# UN METODO DE DESCOMPOSICION PARA RESOLVER INECUACIONES VARIACIONALES NO SIMETRICAS

Gabriela F. Reyero, Rafael V. Verdes and Roberto L.V. González

Instituto de Matemática Beppo Levi. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Univ. Nacional de Rosario. Av. Pellegrini 250. 2000 Rosario, Argentina.
e-mail: greyero@fceia.unr.edu.ar–rverdes@fceia.unr.edu.ar–rlvgonza@arnet.com.ar

## RESUMEN

En este trabajo estudiamos la solución de inecuaciones variacionales no simétricas. Planteamos un problema equivalente en términos de puntos silla. Usamos un método de descomposición que nos permite resolver el problema original a través de problemas más simples que involucran inecuaciones variacionales en conjuntos de dimensión menor.

## ABSTRACT

We study in this work the solution of non-symmetric variational inequalities. We state an equivalent problem in terms of saddle-points. We use a decomposition method which allows us to solve the original problem dealing with simples problems comprising the search of saddle-points on smaller convex sets.

## INTRODUCCION

En este trabajo presentamos un método de descomposición para resolver inecuaciones no simétricas. En [6], [12], [11], [13], [14] pueden verse algunas ideas preliminares de este método, como así también algunas aplicaciones. El método se basa en de los principios generales expuestos en [9]. El procedimiento fue desarrollado para resolver el conjunto de problemas de junturas que fuera presentado por J.-L. Lions en [8].

Básicamente el problema consiste en resolver la inecuación variacional:

$$\text{Hallar } \bar{u} \text{ tal que } a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq (f, v - \bar{u}) \quad \forall v \in K\,, \tag{1}$$

donde $K$ es un conjunto convexo cerrado de $R^n$.

Suponemos aquí que $K$ puede descomponerse de la siguiente manera:

$$K = \bigcup_{v_I \in K_I} \hat{K}(v_I)\,, \tag{2}$$

donde $v_I$ es una variable auxiliar que pertenece a un conjunto convexo $K_I$ .

La descomposición de $K$ dada por (2) implica que el problema original – que es equivalente a un problema de punto silla sobre el conjunto $K \times K$ – puede descomponerse en un conjunto de inecuaciones variacionales definidas sobre los conjuntos $\hat{K}(v_I)$, para cada valor de la variable auxiliar $v_I$. Estas inecuaciones variacionales corresponden a problemas de punto silla simplificados definidos sobre los conjuntos $\hat{K}(v_I) \times \hat{K}(v_I)$ que, generalmente, son más simples que $K \times K$. La segunda parte del método es encontrar el adecuado $\bar{v}_I$ tal que $\bar{u} \in \hat{K}(\bar{v}_I)$, donde $\bar{u}$ es la solución original calculada resolviendo la inecuación variacional simplificada:

$$a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq (f, v - \bar{u}) \quad \forall v \in \hat{K}(\bar{v}_I).$$

Presentamos la inecuación variacional original **IV,** sus propiedades y una reformulación equivalente como un problema de punto silla. Formulamos la metodología de descomposición y la solución de un sistema de inecuaciones variacionales jerárquicamente acopladas. Describimos un algoritmo iterativo y probamos su convergencia. Probamos algunas propiedades de continuidad y convexidad de algunas funciones auxiliares y probamos propiedades de diferenciabilidad de estas funciones.

# PROBLEMA VARIACIONAL

## 4.1 El problema original

Sea $V = \Re^n$, consideramos sobre $V \times V$ la forma bilineal $a$ continua y coerciva, i.e. existe $\alpha > 0$, y $\beta > 0$ tal que

$$\left| \begin{array}{l} a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V, \\ \\ |a(v,u)| \leq \beta \|v\|_V \|u\|_V \quad \forall v, u \in V. \end{array} \right. \tag{3}$$

Consideramos también una forma lineal $L$ definida por $L(v) = (f, v)$ donde $f \in V$ y $(\cdot, \cdot)$ denotan el producto escalar en $V$. Sea $K$ un subconjunto de $V$ no vacío, compacto y convexo.
El problema original consiste en resolver la inecuación variacional:

$$\boxed{\textbf{IV}} \qquad \text{Hallar } \bar{u} \in K \text{ tal que } a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq (f, v - \bar{u}) \quad \forall v \in K.$$

Sea $A$ el operador lineal asociada a la forma bilineal $a$, i.e.

$$a(v,u) = (Av, u) \ \forall u \in V$$

y $A^*$ el adjunto de $A$. Como $A$ es monótono, hemicontinuo y coercivo sobre $K$, la **IV** puede escribirse de manera equivalente (ver [3])

$$\text{Hallar } \bar{u} \in K \text{ tal que } a(v, v - \bar{u}) \geq (f, v - \bar{u}) \quad \forall v \in K. \tag{4}$$

Sabemos de [3] y [10] que esta **IV** tiene solución única que notaremos con $\bar{u}$.

## 4.2 Reformulación como un problema de punto silla

Consideramos la siguiente función $F$, definida sobre $V \times V$

$$F(v,u) = a(v, v-u) - L(v-u) \quad \forall v, u \in V. \tag{5}$$

**Remark 1** *Es claro que $F(u,u) = 0$, $\forall u \in V$. Se puede probar fácilmente también que $F$ es una función convexa-cóncava, luego es natural asociar a $F$ su conjunto de puntos silla. Recordemos la definición de punto silla.*

**Definition 1** *Sean $Y \subset \Re^p$, $Z \subset \Re^q$ y $\psi : Y \times Z \to \Re$, decimos que $(\hat{y}, \hat{z}) \in Y \times Z$ es un punto silla de $\psi$ si*

$$\psi(\hat{y}, z) \leq \psi(\hat{y}, \hat{z}) \leq \psi(y, \hat{z}) \quad \forall y \in Y, \ \forall z \in Z.$$

En los siguientes parágrafos estudiamos los puntos silla de $F$ y su relación con la solución de la **IV**. La siguiente proposición nos da la equivalencia entre la búsqueda de puntos silla de $F$ y el cálculo de la solución $\bar{u}$ de **IV**.

**Proposition 1** *El funcional $F$ tiene un único punto silla en $K \times K$. Este punto pertenece a la diagonal de $K \times K$ y tiene la forma $(\bar{u}, \bar{u})$, donde $\bar{u}$ es la solución de la* **IV***; en otras palabras, tenemos*

$$F(\bar{u}, u) \leq F(\bar{u}, \bar{u}) \leq F(v, \bar{u}) \qquad \forall (v, u) \in K \times K \,. \tag{6}$$

**Remark 2** *La proposición 1 significa que la* **IV** *es equivalente al siguiente problema*

$\boxed{\textbf{PS}}$ *Hallar $\bar{u} \in K$ tal que $(\bar{u}, \bar{u})$ es un punto silla de $F$ en $K \times K$.*

# SOLUCION POR UN METODO DE DESCOMPOSICION

Para encontrar el elemento $\bar{u}$ por un método de descomposición (el único elemento de $K$ tal que $(\bar{u}, \bar{u})$ es un punto silla de $F$ en $K \times K$ o la única solución de **IV**), analizamos el caso donde el conjunto convexo $K$ es la unión de conjuntos convexos, y sobre esta familia propondremos una descomposición jerárquica del problema.

## 5.1 Definiciones y resultados preliminares

**Definition 2** *Sean $K$ un convexo no vacío incluidodo en $V$, $\varphi \in \mathcal{F}(V, \Re)$ una función real, decimos que*

1. *$\varphi$ es convexa sobre $K$ si $\forall \lambda \in (0,1)$, $\forall x_1, x_2 \in K$,*

$$\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda \varphi(x_1) + (1-\lambda) \varphi(x_2) \,.$$

2. *$\varphi$ es estrictamente convexa sobre $K$ si $\forall \lambda \in (0,1)$, $\forall x_1, x_2 \in K$, $x_1 \neq x_2$*

$$\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) < \lambda \varphi(x_1) + (1-\lambda) \varphi(x_2) \,.$$

**Definition 3** *Sean $Y$ un convexo de $\Re^p$, $Z$ un convexo de $\Re^q$, luego decimos que una función $\psi : Y \times Z \rightarrow \Re$ es convexa-cóncava en $Y \times Z$ si $\forall z \in Z$, $y \rightarrow \psi(y,z)$ es una función convexa y $\forall y \in Y$, $z \rightarrow \psi(y,z)$ es una función cóncava.*

**Definition 4** *Sea $E : \mathrm{Dom}(E) \rightarrow V$ un operador, si $W \subset \mathrm{Dom}(E) \subset V$ entonces*

1. *$E$ es monótono sobre $W$ si*

$$(E(u) - E(v), u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in W \,,$$

2. *$E$ es fuertemente monótono sobre $W$ si existe $\eta > 0$ tal que*

$$(E(u) - E(v), u - v) \geq \eta \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in W \,.$$

Las siguientes proposiciones son válidas (ver su prueba en [3]).

**Proposition 2** *Sean $Y \subset \Re^p$, $Z \subset \Re^q$, entonces una función $\psi : Y \times Z \rightarrow \Re$ tiene un punto silla en $Y \times Z$ sí y sólo si*

$$\max_{z \in Z} \min_{y \in Y} \psi(y,z) = \min_{y \in Y} \max_{z \in Z} \psi(y,z) \,.$$

**Proposition 3** *El conjunto de puntos silla de $\psi$ tiene la forma $Y_o \times Z_o$ donde $Y_o \subset Y$ y $Z_o \subset Z$.*

Sean $Y$ y $Z$ dos espacios de dimensión finita y $\psi : Y \times Z \to \Re$ tal que

(H1) $Y_1 \subset Y$ es un conjunto no vacío, compacto y convexo,

(H2) $Z_1 \subset Z$ es un conjunto no vacío, compacto y convexo,

(H3) $\forall y \in Y_1$, $z \to \psi(y, z)$ es una función cóncava y semicontinua superiormente (s.c.s.).

(H4) $\forall z \in Z_1$, $y \to \psi(y, z)$ es una función convexa y semicontinua inferiormente (s.c.i.).

**Proposition 4** *Bajo las hipótesis (H1)-(H4) el conjunto de puntos silla de $\psi$ en $Y_1 \times Z_1$ es $Y_o \times Z_o$, donde $Y_o$ y $Z_o$ son conjuntos compactos y convexos.*

**Proposition 5** *Si $z \to \psi(y, z)$ es estrictamente cóncava $\forall y \in Y$, $Z_o$ tiene a lo sumo un punto.*

**Proposition 6** *Si $y \to \psi(y, z)$ es estrictamente convexa $\forall z \in Z$, $Y_o$ tiene a lo sumo un punto.*

### 5.2 Descomposición del convexo $K$

Sea $X_I = \Re^m$ (que llamaremos *espacio intermedio*). Suponemos que existe un conjunto convexo y compacto $K_I \subset X_I$, y una aplicación que asigna a cada $v_I \in K_I$ un subconjunto $\hat{K}(v_I)$ compacto y convexo del espacio $V$ de manera tal que el convexo $K$ verifique la siguiente descomposición

$$K = \bigcup_{v_I \in K_I} \hat{K}(v_I) . \tag{7}$$

**Definition 5** *Sean $Y, Z \subset K$, definimos*

$$d_1(Y, Z) = \max\left( \sup_{y\in Y} \inf_{z\in Z} \|y - z\| , \sup_{z\in Z} \inf_{y\in Y} \|y - z\| \right),$$

$$d_2(Y, Z) = \inf_{y\in Y} \inf_{z\in Z} \|y - z\| .$$

**Remark 3** *Puede verse que $d_1$ es una distancia entre subconjuntos de $K$ llamada la distancia de Hausdorff.*

**Propiedades de la familia de conjuntos convexos $\hat{K}(v_I)$**
Supondremos que la familia de convexos $\{\hat{K}(v_I) : v_I \in K_I\}$ verifica las siguientes hipótesis:

1. $\forall u_I, v_I \in K_I$ y $\forall \lambda \in (0, 1)$ ,

$$\lambda \hat{K}(u_I) + (1 - \lambda) \hat{K}(v_I) \subset \hat{K}(\lambda u_I + (1 - \lambda) v_I) . \tag{8}$$

2. Dados $u_I, v_I \in K_I$ existen constantes positivas $c$ y $\gamma$ tales que

$$d_1\left(\hat{K}(u_I), \hat{K}(v_I)\right) \le c \|u_I - v_I\|_{X_I} , \tag{9}$$

$$d_2\left(\hat{K}(u_I), \hat{K}(v_I)\right) \ge \gamma \|u_I - v_I\|_{X_I} . \tag{10}$$

3. Para cada $v_I \in K_I$ y para cada $v \in \hat{K}(v_I)$ existe un operador lineal y continuo
$$T_v : X_I \to V$$
tal que
$$\text{si } v_I \in K_I,\ \delta v_I \in X_I \text{ y } v_I + \delta v_I \in K_I \Rightarrow v + T_v(\delta v_I) \in \hat{K}(v_I + \delta v_I)\ . \tag{11}$$
Más aún, la familia de operadores $(T_v)_{v \in \hat{K}(v_I)}$ es uniformemente continua en norma con respecto al parámetro $v$, i.e.
$$\|T_v - T_{\tilde{v}}\| \leq C \|v - \tilde{v}\|_V \qquad \forall v, \tilde{v} \in K\,. \tag{12}$$

### 5.3 Solución jerárquica del problema de punto silla

Teniendo en cuenta (7) podemos descomponer jerárquicamente el problema **PS**. De la proposición 2 sabemos que este problema está asociado a la ecuación
$$\max_{u \in K} \min_{v \in K} F(v,u) = 0\,.$$
Bajo la hipótesis (7) tenemos la siguiente relación *max-min concatenada*
$$\max_{u \in K} \min_{v \in K} F(v,u) = \max_{u_I \in K_I} \max_{u \in \hat{K}(u_I)} \min_{v_I \in K_I} \min_{v \in \hat{K}(v_I)} F(v,u) = 0\,. \tag{13}$$
Introducimos la función
$$F_I(v_I, u) = \min_{v \in \hat{K}(v_I)} F(v,u)\ . \tag{14}$$
Ahora (13) queda
$$\max_{u \in K} \min_{v \in K} F(v,u) = \max_{u_I \in K_I} \max_{u \in \hat{K}(u_I)} \min_{v_I \in K_I} F_I(v_I, u)\ . \tag{15}$$
Como $F_I$ es convexa-cóncava vale
$$\max_{u \in \hat{K}(u_I)} \min_{v_I \in K_I} F_I(v_I,u) = \min_{v_I \in K_I} \max_{u \in \hat{K}(u_I)} F_I(v_I,u)\ . \tag{16}$$
Utilizando (14) y (16), la condición (13) es escrita jerárquicamente como:
$$\max_{u_I \in K_I} \min_{v_I \in K_I} \max_{u \in \hat{K}(u_I)} \min_{v \in \hat{K}(v_I)} F(v,u) = 0\,. \tag{17}$$
Consideremos la función
$$F_{II}(v_I, u_I) = \max_{u \in \hat{K}(u_I)} F_I(v_I, u)\ ,$$
luego (17) tiene la forma
$$\max_{u_I \in K_I} \min_{v_I \in K_I} F_{II}(v_I, u_I) = 0\,. \tag{18}$$
Veremos en que se verifican las siguientes propiedades:

- $F_{II}$ es convexa-cóncava en $K_I \times K_I$.
- $F_{II}$ es continua en $K_I \times K_I$.
- $F_{II}(\cdot, u_I) : K_I \to \Re$ es estrictamente convexa $\forall u_I \in K_I$.
- $F_{II}(u_I, u_I) = 0 \quad \forall u_I \in K_I$.

Con estas propiedades, es natural considerar la búsqueda de puntos silla de $F_{II}$. Entonces, asociaremos a (18) el problema de punto silla

$\boxed{\mathbf{PS}_I}$ Hallar $\bar{v}_I, \bar{u}_I \in K_I$ tal que $(\bar{v}_I, \bar{u}_I)$ es un punto silla de $F_{II}$ en $K_I \times K_I$.

Para este problema tenemos el siguiente resultado:

**Lemma 7** *Existe un único punto silla $(\bar{u}_I, \bar{u}_I)$ de $F_{II}$.*

### 5.3.1 Un problema de punto silla subordinado

Para encontrar la relación entre la solución de **PS** y **PS**$_I$, asociaremos a cualquier punto $u_I \in K_I$ el punto $Su_I \in \hat{K}(u_I)$ definido de la siguiente manera:

**Definition 6**

1. *$Su_I$ es la única solución de la inecuación variacional restringida o simplificada:*
$$\boxed{\mathbf{IV}_S} \qquad a(Su_I, v - Su_I) \geq (f, v - Su_I) \quad \forall v \in \hat{K}(u_I),\ Su_I \in \hat{K}(u_I).$$
2. *$Su_I$ es el único elemento de $\hat{K}(u_I)$ tal que $(Su_I, Su_I)$ es un punto silla de $F$ en $\hat{K}(u_I) \times \hat{K}(u_I)$.*

**Proposition 8** *Las dos formas de la definición anterior son equivalentes.*

La hipótesis (9) implica que la aplicación $u_I \to Su_I$ es Hölder continua en $K_I$ :

**Proposition 9** *Si $Su_I$ es la única solución de la inecuación variacional restringida* $\mathbf{IV}_S$ *entonces $Su_I$ es una función Hölder continua respecto del parámetro $u_I$, i.e.*
$$\|Sv_I - Su_I\| \leq \|v_I - u_I\|^{\frac{1}{2}}\ . \tag{19}$$

Si usamos las hipótesis (11) y (12) podemos reforzar el resultado previo de continuidad a un resultado de Lipschitzianidad.

**Proposition 10** *El operador $S : K_I \to V$ es Lipschitz-continuo en $K_I$, i.e. existe $k_S$ constante independiente de $u_I$ tal que*
$$\|S(u_I + \delta u_I) - S(u_I)\| \leq k_S \|\delta u_I\|$$

### 5.3.2 Relaciones entre los puntos silla de $F$ y los de $F_{II}$

El operador $S$ lleva los elementos del espacio paramétrico $K_I$ a los elementos del conjunto original $K$. Ahora, definiremos el operador $P$, que identifica la parametrización del conjunto $K$ dada por el parámetro $v_I \in K_I$.

**Definition 7** *Introducimos el operador $P$*
$$\begin{array}{rcl} P & : & K \to K_I \\ Pu & = & u_I \end{array}$$
*donde $u_I$ es el único elemento de $K_I$ tal que $u \in \hat{K}(u_I)$. En virtud de* (10) *es claro que $u_I$ es único.*

Las relaciones entre **PS**-**PS**$_I$ se muestran en el siguiente diagrama
$$\begin{array}{ccc} \boxed{\mathbf{PS}} & \Leftrightarrow & \boxed{\mathbf{PS}_I} \\ \boxed{\mathrm{K}} & \leftrightarrow & \boxed{\mathrm{K}_I} \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} P(K) & = & K_I \\ K & = & \bigcup\limits_{u_I \in K_I} \hat{K}(u_I) \\ & & \\ \bar{u} & \leftrightarrow & \bar{u}_I \\ P\bar{u} & = & \bar{u}_I \\ S\bar{u}_I & = & \bar{u} \end{array}$$

Las dos últimas relaciones son establecidas en los teoremas 11 y 12.

**Theorem 11** *Sea $\bar{u}$ tal que $(\bar{u}, \bar{u})$ es un punto silla de $F$ en $K \times K$ entonces $(P\bar{u}, P\bar{u})$ es un punto silla de $F_{II}$ en $K_I \times K_I$ .*

Presentamos aquí un procedimiento para construir puntos silla de $F$ a partir de los puntos silla de $F_{II}$.

**Theorem 12** *Si $(\bar{u}_I, \bar{u}_I)$ es un punto silla de $F_{II}$ en $K_I \times K_I$ entonces $(S\bar{u}_I, S\bar{u}_I)$ es un punto silla de $F$ en $K \times K$ .*

**Remark 4** *Como $(S\bar{u}_I, S\bar{u}_I)$ es un punto silla de $F$ en $K \times K$ obtenemos por la proposición 1 que*

$$S\bar{u}_I = \bar{u} \, .$$

**Remark 5** *El resultado anterior puede obtenerse en una manera más simple usando argumentos de unicidad, en lugar de utilizar un procedimiento constructivo. Esto se muestra en el siguiente:*

**Theorem 13** *Sea $\bar{u}_I$ tal que $(\bar{u}_I, \bar{u}_I)$ es un punto silla de $F_{II}$ en $K_I \times K_I$ entonces $S\bar{u}_I = \bar{u}$ y $(S\bar{u}_I, S\bar{u}_I)$ es el único punto silla de $F$ en $K \times K$.*

### 5.4 Sistemas jerarquizados de inecuaciones variacionales

Hemos introducido en las subsecciones anteriores un par de problemas de punto silla y hemos mostrado que la solución original puede encontrarse resolviendo en primer lugar el problema de punto silla más simple $\mathbf{PS}_I$ y, usando esta solución $\bar{u}_I$, construimos la solución global $S\bar{u}_I$ resolviendo un problema de punto silla en el conjunto restringido $\hat{K}(\bar{u}_I) \times \hat{K}(\bar{u}_I)$ (conjunto más pequeño que $K \times K$).

Queremos ahora asociar una inecuación variacional a cada problema de punto silla y obtener un sistema de inecuaciones variacionales acopladas, teniendo así las siguientes equivalencias

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\mathbf{PS}} & \Leftrightarrow & \boxed{\mathbf{IV}} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \boxed{\mathbf{PS}_I} & \Leftrightarrow & \boxed{\mathbf{IV}_I} \end{array}$$

**La inecuación variacional asociada a PS**
Hemos visto en la sección 2 que $(\bar{u}, \bar{u})$ es un punto silla de $F$ sí y sólo si se verifica la **IV**.

**La inecuación variacional asociada a $\mathbf{PS}_I$**
Para obtener la $\mathbf{IV}_I$, utilizaremos el siguiente resultado:

**Lemma 14** *Sean $W_1$, $W_2$ subconjuntos convexos y compactos de $\Re^n$ y $\Re^m$ respectivamente y sea $\psi : W_1 \times W_2 \to \Re$ una función convexa-cóncava y diferenciable en todo punto de $W_1 \times W_2$. Entonces $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ es un punto silla de $\psi$ sii*

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial w_1} (\bar{w}_1, \bar{w}_2), w_1 - \bar{w}_1 \right) \quad \geq \quad 0 \quad \forall w_1 \in W_1, \tag{20}$$

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial w_2} (\bar{w}_1, \bar{w}_2), w_2 - \bar{w}_2 \right) \quad \leq \quad 0 \quad \forall w_2 \in W_2 \, . \tag{21}$$

La función $F_{II}$ es diferenciable en la diagonal de $K_I \times K_I$. Esta propiedad nos permitirá asociar al único punto silla $(\bar{u}_I, \bar{u}_I)$ de $F_{II}$ en $K_I \times K_I$ una inecuación variacional usando el lema 14 y la propiedad de diferenciabilidad de $F_{II}$.

Para aplicar el lema 14 a $\mathbf{PS}_I$, tomamos $W_1 = W_2 = K_I$, $\psi = F_{II}$ y $(\bar{w}_1, \bar{w}_2) = (\bar{u}_I, \bar{u}_I)$. Se puede probar que

$$\frac{\partial F_{II}}{\partial v_I}(\bar{u}_I, \bar{u}_I) = T^*_{S\bar{u}_I}(AS\bar{u}_I - f) \,, \tag{22}$$

$$\frac{\partial F_{II}}{\partial u_I}(\bar{u}_I, \bar{u}_I) = T^*_{S\bar{u}_I}(-AS\bar{u}_I + f) \,. \tag{23}$$

Por lo tanto, $(\bar{u}_I, \bar{u}_I) \in K_I \times K_I$ es un punto silla de $F_{II}$ sí y sólo si $\bar{u}_I$ es una solución de

$$\boxed{\mathbf{IV}_I} \qquad \left(T^*_{S\bar{u}_I}(AS\bar{u}_I - f), v_I - \bar{u}_I\right) \geq 0 \qquad \forall v_I \in K_I \,,$$

pues en virtud de (22) y (23) las condiciones (20) y (21) se convierten en la misma condición $\mathbf{IV}_I$.

**Remark 6** *La $\mathbf{IV}_I$ es una inecuación variacional bien definida ya que el operador $B$ asociado a $\mathbf{IV}_I$ es hemicontinuo y fuertemente monótono,*

$$\begin{array}{l} B : K_I \to X_I \\ u_I \to B(u_I) = T^*_{Su_I}(ASu_I - f) \,. \end{array} \tag{24}$$

**Remark 7** *La monotonía fuerte del operador $B$ implica que $\mathbf{IV}_I$ tiene una única solución $\bar{u}_I \in K_I$.*

**Remark 8** *Teniendo en cuenta $\mathbf{IV}_S$ que define $Su_I$, obtenemos que el problema original se reduce a encontrar la solución del sistema de inecuaciones variacionales acopladas:*

$$\left| \begin{array}{lll} \left(T^*_{S\bar{u}_I}(AS\bar{u}_I - f), u_I - \bar{u}_I\right) \geq 0 & \forall u_I \in K_I \,, & \boxed{\mathbf{IV}_I} \\ & & \\ (AS\bar{u}_I - f, u - S\bar{u}_I) \geq 0 & \forall v \in \hat{K}(\bar{u}_I) \,. & \boxed{\mathbf{IV}_S} \end{array} \right.$$

El siguiente teorema formaliza esta equivalencia.

**Theorem 15**

1. *Para cada $u_I \in K_I$, la inecuación variacional $\mathbf{IV}_S$ tiene solución única $Su_I$. El punto $(Su_I, Su_I)$ es el único punto silla de $F$ en $\hat{K}(u_I) \times \hat{K}(u_I)$.*

2. *La inecuación variacional $\mathbf{IV}_I$ tiene solución única $\bar{u}_I \in K_I$. Más aún, $(\bar{u}_I, \bar{u}_I)$ es un punto silla de $F_{II}$ en $K_I \times K_I$.*

3. *Si $\bar{u}_I$ es la solución de $\mathbf{IV}_I$ entonces $S\bar{u}_I$ es la <u>solución de la $\mathbf{IV}$ original</u>, i.e.*

$$a(v, v - S\bar{u}_I) \geq (f, v - S\bar{u}_I) \qquad \forall v \in K \,. \tag{25}$$

## 5.5 Solución iterativa del procedimiento de descomposición

El sistema $\mathbf{IV}_I$–$\mathbf{IV}_S$ puede resolverse utilizando el siguiente método iterativo.

### Descripción del algoritmo iterativo

El procedimiento consiste en elegir un punto inicial $u_I^o \in K_I$; después de esto y usando la información dada por el elemento $Su_I^\nu$ calculado en términos de $u_I^\nu$ a través de la solución de $\mathbf{IV}_S$, corregimos este punto $u_I^\nu$ hasta que la condición $\mathbf{IV}_I$ se verifique.
Para describir el algoritmo necesitaremos la siguiente:

**Definition 8** $\Pr(u,\Omega)$ *es la proyección de un punto $u$ sobre un conjunto convexo cerrado $\Omega$, i.e.*

$$\|\Pr(u,\Omega)-u\| \leq \|w-u\| \qquad \forall w\in\Omega\,,\ \Pr(u,\Omega)\in\Omega.$$

Específicamente, el algoritmo tiene la siguiente estructura:

**Algoritmo**

$\boxed{1}$ Dados $u_I^o \in K_I,\ \rho>0,\ \nu=0$

$\boxed{2}$ Resolver $\mathbf{IV}_S$ y obtener $u^\nu = Su_I^\nu$

$\boxed{3}$ Calcular $T_{Su_I^\nu}$

$\boxed{4}$ Calcular $B^\nu = T^*_{Su_I^\nu}\left(ASu_I^\nu - f\right)$

$\boxed{5}$ Poner $u_I^{\nu+1} = \Pr\left(u_I^\nu - \rho B^\nu, K_I\right)$

hacer $\nu=\nu+1$, e ir a $\boxed{2}$.

### 5.5.1 Análisis del algoritmo

Este algoritmo genera una sucesión $(u_I^\nu, u^\nu)$ que converge a la solución $(\bar{u}_I,\bar{u})$ de $\mathbf{IV}_I$–$\mathbf{IV}_S$ para todo $\rho<\bar{\rho}$, siendo $\bar{\rho}$ un adecuado número positivo.
En el paso 2, dado $u_I^\nu \in K_I$ resolvemos la $\mathbf{IV}_S$

$$\left(ASu_I^\nu - f, v - Su_I^\nu\right) \geq 0 \qquad \forall v \in \hat{K}\left(u_I^\nu\right),$$

y obtenemos la única solución $u^\nu = Su_I^\nu$.
En el paso 3, para este $u_I^\nu \in K_I$ y el asociado $u^\nu = Su_I^\nu \in \hat{K}\left(u_I^\nu\right)$, calculamos $T_{Su_I^\nu}$ y en el paso 4 calculamos el vector $B^\nu = B\left(u_I^\nu\right)$ definido por

$$B^\nu = T^*_{Su_I^\nu}\left(ASu_I^\nu - f\right).$$

Para describir el paso 5 introducimos las siguientes aplicaciones $Q$ y $M$.

**Definition 9**
- *Definimos para $\rho>0$ la aplicación $Q: K_I \to X_I$ de la siguiente forma*

$$Q\left(u_I\right) = u_I - \rho B\left(u_I\right).$$

- *Definimos también la aplicación $M: X_I \to K_I$ de la siguiente forma*

$$Mu_I = \Pr\left(Q\left(u_I\right), K_I\right).$$

En el paso 5 calculamos el punto $u_I^{\nu+1}$ aplicando el operador $M$, i.e. definimos

$$u_I^{\nu+1} = Mu_I^\nu.$$

### 5.5.2 Convergencia del algoritmo

**Remark 9** *Como $S$ es Lipschitz continua, también lo es $B$, luego si notamos con*

$$\Xi := \sup_{\substack{u_I \in K_I \\ \tilde{u}_I \in K_I}} \frac{\|B(u_I) - B(\tilde{u}_I)\|}{\|u_I - \tilde{u}_I\|}$$

*resulta que $\Xi$ es finito y $\forall u_I \in K_I$, $\forall \tilde{u}_I \in K_I$ se verifica*

$$(B(u_I) - B(\tilde{u}_I), u_I - \tilde{u}_I) \geq \beta_{F_{II}} \|u_I - \tilde{u}_I\|^2 . \tag{26}$$

*Luego obtenemos*

$$\frac{\beta_{F_{II}}}{\Xi} < 1 .$$

Usando estos parámetros se tienen los siguientes resultados:

**Proposition 16** *Si $0 < \rho < \dfrac{2\beta_{F_{II}}}{\Xi^2}$, entonces $Q$ y $M$ son contractivas y $M$ tiene un único punto fijo $\bar{u}_M \in K_I$.*

**Lemma 17** *El punto fijo $\bar{u}_M$ de $M$ es la solución de $\mathbf{IV}_I$ i.e. $\bar{u}_M = \bar{u}_I$ y*

$$\left(T^*_{S\bar{u}_M}(AS\bar{u}_M - f), v_I - \bar{u}_M\right) \geq 0 \qquad \forall v_I \in K_I ,$$

*y $S\bar{u}_M$ es la solución de la* **IV** *original.*

El siguiente teorema resume las propiedades del algoritmo:

**Theorem 18** *Si $0 < \rho < \dfrac{2\beta_{F_{II}}}{\Xi^2}$, el algoritmo genera una sucesión $\{u_I^\nu, Su_I^\nu\}$ tal que $u_I^\nu$ converge a $\bar{u}_I$, la única solución de $\mathbf{IV}_I$ y $Su_I^\nu$ converge a $S\bar{u}_I$, la única solución del problema original.*

# AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido soporte financiero del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina) mediante el proyecto N$^o$ 4796, y de la Universidad Nacional de Rosario N$^o$ 19/I028 (Argentina).

# References

[1] Auslender A., *Optimisation, méthodes numériques*, Masson, Paris, 1976.

[2] Ciarlet P.G., *Plates and junctions in elastic multi-structures: an asymptotic analysis*, Masson, Paris, 1990.

[3] Ekeland I., Temam R., *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris, 1974.

[4] Ferris M.C., Pang J-S., (Eds.), *Complementary and variational problems. State of the Art*, SIAM Review, Vol 39, N°4 pp. 669-713, 1997.

[5] Glowinski R., Périaux J., Shi Z-C., Widlund O., (Eds.), *Domain decomposition methods in sciences and engineering*, J. Wiley & Sons, Chichester, 1997.

[6] González R.L.V., Rofman E., *On the role of the interface in the constructive or approximate solution of junction problems*, in Computational Science for the 21st Century, pp. 549-557, J. Wiley & Sons, Chichester, 1997.

[7] Le Dret H., *Problèmes variationnels dans les multi-domaines. Modélisation des jonctions et applications*, Masson, Paris, 1991.

[8] Lions J-L., *Some more remarks on boundary value problems and junctions*, in Asymptotic Methods for Elastic Structures, Ph.G. Ciarlet, L. Trabucho, J.M. Viano (Eds.), pp. 103-118, Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

[9] Lions J-L., Marchouk G.I., *Sur les méthodes numériques en sciences physiques et économiques*, Dunod, Paris, 1974.

[10] Lions J-L., Stampacchia G., *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 20, pp. 493-519, 1967.

[11] Lotito P.A., Reyero G.F., González R.L.V., *Numerical solution of a junction problem,* in Mecánica Computacional, Vol. 18, E. Dari - C. Padra - R. Saliba (Comp.), AMCA, pp. 619-628, Bariloche, November 1997.

[12] Lotito P.A., Reyero G.F., González R.L.V., *Numerical solution of a bilateral constrained junction problem,* in Proceedings of Conference on *Finite Difference Methods: Theory and Applications*, Samarskii A., Vabishchevich P., Vulkov L. (Eds.), Nuova Science, USA, ISBN 1-56072-645-8, to appear.

[13] Reyero G.F., González R.L.V., *Some applications of decomposition techniques to systems of coupled variational inequalities,* in Mecánica Computacional, Vol. 16-17, G. Etse - B. Luccioni (Comp.), AMCA, pp. 403-412, Tucumán, September 1996.

[14] Reyero G.F., González R.L.V., *Some applications of decomposition techniques to systems of coupled variational inequalities,* Rapport de Recherche INRIA N°3145, Rocquencourt, France, 1997.