

UNA CAPA FILTRANTE PARA LA ABSORCION DE ONDAS ACUSTICAS

Ruperto P. Bonet, Norberto Nigro, Mario A. Storti and Sergio Idelsohn
Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)
INTEC-(CONICET-UNL)
Güemes 3450
3000 Santa Fe, Argentina
e-mail: rbonet@venus.arcrude.edu.ar

RESUMEN

Una capa filtrante es una capa absorbente usada para terminar el cálculo de radiación y dispersión de ondas en dominios infinitos. En este trabajo son presentadas estrategias para resolver el problema semi-infinito resultante mediante el uso de un filtro de esponjas o de un filtro de Gauss en coordenadas rectangulares. Los resultados numéricos demuestran la capacidad de una capa filtrante en reducir las ondas reflejadas por el dominio computacional.

ABSTRACT

An filtering layer is an absorbing layer used for terminating infinite domain calculations for wave radiation and scattering problems. In this work are presented strategies to solve the obtained semi-infinite problem by means of the using of a sponge filter or a Gaussian filter in rectangular coordinates. The numerical results show the capacity of a discrete filtering layer in to reduce the reflected waves from the computational domain.

INTRODUCCION

La cuestión relativa a una condición de frontera no-reflejante, eficiente y precisa para su uso en la solución numérica de problemas exteriores para modelos ondulatorios ha sido desarrollada desde principios de los años 1970, y ha recibido mucha atención en los últimos años. La necesidad de una tal condición de frontera aparece en muchos campos de aplicación, incluyendo la acústica subacuática, la geofísica y la interacción sólido-fluidos.

Es bien conocido que las condiciones de frontera artificiales simplificadas producen reflexiones “espurias” de las ondas desde la frontera hacia el interior del dominio computacional, y con ello se originan grandes errores en la solución computada.⁶ La efectividad de la mayoría de las *RBC* mejora cuando la frontera artificial es alejada del dispersor en dirección hacia el infinito. En efecto, para resolver numéricamente un problema exterior ondulatorio dependiente

del tiempo, uno puede simplemente tomar la frontera tan lejos que las ondas no alcancen esta frontera en todos los intervalos de tiempo en el cual la solución es buscada. Sin embargo esta aproximación es altamente ineficiente debido al aumento del dominio computacional y de manera consecuente una malla numérica con muchos grados de libertad. Por tanto, la tendencia en los últimos años ha sido el empleo sobre la frontera artificial de una *RBC* que sea suficientemente precisa cuando la frontera está localizada próxima al dispersor. En lo que sigue examinamos las mejoras obtenidas por diversos autores en las condiciones de radiación *RBC* para la ecuación de onda en el caso transitorio y/o armónico en el tiempo.

El uso de ecuaciones diferenciales parciales como condiciones de frontera absorbente para el modelo linealizado tridimensional fue propuesto para ecuaciones hiperbólicas por Engquist y Majda^{4,5}. Ellos derivaron una secuencia de *RBC* de orden creciente usando aproximaciones racionales (tipo Padé) del símbolo de la ecuación pseudo-diferencial obtenido sobre la frontera. De esta manera desarrollaron un método sistemático para obtener condiciones de frontera locales en la frontera artificial.

Estas condiciones garantizan aproximaciones en diferencias estables y también minimizan las reflexiones artificiales (no físicas) las cuales ocurren en la frontera. Tales condiciones son más efectivas para ondas que inciden normalmente sobre una frontera artificial plana. Estas ideas han sido desarrolladas posteriormente por muchos autores, tales como Wagatha y Higdon.⁷ Estos presentaron una extensión del método, que les permite absorber ondas desde diferentes direcciones.

Otra posibilidad de simulación en un campo exterior infinito a una distancia finita del dominio computacional es el uso de un amortiguamiento artificial, en particular en la forma de una capa de esponja. En este método un término disipativo artificial es añadido (implícitamente o explícitamente) a las ecuaciones cerca de las fronteras artificiales del dominio truncado, tales que las ondas salientes sean absorbidas con cierta reflexión. Este método ha sido empleado por Kosloff en la solución de la ecuación de Shrodinger.¹⁰ Un avance en este sentido fue desarrollado por Israeli y Orszag⁸ mediante el uso de ciertas capas de esponjas en combinación con ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Dicho método es de fácil implementación, y posee buenas propiedades de reflexión para un amplio rango de frecuencias, pero la necesidad de ampliar el dominio computacional para la capa de esponja encarece el costo computacional. Recientemente F. Collino y P. Monk^{2,3} desarrollaron una capa de esponja de forma especial para las ecuaciones de Maxwell, básicamente, mediante un cambio de variables de la capa de esponja de Bérenger. En este procedimiento el término disipativo es incluido en la variable independiente. Este procedimiento controla las reflexiones emanadas de la capa de esponja, sin un alto incremento del costo computacional.

En este trabajo, una capa filtrante para la absorción de ondas acústicas es usada como estrategia para terminar las aproximaciones de elementos finitos de problemas de propagación y dispersión de ondas. Con el diseño de esta capa el problema semi-infinito original es modificado mediante el uso de un filtro de esponjas o de un filtro de Gauss en coordenadas rectangulares. La introducción de un filtro de esponjas permite reducir limitadamente las reflexiones del dominio computacional. Una comparación, en este sentido, entre la capa de esponja de Bérenger y los filtros de esponjas en coordenadas rectangulares es presentada. Mediante esta metodología es modificado artificialmente el operador en la región exterior del dominio computacional, obteniéndose una condición de frontera absorbente local con una apertura hasta 70 grados.

Una vía diferente para resolver el problema semi-infinito lo representa la introducción de un filtro de Gauss unidimensional en la capa filtrante. En este trabajo es presentado tal operador integral cuyo núcleo es una Gaussiana centrada en el interior de la capa. Un estudio detallado es realizado en el caso plano donde son determinados de forma óptima los parámetros que caracterizan la campana de Gauss. Tales parámetros son usados para el cálculo de la propagación de guías de ondas en geometrías rectangulares. Los resultados numéricos demuestran la capacidad de una capa filtrante en reducir las ondas reflejadas por el dominio computacional.

FILTRO DE ESPONJA-CAPA DE ESPONJA DE BERENGER

0.1 Filtro de esponja

La capa de esponja puede ser mejorada ajustando el amortiguamiento al carácter de las ondas que están siendo modeladas. Israeli y Orszag⁸ hicieron notar que las componentes ondulatorias no deseadas pueden ser filtradas selectivamente bajo ciertas modificaciones del amortiguamiento. Un modelo adecuado para estudiar los filtros de esponjas al imponer la condición de frontera de radiación cuando $x \rightarrow +\infty$ es

$$\phi_{xx} + l^2\phi - \nu(x)\left(\frac{d}{dx} + ik\right)\phi = 0, \quad (0 < x < L) \quad (1)$$

con $L > x_o$ y sujeta a la condición de frontera absorbente

$$\phi_x + ik\phi = 0; \quad x = L \quad (2)$$

donde $\nu = \nu(x)$ es la función amortiguante y $\bar{\ell} = k$ es una aproximación a $\ell = k \cos \theta_0$. La ecuación de Helmholtz ha sido modificada ligeramente por la imposición de un pequeño término amortiguante de la forma $ik\nu(x)$. El amortiguamiento reduce la amplitud de las ondas dispersadas, así como la amplitud de aquellas ondas que no son absorbidas por la condición de frontera.

Seleccionemos una condición de frontera en $x = x_o$ ($x_o > 0$), tal que minimice las reflexiones de ondas que viajan hacia la frontera desde $x > x_o$. Considerando la onda incidente de amplitud uno, escribimos ϕ como:

$$\phi = e^{-il(x-x_o)} + R e^{il(x-x_o)} \quad (3)$$

donde $|R|$ es el coeficiente de reflexión. Una condición de frontera de la forma

$$\phi_x + il\phi = 0 \quad (4)$$

produce el resultado deseado $R = 0$ cuando sustituimos (3) en (4). Sin embargo esta condición no puede ser generalmente alcanzada, y en el caso de simultaneidad de varias ondas incidentes, su uso es más limitado.⁹ La selección de una condición de frontera simple corresponde a la condición de incidencia normal ($l = k$); sin embargo, ella origina significativas reflexiones en el dominio computacional en la medida en que crece el ángulo de incidencia. Este hecho promovió la búsqueda de aproximaciones parabólicas de orden superior, desarrolladas por Kirby e implementadas en esquemas de diferencias finitas. La implementación de dichas expresiones mediante el método de elementos finitos se dificulta debido a la presencia de derivadas de alto orden.

Como vía alternativa pretendemos obtener comportamientos cualitativos semejantes al empleo de las aproximaciones parabólicas de orden superior mediante la introducción de los filtros de esponjas en la ecuación de Helmholtz sujeta a las condiciones de frontera en $x = x_o$ y en $x = L$ que garanticen la existencia y unicidad de soluciones de esta ecuación.

El empleo combinado del amortiguamiento con la condición de frontera absorbente puede minimizar las reflexiones de ondas en la frontera del dominio de cálculo ($x = x_o$), mediante una selección adecuada de los parámetros del amortiguamiento. Por ejemplo, la ecuación de onda (1) filtra selectivamente las ondas que viajan hacia la izquierda mediante el coeficiente $\nu(x) > 0$, mientras que las ondas que viajan hacia la derecha se propagan sin amortiguamiento. Con este tipo de filtro de esponja un efecto relativo de amortiguamiento sobre las ondas incidentes desde $x = +\infty$ puede ser alcanzado sin distorsión o reflexión de las ondas salientes.

0.2 Capa de esponja de Bérenger

La capa de esponja de Bérenger desarrollada por Collino y Monk² para la solución numérica del sistema de ecuaciones de Maxwell, modifica la ecuación unidimensional de Helmholtz en la forma siguiente:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{da}{adx} \frac{d\phi}{dx} + \left(\frac{k}{a}\right)^2\phi = 0, \quad (0 < x < L) \quad (5)$$

donde

$$a = \frac{ik}{ik - \nu(x)} \quad (6)$$

$$(7)$$

$$\frac{da}{adx} = \frac{2ik\nu'(x)}{(ik - \nu(x))^2} \quad (8)$$

En la referencia,² Collino y Monk desarrollan el método *PML* para una función amortiguante en forma parabólica, dada por los parámetros siguientes:

$$\nu(x) = A \left(\frac{x}{L - x_0} \right)^2, \quad A = \frac{3}{2(L - x_0)} \log_{10} \left(\frac{1}{R_0} \right)$$

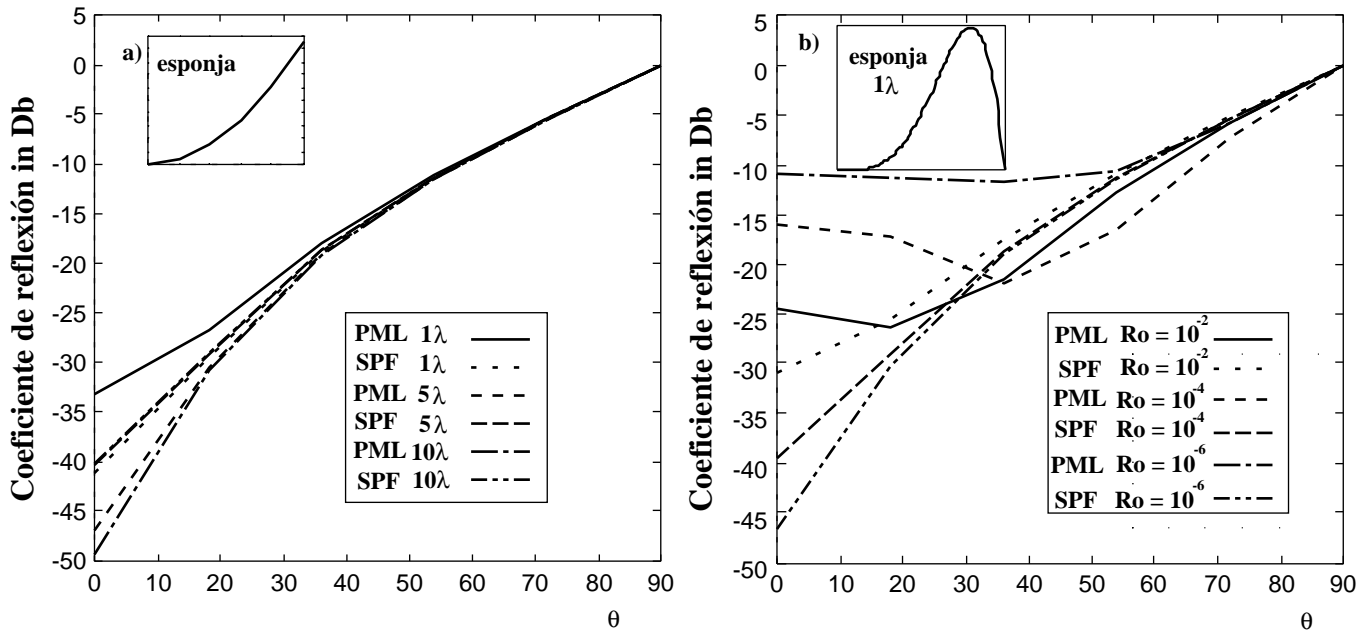


Figura 1: Coeficiente de reflexión en Db ($20 \log_{10}(|R|)$). Comparación entre los métodos PML (de Collino y Monk) y filtro de esponjas (Israel y Orszag). a) Variando el espesor respecto a una esponja parabólica estándar. b) Variando la amplitud en una esponja de quinto orden estándar.

La Figura 1 muestra una comparación de los coeficientes de reflexión $|R|$ (en Db.) entre ambos procedimientos, con los parámetros óptimos derivados en cada método. La Figura 1 (izquierda) muestra la comparación entre los dos métodos, variando el espesor de la capa de esponja para una función amortiguante en forma parabólica. Los resultados no reflejan diferencias apreciables en tal caso. De igual manera, cuando usamos una función amortiguante

no monótona y que se anula en los extremos de la capa, los coeficientes de reflexión obtenidos son del mismo orden, cuando aumentamos la tasa de amortiguamiento, tal como se aprecia en la Figura 1 (derecha). Finalmente, los resultados obtenidos muestran que no hay sensibles diferencias entre los dos métodos empleados en la actualidad, para imponer una condición de radiación mediante una capa de esponja en un dominio no acotado, gobernado por la propagación de ondas armónicas simples.

ACERCA DEL USO DE FUNCIONES AMORTIGUANTES

Los métodos desarrollados por Israeli y Orszag han sido examinados para la ecuación de Helmholtz en coordenadas rectangulares. La combinación de condiciones de frontera absorbente con cierto amortiguamiento (en particular, el filtro de esponja) muestra significativas mejorías respecto a las condiciones de frontera “estándards” de radiación planas. A lo largo del capítulo se ha examinado una forma especial de imponer el amortiguamiento; tal amortiguamiento modifica la velocidad de propagación de la onda en el medio, con el término $-\nu(x)\frac{\partial}{\partial x}$, e influye en la absorción lateral con el término $+ik\nu(x)\phi$, a una distancia dada del dominio de cálculo, determinada por el valor de x . Los resultados presentados aquí son producto de una experimentación numérica con funciones amortiguantes particulares, y para los cuales fue necesaria la determinación de los parámetros que la definen, la cual fue realizada de manera experimental. Durante el desarrollo de los experimentos fue estudiada la influencia de la amplitud A de la función amortiguante, de la curvatura (n) de la misma y del espesor $L - x_0$ de la capa de esponja en la capacidad de absorción de la capa. Dados estos parámetros prefijados, fue determinada una condición de frontera de radiación en la frontera del dominio de cálculo, mediante la solución del problema de contorno exterior (en la zona de la capa de esponja) determinado por las condiciones de borde tipo Dirichlet o Neumann en la frontera interior de la capa (frontera del dominio de cálculo) y una condición de radiación plana de primer orden en la frontera lejana.

La utilidad de la clase de funciones amortiguantes seleccionada se muestra con el empleo del filtro de esponjas. Mediante modelos unidimensionales se evaluó la influencia de la discretización, y el comportamiento de las condiciones de radiación derivadas en la frontera del dominio de cálculo, respecto al ángulo de incidencia al contorno. Los resultados obtenidos permiten expresar las conclusiones siguientes:

- La imposición de condiciones de frontera de radiación mediante un filtro de esponja es menos reflectiva que con la capa de esponja, en la clase de esponjas con soporte compacto.
- La imposición de condiciones de frontera de radiación mediante un filtro de esponja ofrece significativas mejoras respecto al empleo de condiciones de frontera de radiación planas de primer orden.

Del proceso de calibración y validación de los modelos numéricos, podemos concluir que:

- El empleo de demasiado amortiguamiento puede modificar la concavidad de la curva de reflexión, lo cual genera oscilaciones en la frontera del dominio de cálculo.
- Se pueden obtener con el empleo del filtro de esponjas comportamientos semejantes a la aproximación minimax (70 grados) para ángulos de incidencia al contorno menores o iguales que 70 grados, y un mejor comportamiento que la aproximación minimax (50 grados).

La influencia de la discretización y el efecto de las condiciones de frontera fue examinado en dos casos extremos:

- Para incidencia normal de una onda sobre un fondo plano, con condición de Dirichlet en la frontera izquierda, se observó que:
 1. La condición frontera exacta plana no es perfectamente absorbente en el medio discreto.
 2. Variando el espesor de la capa de esponjas en una resolución de $8e/\lambda$ se pueden minimizar las reflexiones en la frontera del dominio de cálculo tanto como se quiera.

Para un ángulo de incidencia al contorno de 89 grados y considerando una condición de borde tipo Robin en la frontera izquierda, se examina el comportamiento del filtro de esponjas para una resolución de $20e/\lambda$; en este caso, se obtuvieron comportamientos cualitativamente semejantes al empleo de las condiciones de frontera de radiación (planas) de orden superior.

La estrategia en la implementación numérica de fijar el paso de la malla, y variar la amplitud y el espesor de la esponja para minimizar las reflexiones, puede convertirse en prohibitiva para modelos de propagación de ondas en regiones extensas a causa del incremento del costo computacional debido al almacenamiento de los elementos de la capa de esponja y el tiempo de corrida para determinar los valores nodales de la solución computada en la zona de la capa de esponja.

FILTRO DE GAUSS EN COORDENADAS RECTANGULARES

Una estrategia para describir el comportamiento de las ondas salientes al infinito ha sido introducida mediante un filtro de Gauss, sin modificar el operador en la región exterior del dominio computacional.¹ Este procedimiento se diferencia del filtro de esponjas en que se sustituye la condición de frontera en el punto más lejano de la “capa de condensación” por una “condición distribuida” a lo largo de toda la “capa de condensación”, que en forma exacta adopta la forma:

$$\mathcal{L}(\phi) = \int_{x_i}^{x_e} \sigma(x) \phi e^{ikx} dx = 0 \quad (9)$$

donde el núcleo $\sigma(x)$ representa la función Gaussiana

$$\sigma(x) = e^{-\frac{s^2(x-x_c)^2}{2}} \quad (10)$$

determinada por los parámetros s y x_c , que caracterizan el ancho y centro de la campana, respectivamente. Para la “capa de condensación discretizada” resolvemos un sistema de ecuaciones desacoplado de orden $(n_j + 1) \times (n_j + 1)$.

$$a^j u^{j-1} + b^j u^j + a^j u^{j+1} = 0 \quad (11)$$

donde

$$a^j = 1 + \frac{l^2}{6} \quad (12)$$

$$b^j = -2 + \frac{2l^2}{3} \quad (13)$$

y u^j como los valores nodales del potencial que satisface la ecuación:

$$\mathcal{L}^h(\hat{\psi}) = \sum_{j=1}^{j=n_j} \sigma(x_j) u^j e^{ikx_j} h_j = 0 \quad (14)$$

Sea

$$\vec{U} = (u^0, u^1, \dots, u^{n_j})^T$$

entonces

$$\mathbf{M}\vec{U} = \mathbf{F}$$

donde \mathbf{M} es la matriz de orden $(n_j + 1) \times (n_j + 1)$ definida por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} b^0 & a^0 & 0 & \cdots \\ a^1 & b^1 & a^1 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ \sigma^0 e^{ikx_0} & \sigma^1 e^{ikx_1} & \cdots & \sigma^{n_j} e^{ikx_{n_j}} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -a^0 \hat{\psi}^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notamos que la matriz \mathbf{M} no es una matriz tridiagonal, como en los procedimientos descritos en las secciones anteriores, debido a la presencia de la “condición distribuida” en la última fila de la matriz; sin embargo, un procedimiento para resolver este sistema conservando la forma tridiagonal de la matriz puede ser fácilmente implementado. Los coeficientes b^j , y a^j de la matriz \mathbf{M} representan los coeficientes del operador de Helmholtz discretizado sobre la “capa de condensación”, o sea, vienen dados en la igualdad (12). Dado que \mathbf{F} es proporcional a u^{-1} , podemos calcular la solución en la forma

$$\vec{U} = (u^{*0}, u^{*1}, \dots, u^{*n_j})^T u_l^{-1}$$

y una nueva condición es obtenida sobre u_l^0 , u_l^1 :

$$u^{*0} u_l^1 - u^{*1} u_l^0 = 0 \quad (15)$$

La relación anterior es llamada condición de frontera “discreta local circular” generada por un filtro de Gauss unidimensional. Dada la igualdad (15) se tiene para $l = 1, 2, \dots, N_{lay}$ la relación de flujo

$$u_l^1 = \frac{u^{*1}}{u^{*0}} u_l^0 = \mu(\Lambda_l) u_l^0 \quad (16)$$

Una relación no-local es obtenida mediante la transformación no-singular \mathbf{V} en la forma

$$\phi^1 = \mathbf{F}\phi^0 \quad (17)$$

tales que la matriz \mathbf{F} es igual

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{V}$$

donde \mathbf{G} es la matriz diagonal formada por los valores $\mu(\Lambda_l)$, $l = 1, 2, \dots, N_{lay}$ que caracterizan las ondas salientes del dominio computacional. La relación discreta no-local (17) expresa el flujo de energía a través de la frontera artificial del dominio computacional, y una condición de radiación circular discreta no-local basada en un filtro de Gauss radial, o sea, la capacidad de absorción de esta condición de frontera depende de la selección de los parámetros que determinan

la forma de la función gaussiana. Esto da origen como en la sección anterior, a la búsqueda de los parámetros óptimos s y x_c , que caracterizan la menor reflexión posible en la frontera artificial del dominio computacional. Usando la función objetivo

$$\frac{1}{(MM+1)} \sum_{m=0}^{MM} |R_m(\theta_m, s)|^2 \cos(\theta_m) \quad (18)$$

mediante la expresión para el coeficiente de reflexión discreto ¹

$$|R| = \left| \frac{\phi^{*1} - \exp(+il^{(0)}h)\phi^{*0}}{\phi^{*1} - \exp(-il^{(0)}h)\phi^{*0}} \right|_{x_0} \quad (19)$$

realizamos el proceso de optimización sobre el espacio de los parámetros s y x_c .

Tabla 1: Capa filtrante óptima

Espesor de la capa (λ)	valores de s óptimos	Coefficiente de reflexión promedio R
1	3.1430	2.7775e-03
2	2.4905	1.3249e-03
3	1.9199	2.7755e-04
4	1.7823	2.8770e-04
5	1.5157	9.6061e-05
6	1.4585	1.1577e-04
7	1.2935	4.5070e-05
8	1.2638	5.8650e-05
9	1.1472	2.4434e-05
10	1.1229	3.0625e-05

En la Tabla 1 se muestran los valores óptimos del parámetro s , para capas de diferentes espesores. Notamos que para una capa de mayor espesor le corresponde un valor óptimo de s cada vez menor, lo cual significa que la campana escalada a una longitud de onda es más estrecha. Estos valores han sido obtenidos prefijando el valor x_c al centro de la campana, y considerando hasta 99 modos discretos progresivos. Las curvas de reflexión para diferentes resoluciones de la malla de cálculo (N -número de puntos por longitud de onda) son mostradas en la Figura 2. En esta Figura puede observarse que el proceso es convergente. Resultados de estos cálculos para diferentes espesores son mostrados en la Figura 3. Como era de esperar las curvas envolventes de los coeficientes de reflexión para un ángulo de incidencia dado, decrecen cuando el espesor de la capa filtrante crece (excepto para ciertos ángulos donde el coeficiente de reflexión tiende a cero). Estos resultados son comparables a los resultados del método PML de Collino y Monk (1996).² Para propósitos prácticos el valor optimal para s puede ser fiteado como

$$s \sim 3.2 \delta^{-0.45}$$

para espesores de capa de hasta diez longitudes de ondas.

CONCLUSIONES

El empleo de una capa filtrante para la absorción de ondas acústicas mediante el método del filtro de esponjas o el método del filtro de Gauss, representa una herramienta útil para incorporar una condición de radiación en un esquema

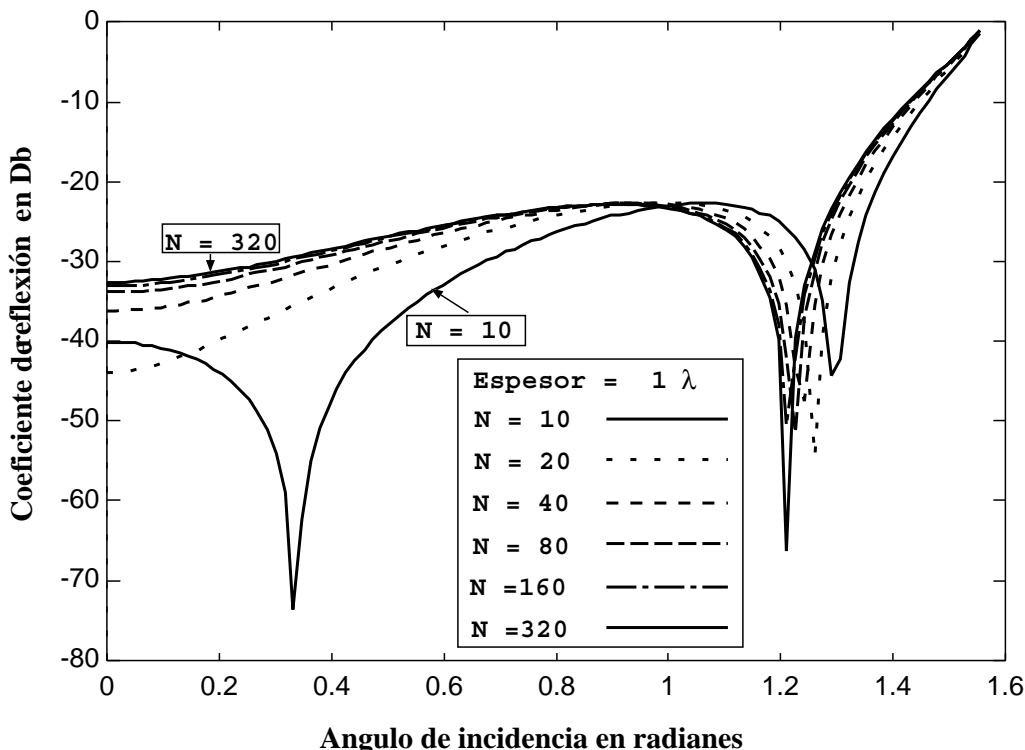


Figura 2: Coeficiente de reflexión óptimo (en Db, o sea, $20\log_{10}|R|$) respecto al ángulo de incidencia en radianes, para diferentes mallas de cálculo.

numérico. Mediante estos métodos optimizados se logra reducir sustancialmente la reflexión numérica de las ondas salientes del dominio computacional para una capa finita, así como controlar la capacidad de absorción de las mismas. En el método del filtro de esponjas o la capa de Bérenger se obtiene una condición de radiación local en función del ángulo de incidencia de la onda a la frontera de radiación, mientras que, en el método del filtro de Gauss, además de obtener los parámetros optimizados para la función diseñada, se construye una condición de radiación no-local, que describe el “mejor” comportamiento de las ondas salientes para cada ángulo de incidencia a la frontera de radiación, es decir, para cada modo transversal incluyendo los modos de propagación y los modos desvanecientes.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido soporte financiero del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina) mediante el proyecto BID 802/OC-AR PID Nr. 26, y de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina).

REFERENCIAS

- [1] Bonet R.P., Nigro N., Storti M.A., Idelsohn S.R. “Non-reflective planar boundary condition based on Gauss filter”. Submitted to Journal: *Communications on Numerical Methods in Engineering*, August 1998.
- [2] Collino F., Monk P. “Optimizing the perfectly matched layer”, 1996.
- [3] Collins Francis, Monk Peter. “The perfectly matched layer in curvilinear coordinate. Theme 4. Simulation et optimisation des systemes couplés”. Project Ondes. Rapport des recherche 3049, INRIA, Nov., pag.49, 1996.

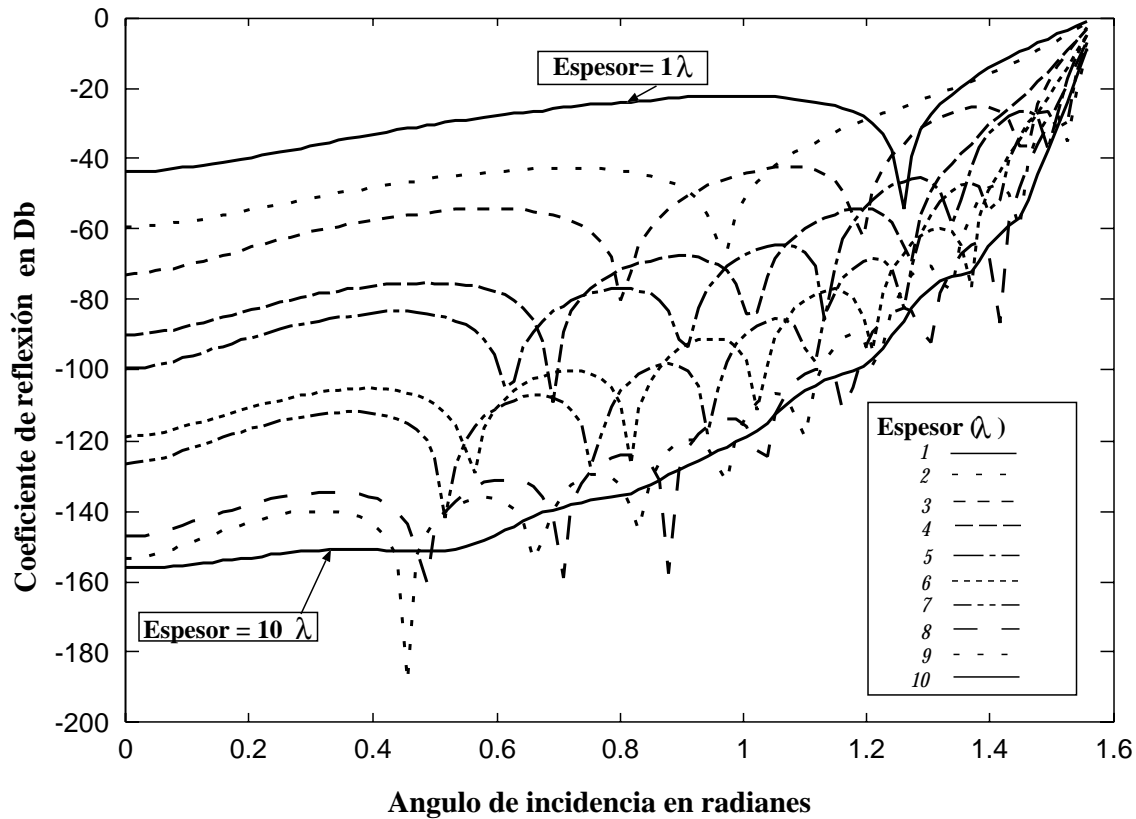


Figura 3: Coeficiente de reflexión óptimo (en Db, o sea, $20\log_{10}|R|$) respecto al ángulo de incidencia en radianes, para diferentes mallas de cálculo.

- [4] Engquist B., Majda A. “Radiation boundary conditions for acoustic and elastic calculations”. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32:313–357, 1979.
- [5] Engquist Bjorn, Majda Andrew. “Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves”. *Mathematics of Computation*, 31(139):629–651, July 1977.
- [6] Givoli, Dan. “A spatially exact non-reflecting boundary condition for time dependent problems”. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95:97–113, 1992. North-Holland.
- [7] Higdon R.L. “Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equations”. *Math. Comput.*, 47:437–459, 1986.
- [8] Israeli Moshe, Orszag Steven A. “Approximation of radiation boundary conditions”. *Journal of Computational Physics*, 41:115–135, 1981.
- [9] Kirby, J.T. “A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations”. *Coastal Engineering, Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam.*, 13(3):211–218, 1989.
- [10] Kosloff R., Kosloff D. “Absorbing boundaries for wave propagation problems”. *Journal of Computational Physics*, 63:363–376, 1986.