes", Fourth World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Julio 1998.
- [10] M.B. Goldschmit, R.J. Príncipe y M. Koslowski, "Numerical modeling of submerged entry nozzle", 3rd. European Conference on Continuous Casting, Madrid, Octubre 1998.
- [11] F. Robiglio, A. Campos, J. Paiuk, M. Maldovan, J. Principe, A. Pignotti y M. Goldschmit, Diseño y modelado del EMS en SIDERCA, 12vo. Seminario de Colada Continua, 1999 (en prensa).
- [12] A.G. Hutton, R. M. Smith y S. Hickmott, "The computation of turbulent flows of industrial complexity by the finite element method, progress and prospects", *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 7, 1277-1298, 1987.

- [13] W.P. Jones y B.F. Launder, "The prediction of laminarization with a two equation model of turbulence", Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 301-314, 1972.
- [14] W.P. Jones y B.F. Launder, The calculation of low Reynolds number phenomena with a two equation model of turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, 16, 1119-1130, 1973.
- [15] U. Goldberg y D. Apsley, A wall distance free low Re turbulence model, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 145, 227-238, 1997.
- [16] M.B. Goldschmit, M.A. Cavaliere y R.A. Radovitzky, "A predictor-corrector iterative scheme for solving the $k-\varepsilon$ model equations", IACM - WCCM III, The Third World Congress on Computational Mechanics, vol. 1, 184-185, Japon 1994.
- [17] M.B. Goldschmit y M.A. Cavaliere, "Numerical solution of turbulent recirculating flows with an iterative ($k-L$)-predictor / (ε)-corrector scheme", The Fourth Pan American Congress of Applied Mechanics, Buenos Aires, vol. III, 89-94, 1995.
- [18] M.B. Goldschmit y M.A. Cavaliere, "Modelling of turbulent recirculating flows via an iterative ($k-L$)-predictor / (ε)-corrector scheme", Applied Mechanics Reviews, vol. 48, N°11, 1995.
- [19] M.B. Goldschmit y M.A. Cavaliere, "An iterative ($k-L$)-predictor / (ε)-corrector algorithm for solving ($k-\varepsilon$) turbulent models", Engineering Computations, vol. 14, N°4, 441-455, 1997.
- [20] V. Haroutunian y M.S.Engelman,"On modelling wall-bound turbulent flows using specialized near wall elements and standar $k - \varepsilon$ turbulence model", FED-117, 1991 Advances in numerical simulation of turbulent flows, Vol. 9 ASME
- [21] B.Mohammadi y O.Pironneau, "Unsteady separated flows computations with wall laws and $k-\varepsilon$ model", Comput Methods Appl. Mech. Engrg. 148 (1997) 393-405
- [22] A.Autret y M. Grandotto,"Finite element computation of a turbulent flow over a backward facing step", Int. J. num. Meth. in Fluids", 7 (1987),89-102
- [23] B. Hong, B.F. Armaly y T.S. Chen,"Numerical solution of turbulent flow and heat transfer over a backward facing step-Abenchmark problem", ASME HTD-331, National heat transfer conference, 1996
- [24] P. Haldipur y K.A.Woodbury, "Finite element implementation of thermal boundary conditions for a $k-\varepsilon$ turbulence model",HTD-311, 1995 National heat transfer conference, Vol. 9 ASME
- [25] K. Oseid, S.E. Kim y D. Chaoudhury, "Turbulent heat transfer in a backstep geometry-benchmark calculations using fluent", ASME HTD-331, National heat transfer conference, 1996
- [26] A.Abrous y A.F.Emery , "Benchmark computational results for turbulent backward-facing step flow with heat transfer", ASME HTD-331, National heat transfer conference, 1996
- [27] M. Lesieur, Turbulence in fluids, Kluwer Academic Publisher, 1997.
- [28] H. Schlichting, Boundary-layer theory, Mc Graw Hill, New York, 1979.
- [29] C.G. Speziale, R. Abid y E.C. Anderson, A critical evaluation of two equation models for near wall turbulence, ICASE Report 90-46, NASA, 1990.