

BASES DE ONDITAS SOBRE DOMINIOS TRIANGULARES UTILIZANDO COORDENADAS DE AREA

Hugo A. Aimar, Alberto Cardona e Ilda C. Hernández

INTEC (Universidad Nacional del Litoral / CONICET)

Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina

e-mail: ihernan@intec.unl.edu.ar

RESUMEN

Se presenta un método para construir bases de onditas sobre dominios triangulares, partiendo de la ondita de Haar unidimensional. Se emplean las llamadas *coordenadas de área*, las cuales se adaptan particularmente bien a particiones triangulares.

ABSTRACT

A method for constructing wavelet bases over triangular domains starting from the unidimensional Haar function is presented. The so-called area coordinates are used, since they are particularly well-suited to work with triangular meshes.

INTRODUCCION

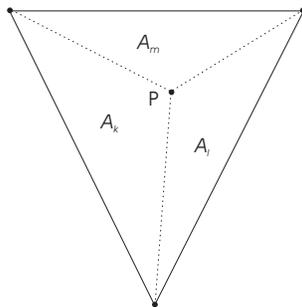


Figura 1: Coordenadas de área

Nuestro dominio de trabajo será \mathbf{R}^2 , pero en lugar de identificar los puntos utilizando coordenadas cartesianas lo haremos mediante las coordenadas de área. Sea T un triángulo en \mathbf{R}^2 y sea $P \in T$. Cada componente de las coordenadas de área (s, t, u) se obtiene como el cociente entre el área del

triángulo que determina el punto P con cada uno de los vértices y el área A del triángulo T (figura 1):

$$s = \frac{A_k}{A} \quad t = \frac{A_l}{A} \quad u = \frac{A_m}{A}.$$

Observamos que no obstante usar tres coordenadas para representar los puntos del plano, tenemos en realidad dos grados de libertad pues $s + t + u = 1$. Con el objeto de extender estas coordenadas locales a todo el plano, desde cada vértice de T construimos sendas semirrectas k, l y m , orientadas en sentido antihorario, como muestra la figura 2.

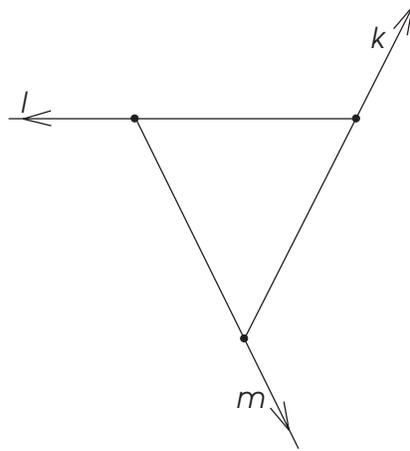


Figura 2: Ejes coordenados

Sobre cada una de esas semirrectas se medirán las posiciones de las traslaciones positivas de T ; sobre cada eje tomamos como unidad de medida la longitud del correspondiente lado. Para construir todas las traslaciones será necesario usar también las semirrectas opuestas correspondientes. Así dados $s_0, t_0, u_0 \in \mathbf{Z}$, llamaremos $T_+^{0, [s_0, t_0, u_0]}$ al triángulo que resulta de la intersección de tres franjas:

- sobre el eje k : $[s_0 - 1, s_0]$;
- sobre el eje l : $[t_0 - 1, t_0]$;
- sobre el eje m : $[u_0 - 1, u_0]$.

Diremos que el triángulo $T_+^{0, [s_0, t_0, u_0]}$ tiene vértices $(s_0, t_0 - 1, u_0 - 1)$, $(s_0 - 1, t_0, u_0 - 1)$, $(s_0 - 1, t_0 - 1, u_0)$. Pero la intersección de las franjas $[s_0 - 1, s_0]$ y $[t_0 - 1, t_0]$ determina también el triángulo $T_-^{0, [s_0, t_0, u_0 - 1]}$ de vértices $(s_0, t_0 - 1, u_0 - 1)$, $(s_0 - 1, t_0, u_0 - 1)$ y $(s_0, t_0, u_0 - 1)$. Lo denotaremos $T_-^{0, [s_0, t_0, u_0]}$. Es claro que el triángulo $T_-^{0, [s_0, t_0, u_0]}$ se puede obtener del $T_+^{0, [s_0, t_0, u_0]}$ mediante una transformación ρ que deja fijos los vértices $(s_0, t_0 - 1, u_0 - 1)$, $(s_0 - 1, t_0, u_0 - 1)$ y que envía el vértice $(s_0 - 1, t_0 - 1, u_0)$ al punto $(s_0, t_0, u_0 - 1)$.

Si $P = (s, t, u) \in T_+^{0, [s_0, t_0, u_0]}$ entonces $\rho(P) = (t, s, u) \in T_-^{0, [s_0, t_0, u_0]}$. Es decir que $\rho(T_+^{0, [s_0, t_0, u_0]}) = T_-^{0, [s_0, t_0, u_0]}$.

La transformación ρ tiene una inversa bien definida y $\rho^{-1}(T_-^{0, [s_0, t_0, u_0]}) = T_+^{0, [s_0, t_0, u_0]}$.

Observamos que, debido a la orientación de los ejes k, l y m , si trasladamos $T_+^{0, [s_0, t_0, u_0]}$ rígidamente α veces según el eje k y β veces según el eje l obtendremos el triángulo definido por la intersección de las franjas $[s_0 + \alpha - 1, s_0 + \alpha]$ y $[t_0 + \beta - 1, t_0 + \beta]$: $T_+^{0, [s_0 + \alpha, t_0 + \beta, u_0 - (\alpha + \beta)]}$.

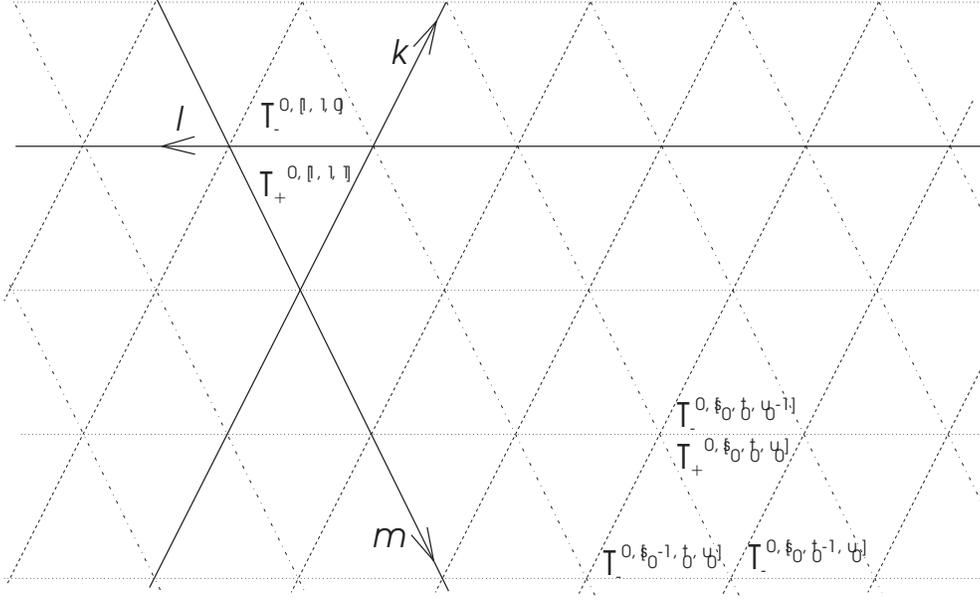


Figura 3: Partición en triángulos

Análogamente, $T_{-}^{0, [s_0, t_0, u_0]}$ irá al triángulo $T_{-}^{0, [s_0+\alpha, t_0+\beta, u_0-(\alpha+\beta)]} = T^{0, [s_0+\alpha, t_0+\beta, (u_0-1)-(\alpha+\beta)]}$.

Podemos expresar estos movimientos rígidos mediante un operador de traslación. Sea $\vec{h} = [\alpha, \beta]$ donde $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}^2$. Si $P = (s, t, u) \in T_{\pm}^{0, [s_0, t_0, u_0]}$ entonces definimos

$$\tau_{[\alpha, \beta]}(P) = (s + \alpha, t + \beta, u + \gamma) = Q \in T_{\pm}^{0, [s_0+\alpha, t_0+\beta, u_0+\gamma]}$$

donde $\gamma = -\alpha - \beta$. Luego $\tau_{[\alpha, \beta]}(T_{\pm}^{0, [s_0, t_0, u_0]}) = T_{\pm}^{0, [s_0+\alpha, t_0+\beta, u_0+\gamma]}$.

Es claro que si $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ entonces la unión de los triángulos obtenidos por traslaciones enteras generan \mathbf{R}^2 :

$$\mathbf{R}^2 = \bigcup_{\alpha, \beta \in \mathbf{Z}} (T^{0, [s_0+\alpha, t_0+\beta, u_0-(\alpha+\beta)]} \cup T^{0, [s_0+\alpha, t_0+\beta, (u_0-1)-(\alpha+\beta)]}).$$

Podemos considerar particiones diádicas $\{\frac{1}{2^j}\}_{j \in \mathbf{Z}}$ sobre cada eje coordenado. Como sabemos, estas particiones producen expansiones ($j < 0$) o contracciones ($j > 0$) de los intervalos $[k, k+1) \subset \mathbf{R}$, con $k \in \mathbf{Z}$. Si $j > 0$ dichas particiones producen en nuestra malla triangular una partición en cuatro triángulos: por ejemplo, si $j = 1$ y $(s_0, t_0, u_0) = (1, 1, 1)$ entonces cada lado del triángulo $T_{+}^{0, [1, 1, 1]}$ queda dividido en dos subintervalos: $[0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, 1)$. El triángulo $T_{+}^{0, [1, 1, 1]}$ queda así partido en cuatro triángulos: $T_{-}^{1, [1, 1, 1]}$, $T_{+}^{1, [1, 0, 1]}$, $T_{+}^{1, [0, 1, 1]}$, $T_{+}^{1, [1, 1, 0]}$ tales que

$$T_{+}^{0, [1, 1, 1]} = T_{-}^{1, [1, 1, 1]} \cup T_{+}^{1, [1, 0, 1]} \cup T_{+}^{1, [0, 1, 1]} \cup T_{+}^{1, [1, 1, 0]}.$$

Si $j < 0$ definiremos la expansión de nuestros triángulos de la siguiente manera: si $j = -1$ y si dejamos fijos los ejes coordenados correspondientes al triángulo inicial $T_{+}^{0, [1, 1, 1]}$ entonces los lados del mismo expanden a $[-1, 1]$ medidos sobre los ejes k, l y m . Se obtiene así el triángulo $T_{-}^{-1, [1, 1, 1]}$.

En general, para cada j fijo y $j > 0$, tendremos

$$\begin{aligned} T_{+}^{j, [s_0, t_0, u_0]} &= T_{-}^{j+1, [s_0, t_0, u_0]} \cup T_{+}^{j+1, [s_0-1, t_0, u_0]} \cup T_{+}^{j+1, [s_0, t_0-1, u_0]} \cup T_{+}^{j+1, [s_0, t_0, u_0-1]}, \\ T_{-}^{j, [s_0, t_0, u_0]} &= T_{+}^{j+1, [s_0, t_0, u_0]} \cup T_{-}^{j+1, [s_0-1, t_0, u_0]} \cup T_{-}^{j+1, [s_0, t_0-1, u_0]} \cup T_{-}^{j+1, [s_0, t_0, u_0-1]}. \end{aligned}$$

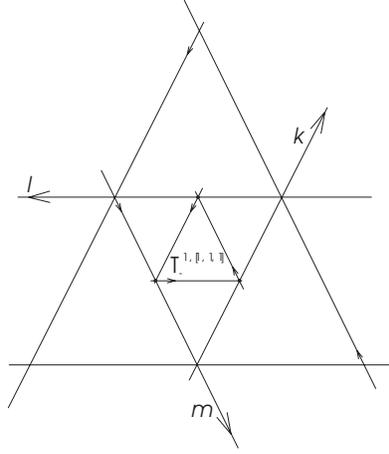


Figura 4: Operación de expansión

Mientras que si $j < 0$ obtenemos

$$T_{+}^{j,[s_0,t_0,u_0]} \rightarrow T_{-}^{j-1,[s_0,t_0,u_0]} \quad T_{-}^{j,[s_0,t_0,u_0]} \rightarrow T_{+}^{j-1,[s_0,t_0,u_0]}$$

Podemos expresar la expansión o contracción de $T_{+}^{0,[1,1,1]}$ en el lenguaje de operadores. Sea $\epsilon = 1/2^j$ y $P \in T_{+}^{0,[1,1,1]}$. Entonces definimos

$$\delta_{\frac{1}{2^j}}(P) = \frac{1}{2^j}P \in T^j,[1,1,1]$$

Así, si $j = 1$ y $j = -1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_{1/2}(T_{+}^{0,[1,1,1]}) &= T_{-}^{1,[1,1,1]} \cup T_{+}^{1,[1,0,1]} \cup T_{+}^{1,[0,1,1]} \cup T_{+}^{1,[1,1,0]}, \\ \delta_2(T_{+}^{0,[1,1,1]}) &= T_{-}^{-1,[1,1,1]}. \end{aligned}$$

Si j es negativo entonces

$$\delta_{\frac{1}{2^j}}(T_{+}^{0,[1,1,1]}) = \begin{cases} T_{+}^{j,[1,1,1]}, & \text{si } j \text{ es par} \\ T_{-}^{j,[1,1,1]}, & \text{si } j \text{ es impar.} \end{cases}$$

OPERADORES BASICOS

Sea f una función a valores complejos definida en \mathbf{R}^2 y sean $\vec{h} = [\alpha, \beta, -\alpha - \beta] = [\alpha, \beta, \gamma]$ donde $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}^2$ y $\epsilon > 0$.

$$(\tau_{\vec{h}}f)(P) = f(\tau_{\vec{h}}(P)) = f(P - (\alpha, \beta, -\alpha - \beta)) \quad \text{y} \quad (\delta_{\epsilon}f)(P) = f(\delta_{\epsilon}(P)) = f(\epsilon P).$$

$\tau_{\vec{h}}$ traslada la gráfica de f al punto \vec{h} , mientras que δ_{ϵ} cambia la escala en la variable independiente ensanchándola (o contrayéndola) en un factor $1/\epsilon$ si $\epsilon < 1$ (respectivamente, $\epsilon > 1$).

MULTIRESOLUCION: FUNCION DE ESCALA Y ONDITA DE HAAR

En esta sección para $s, t, u \in \mathbf{Z}$ denotaremos con $T^{0,[s,t,u]}$ a uno de los dos triángulos que la intersección de la franja $[s-1, s]$ con $[t-1, t]$ define: $T_{+}^{0,[s,t,u]}$ o $T_{-}^{0,[s,t,u]}$.

Como los lados de $T^{j,[s,t,u]}$, para cada j fijo, son intervalos diádicos $I_{j,k} = \frac{1}{2^j}[k.k+1)$ donde $j, k \in \mathbf{Z}$, entonces la función característica del triángulo se puede definir como el producto de las funciones características definidas sobre los lados ; así, si $j = 0$ y $P = (K, L, M) \in T^{0,[s,t,u]}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\chi_{T^{0,[s,t,u]}}(P) &= \chi_{I_{0,s}}(K) \chi_{I_{0,t}}(L) \chi_{I_{0,u}}(M) \\ &= \chi_{[0,1]}(K-s) \chi_{[0,1]}(L-t) \chi_{[0,1]}(M-u) \\ &= (\tau_{-s}\chi_{[0,1]})(K)(\tau_{-t}\chi_{[0,1]})(L)(\tau_{-u}\chi_{[0,1]})(M).\end{aligned}$$

Y en general

$$\begin{aligned}\chi_{T^{j,[s,t,u]}}(P) &= \chi_{I_{j,s}}(K) \chi_{I_{j,t}}(L) \chi_{I_{j,u}}(M) \\ &= \chi_{[0,1]}(2^j K - s) \chi_{[0,1]}(2^j L - t) \chi_{[0,1]}(2^j M - u).\end{aligned}$$

Si recordamos que el triángulo $T_+^{0,[s,t,u]}$ es unión de cuatro triángulos del tipo $T^{1,[s,t,u]}$ es claro que

$$\chi_{T_+^{0,[s,t,u]}} = \chi_{T_-^{1,[s,t,u]}} + \chi_{T_+^{1,[s-1,t,u]}} + \chi_{T_+^{1,[s,t-1,u]}} + \chi_{T_+^{1,[s,t,u-1]}}.$$

Y esta expresión es la ecuación de escala para la función $\chi_{T_+^{0,[s,t,u]}}$. Luego denotamos como $\Phi_{0,[s,t,u]}$ a la función $\chi_{T_+^{0,[s,t,u]}}$.

Por definición, la familia $\{\Phi_{0,[s,t,u]} : (s, t, u) \in \mathbf{Z}^3\}$ es una familia ortonormal:

$$\int_{\mathbf{R}^2} \Phi_{0,[s,t,u]} \Phi_{0,[s',t',u']} = \delta_{s,s'} \delta_{t,t'}$$

Podemos ahora considerar el subespacio de las funciones de cuadrado integrable generado por esta familia:

$$V^0 = \{f \in L^2(\mathbf{R}^2) : f = \sum_{[s,t,u]} c_{[s,t,u]} \Phi_{0,[s,t,u]} \text{ para } c_{[s,t,u]} \in \mathbf{R}\}.$$

Recordemos que según nuestra notación $T^{0,[s,t,u]}$ representa uno de dos triángulos posibles. Es decir que en realidad V^0 es suma de dos subespacios, V_+^0 y V_-^0 , según que el soporte de las funciones esté contenido en triángulos del tipo $T_+^{0,[s,t,u]}$ o $T_-^{0,[s,t,u]}$, respectivamente. Como la intersección de estos subespacios funcionales es la función nula, por construcción, sigue que $V^0 = V_+^0 \oplus V_-^0$.

Observamos que el espacio V^0 satisface la condición de invariancia con respecto a nuestra traslación $\tau_{\vec{h}}$, con $\vec{h} = [\alpha, \beta, \gamma]$:

$$f(\cdot) \in V^0 \quad \text{si y sólo si} \quad f(\cdot - \vec{h}) \in V^0 \text{ para } \vec{h} \in \mathbf{Z}^3.$$

Por otra parte, cualquier función que sea constante en el nivel $j = 0$ es constante en cada triángulo del nivel $j = 1$ y puesto que \mathbf{R}^2 también es la unión de todos los triángulos de nivel $j = 1$, tendremos que las funciones de V^0 pertenecerán al espacio

$$V^1 = \{f \in L^2(\mathbf{R}^2) : f \text{ constante en } T^{1,[s,t,u]} \text{ y cero fuera}\}.$$

Es decir que

$$V^0 \subseteq V^1.$$

Para definir el espacio complementario de V^0 en V^1 vamos a considerar las siguientes funciones de V^1 con soporte en $T^{0,[s_0,t_0,u_0]}$:

$$\Psi_{0,[s_0-1,t_0,u_0]} = \Phi_{1,[s_0,t_0,u_0]} + \Phi_{1,[s_0-1,t_0,u_0]} - \Phi_{1,[s_0,t_0-1,u_0]} - \Phi_{1,[s_0,t_0,u_0-1]}$$

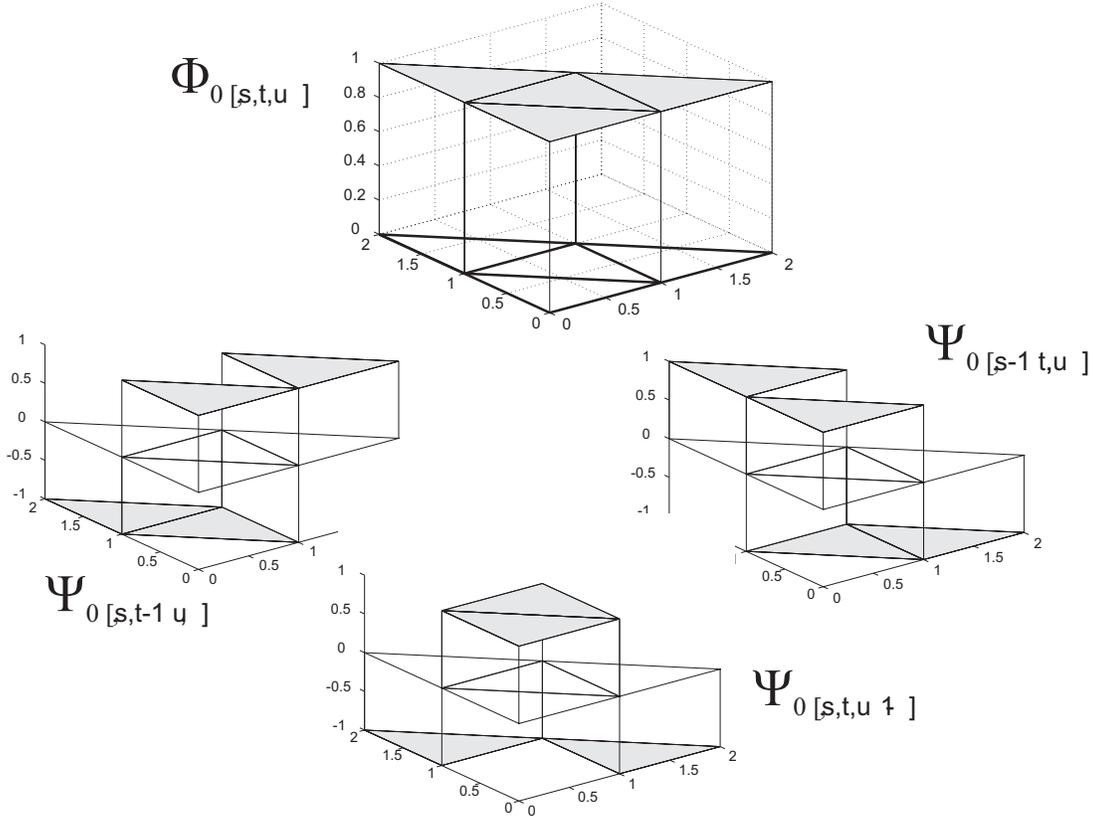


Figura 5: Funciones de base de Haar sobre triángulos

$$\begin{aligned}\Psi_{0,[s_0,t_0-1,u_0]} &= \Phi_{1,[s_0,t_0,u_0]} + \Phi_{1,[s_0,t_0-1,u_0]} - \Phi_{1,[s_0-1,t_0,u_0]} - \Phi_{1,[s_0,t_0,u_0-1]} \\ \Psi_{0,[s_0,t_0,u_0-1]} &= \Phi_{1,[s_0,t_0,u_0]} + \Phi_{1,[s_0,t_0,u_0-1]} - \Phi_{1,[s_0,t_0-1,u_0]} - \Phi_{1,[s_0-1,t_0,u_0]}.\end{aligned}$$

La familia $\{\Psi_{0,[s,t,u]}\}$ así obtenida es claramente ortonormal. Llamaremos \mathcal{W}^0 al espacio generado por $\{\Psi_{0,[s,t,u]} : s, t, u \in \mathbf{Z}\}$. No es difícil verificar que $V^0 \cap \mathcal{W}^0 = 0$. Con un poco más de cuentas se prueba que en realidad $V^1 = V^0 \oplus \mathcal{W}^0$.

Vimos que para cada $j > 0$ fijo cada triángulo de nuestro dominio es unión de cuatro triángulos

$$T_+^{j,[s_0,t_0,u_0]} = T_-^{j+1,[s_0,t_0,u_0]} \cup T_+^{j+1,[s_0-1,t_0,u_0]} \cup T_+^{j+1,[s_0,t_0-1,u_0]} \cup T_+^{j+1,[s_0,t_0,u_0-1]}.$$

Luego tenemos bien definida la familia

$$\{\Phi_{j,[s,t,u]} = \chi_{T_+^{j,[s,t,u]}} : s, t, u \in \mathbf{Z}\},$$

la que es ortonormal. Llamamos V^j al espacio generado por esta familia. Como en el caso $j = 0$, podemos demostrar que $V^j \subset V^{j+1}$ y que el espacio \mathcal{W}^j , complementario de V^j en V^{j+1} , es generado por la familia $\{\Psi_{j,[s,t,u]} : s, t, u \in \mathbf{Z}\}$, donde las funciones $\Psi_{j,[s,t,u]}$ se construyen como en el caso $j = 0$. Al igual que en el caso unidimensional se puede probar que $\{\Psi_{j,[s,t,u]} : j \in \mathbf{Z} \text{ y } (s, t, u) \in \mathbf{Z}^3\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbf{R}^2)$

CONCLUSIONES

Como sabemos, muchos dominios de operadores que modelan problema de ingeniería se aproximan mejor utilizando triángulos. La base que aquí presentamos se caracteriza por tener una buena

localización y soporte contenido en triángulos, pero no es continua. Un próximo paso consistirá en explorar si el procedimiento es aplicable con buenos resultados al caso de ondas continuas con soporte compacto de Daubechies.

REFERENCIAS

Strang, G., *Wavelets and dilation equations: a brief introduction*, Siam Review, Vol. 31,nro. 4,Dec. 1989, pp.614-627.