

# ALGUNAS APLICACIONES DEL MÉTODO DE DOBLE MALLA A PROBLEMAS DE EVOLUCIÓN Y AUTOVALORES

**Marta B. Bergallo, Carlos E. Neuman**

*Departamento Matemática Aplicada, Facultad Ing. Química  
Universidad Nacional del Litoral  
Santiago del Estero 2829, 3000 Santa Fe, Argentina*

**Victorio E. Sonzogni**

*INTEC, CONICET, UNL  
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina*

## RESUMEN

El método de la malla compuesta ha mostrado buenos resultados para el estudio por elementos finitos de problemas elípticos en general y, como caso particular, problemas de respuesta estática estructural. Con este procedimiento se pueden obtener soluciones muy precisas con mallas relativamente gruesas y sin un costo adicional de importancia. Esto ha sido objeto de comunicaciones en congresos anteriores.

En este trabajo se muestran algunas experiencias numéricas de la aplicación de estas técnicas en otros tipos de problemas: problemas de evolución y problemas de autovalores. En particular se han considerado aquí problemas de evolución asociados a la ecuación del calor. Asimismo se ha utilizado esta técnica para resolver en forma precisa problemas de vibración libre estructural.

En todos los casos se han tomado ejemplos representativos, para los que se posee una solución analítica o una muy buena solución aproximada, con el fin de verificar la precisión de los resultados obtenidos.

## ABSTRACT

The composite mesh technique has been successfully used in finite element analysis of elliptic problems, in particular in elastic response problems. This technique allows us to obtain accurate solutions with coarse meshes, without increasing the computational cost. It has been presented in past conferences. In this paper, numerical experiences in applying this technique to other kind of problems, such as evolutionary heat transfer problems and free vibration of elastic solids, are shown.

## INTRODUCCION

El método de los elementos finitos, al ser un método aproximado que obtiene una solución discreta de un problema continuo, proporciona una solución numérica que difiere de la solución buscada. Los errores pueden reconocer diferentes orígenes. Entre ellos pueden citarse: error en la aproximación de la geometría; error de discretización; error en la integración numérica; y error en la solución del sistema de ecuaciones. Existen también otros tipos de errores, tales como los introducidos en el modelo teórico (errores de datos

geométricos, modelos de ecuaciones constitutivas o imposición de cargas y fijaciones) o errores en la solución numérica de problemas no lineales o dinámicos.

El error de discretización es inherente al método de elementos finitos. Esto es debido a que las funciones utilizadas para aproximar la solución en el interior del elemento no coinciden (en general) con las funciones de la solución exacta.

El error de discretización no puede evaluarse en forma exacta y por ello se trata de obtener *estimadores* apropiados de ese error. Los estimadores del error pueden agruparse en dos categorías: estimadores *a priori* y estimadores *a posteriori*.

Los estimadores *a priori* son útiles en el estudio teórico del método de elementos finitos y para determinar la tasa de convergencia del mismo. Pero tiene la dificultad de que no se puede calcular, en general, en las aplicaciones prácticas.

En aplicaciones prácticas se utilizan estimadores *a posteriori* que se computan luego de hallada la solución numérica. Existen muchas formas de estimar el error a posteriori. Ellas pueden ser clasificadas en dos grupos:

- Métodos basados en el residuo o fuerzas de desequilibrio, que a su vez pueden evaluar el estimador en forma explícita o implícita <sup>1,6,8</sup>
- Métodos basados en la discontinuidad del campo de tensiones, que evalúan el estimador a partir de la diferencia entre ese campo de tensiones y un campo continuo. Este último se construye por proyección de los resultados nodales basados en propiedades de superconvergencia del campo de tensiones <sup>2,5,9</sup>

En algunos casos la estimación *a posteriori* se efectúa a partir de más de un resultado. Tal es el caso de la extrapolación de Richardson, donde se utilizan resultados de dos mallas diferentes: los elementos de una de ellas tienen la mitad del tamaño de los de la otra. En función de ambos resultados, si se conoce el orden de convergencia del método, por extrapolación puede obtenerse una mejor solución. También es el caso del acotado de soluciones mediante modelos de elementos finitos en desplazamiento y en tensiones, que brindan cotas inferiores y superiores para la energía. <sup>3</sup>

El método de la malla compuesta o doble malla fue introducido por los autores <sup>4,7</sup> con el objeto de estimar errores de discretización y/o proporcionar una solución mejorada. Ha sido aplicado en problemas elípticos (problemas de propagación de calor, problemas elásticos, etc) con buenos resultados. Este método permite obtener ya sea un estimador de error o una solución mejorada sin un costo importante ni requerimientos de procesamiento de las soluciones numéricas obtenidas. En este trabajo se muestran algunas aplicaciones de esta técnica para problemas de evolución y para problemas de autovalores.

## MÉTODO DE LA DOBLE MALLA

El método de la doble malla, o malla compuesta, consiste en hacer compartir el dominio del análisis a dos mallas de diferente grados de aproximación, por ejemplo dos mallas de distintos tamaños de elementos. Estas mallas se conectan entre sí mediante conectores que pueden ser los nodos comunes (se prefiere aquí que la malla más fina sea un refinamiento de la más gruesa).

Las propiedades físicas de cada malla son afectadas por un factor de participación. Por ejemplo si este factor es  $\frac{1}{2}$ , cada malla participa por igual en la solución. Los resultados obtenidos con esa malla compuesta serán así intermedios a los que se obtendrían con un análisis estándar con cada malla por separado.

La interacción entre ambas mallas, cuyo comportamiento numérico será necesariamente diferente, brinda información que permite estimar el error de aproximación cometido.

Por otro lado, si se puede prever el orden del método puede jugarse con los factores de participación de manera de obtener una solución mejorada prácticamente sin costo adicional de importancia.

### Uso del método de doble malla para estimación de errores

Para estimar el error de aproximación se ha utilizado el método de doble malla con el mismo factor de participación para ambas mallas. En este caso, en los nodos comunes se producen fuerzas de interacción que tratan de igualar el comportamiento de ambas. La magnitud de esas fuerzas ha servido como base para una estimación del error. Resultados del mismo pueden encontrarse en Bergallo et al (1998) .<sup>4</sup>

### Uso del método de doble malla para mejorar la solución

Otro uso del método de la doble malla ha sido para obtener una solución mejorada. En este caso se ha comenzado por estimar el orden de aproximación del método. Para problemas que no presentan singularidades, al refinar la malla a la mitad con elementos lineales, se observa que el orden de convergencia es  $p = 2$ . Si se efectuara una extrapolación de Richardson, debería tomarse factores de peso:

$$\alpha = \frac{2^p}{(2^p - 1)} \quad \text{y} \quad (1 - \alpha) = -\frac{1}{(2^p - 1)}$$

para la malla fina y para la malla gruesa, respectivamente. Para el caso en que  $p = 2$  esos valores resultan  $\alpha = \frac{4}{3}$  y  $(1 - \alpha) = -\frac{1}{3}$ . Esos factores se utilizaron como coeficientes de participación para ponderar las propiedades físicas de cada malla.

## APLICACIONES A PROBLEMAS ELIPTICOS

Se muestran a continuación dos ejemplos de estructuras para los cuales se aplicó la doble malla obteniéndose una solución mejorada.

El primero corresponde a una viga en voladizo. Pueden elegirse las condiciones de vinculación y de carga de modo de tener para ella una solución exacta. Se trata de una viga cuadrada, apoyada en tres puntos y como se indica en la figura 1 y con una fuerza cortante en el extremo derecho.

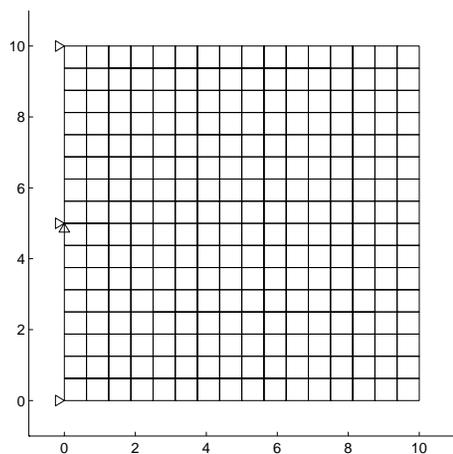


Figura 1. Malla de  $16 \times 16$  elementos para la viga en voladizo

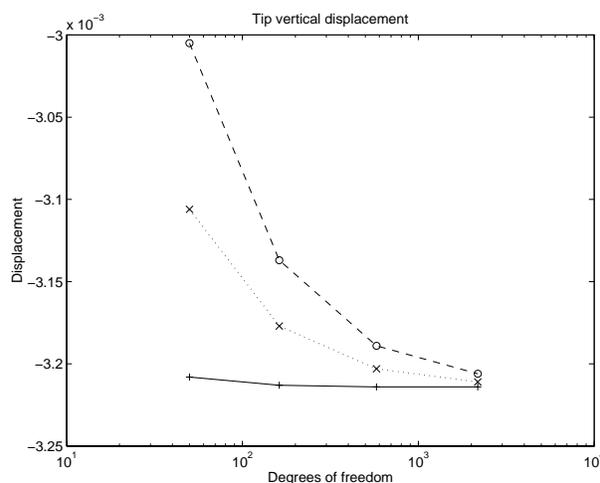


Figura 2. Viga en voladizo: Desplazamiento vertical del extremo ((x) Malla simple; (o) Malla doble  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; (+) Malla doble  $\alpha = \frac{4}{3}$ )

La viga se modeló con diferentes mallas de elementos cuadrados, desde una malla con  $2 \times 2$  elementos, hasta otra con  $64 \times 64$  elementos.

Se efectuaron análisis de elementos finitos estándar y análisis con la malla doble, con factores de participación  $\alpha = \frac{1}{2}$  y  $\alpha = \frac{4}{3}$ , para la malla fina. Se esperaba que los resultados con  $\alpha = \frac{1}{2}$  fueran peores que los de la malla fina solamente, en tanto que los resultados con  $\alpha = \frac{4}{3}$  fuesen bastante mejores que los de la malla

fin. Esto ha sido confirmado por los ejemplos, como se puede observar en la figura 2, donde se ha graficado el desplazamiento vertical del extremo de la viga para los diferentes análisis. En abscisas se ha colocado la cantidad de grados de libertad (en escala logarítmica) para cada malla. Los puntos con "X" corresponden a la malla simple (malla fina); los puntos con círculos, a la malla doble con  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; y los puntos con "+" a la malla doble con  $\alpha = \frac{4}{3}$ . El error relativo global, en norma  $L^2$ , se muestra en la figura 3, con las mismas referencias.

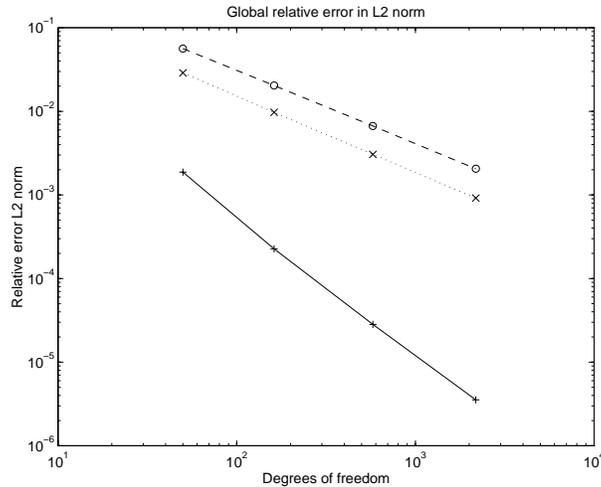


Figura 3. Viga en voladizo: Error relativo global en norma  $L_2$   
((x) Malla simple; (o) Malla doble  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; (+) Malla doble  $\alpha = \frac{4}{3}$ )

El segundo ejemplo corresponde a una membrana traccionada, con una fisura. En la figura 4 se muestra la geometría y condiciones de contorno, además de una de las mallas utilizadas. Los resultados se obtuvieron para las mismas mallas indicadas en el ejemplo anterior y en la figura 5 se representa el error relativo global, en norma infinito del vector de desplazamientos, siendo las referencias iguales a las del caso anterior. Puede observarse que aún en este caso donde hay una fuerte singularidad, el método de doble malla con  $\alpha = \frac{4}{3}$  proporciona una notable mejora en los resultados.

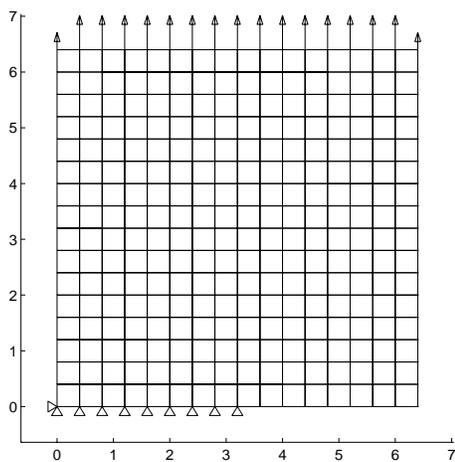


Figura 4. Membrana fisurada: malla de elementos finitos ( $M_{\frac{1}{16}}$ )

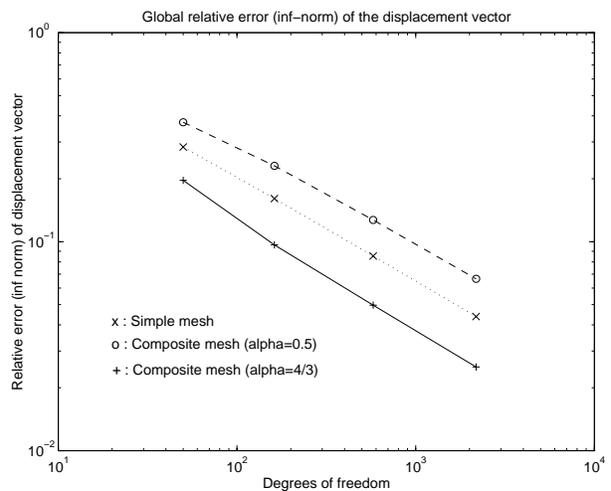


Figura 5. Membrana fisurada: error relativo global en norma infinito del vector desplazamiento((x) Malla simple; (o) Malla doble  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; (+) Malla doble  $\alpha = \frac{4}{3}$ )

## APLICACIONES A PROBLEMAS DE AUTOVALORES

El método de la doble malla ha sido probado en algunos ejemplos de problemas de autovalores. Bajo la misma idea apuntada para problemas elípticos, el problema para la malla de elementos finitos  $M_{h_1}$ , con tamaño de elementos  $h_1$  es del tipo:

$$A_1 x_1 - \lambda_1 B_1 x_1 = 0$$

y para una malla con elementos de tamaño  $h_2 < h_1$ :

$$A_2 x_2 - \lambda_2 B_2 x_2 = 0$$

Ahora bien, para la malla compuesta formada a partir de esos dos tamaños el problema se escribe:

$$[\alpha A_2 + (1 - \alpha) A_{1 \rightarrow 2}] x_d - \lambda_d [\alpha B_2 + (1 - \alpha) B_{1 \rightarrow 2}] x_d = 0$$

donde  $A_{1 \rightarrow 2}$  representa la matriz de la malla  $M_{h_1}$  llevada al tamaño de la matriz  $A_2$ .  $x_d$  y  $\lambda_d$  son, respectivamente, el autovector y autovalor para la malla doble.

Como ejemplo se ha tomado un problema de vibración axial de una cuerda o barra, del cual se tiene una solución analítica. La barra tiene 1,00 m de largo y sección transversal de 1 cm x 1 cm. Está fija en su extremo derecho y libre en el izquierdo. Están impedidos los desplazamientos transversales, así se puede deformar sólo en la dirección axial. Se ha estudiado como un problema de estado plano de tensiones. La malla gruesa tiene un elemento en el espesor de la barra, variando la cantidad de elementos a lo largo de ella. La malla fina tiene cuatro elementos por cada uno de los de la malla gruesa. La designación de las mallas en los ejemplos corresponden a: *Malla1*, 2 elementos finos y 1 grueso; *Malla2*, 4 elementos finos y 2 gruesos; *Malla3*, 8 elementos finos y 4 gruesos; *Malla4*, 16 elementos finos y 8 gruesos.

La solución analítica para el primer autovalor  $\lambda$ , y la frecuencia fundamental  $f$ , son:

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4} \frac{EA}{mL^2} \quad f = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}}$$

donde  $m$  es la masa por unidad de longitud;  $E$  el módulo de elasticidad;  $A$  el área de la sección transversal; y  $L$  la longitud de la barra.

Los datos para este problema son:  $L = 100\text{cm}$ ;  $A = 1\text{cm}^2$ ;  $E = 2100000 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $\rho = 0.78E-05 \frac{\text{kgfs}^2}{\text{cm}^4}$ ;  $m = 0.78E-05 \frac{\text{kgfs}^2}{\text{cm}^2}$ . Y la solución exacta es  $\lambda_{\text{exacto}} = 6.643003E+07$  y  $f_{\text{exacto}} = 1.297186E+03$ .

Los resultados se muestran en la figura 6. La solución analítica es la línea horizontal del gráfico. La curva superior es la solución de elementos finitos estándar, para cada una de las cuatro mallas. La designación de la malla en este caso se corresponde con la malla fina del modelo compuesto. Es decir que la *Malla2* posee  $2 \times 2$  elementos. La curva inferior es la solución de la doble malla con  $\alpha = \frac{4}{3}$ . Este valor  $\alpha = \frac{4}{3}$  es el que se había utilizado en problemas de deformaciones de membranas indicados anteriormente.

## APLICACIONES A PROBLEMAS DE EVOLUCIÓN

El uso de la metodología de dobles mallas que hemos aplicado a problemas elípticos<sup>4</sup> tanto para la estimación de errores como para el mejoramiento de la solución, puede extenderse al caso de los problemas de evolución de tipo parabólico. En su forma más detallada en cada etapa del proceso se utiliza la estimación de los errores para obtener una solución aproximada tan buena como el método lo permita y ésta es utilizada para avanzar en el proceso evolutivo. En cada etapa de minimización del error puede realizarse en mayor o menor medida un proceso adaptativo para ajustar la malla o la discretización de modo de uniformar los errores. En la práctica, cuando se cuenta con una estimación del orden del método de integración es posible realizar la extrapolación de doble malla e incorporarla directamente en la matriz del sistema. En el caso en que las

estimaciones del orden de aproximación del método sean imprecisas se utilizan los estimadores de error para corregir la solución en cada etapa mediante la aplicación de variantes del método adaptativo

El problema de evolución se ataca en este trabajo mediante un método semidiscreto, es decir que se realiza una discretización en el dominio espacial utilizando el método de elementos finitos lo que conduce al planteo de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para el que la condición inicial es la correspondiente de la ecuación parabólica.

Por ejemplo, para la ecuación del calor, si se propone una aproximación de la forma

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{m=1}^{N+1} u_m(t) \varphi_m(x)$$

donde  $\varphi_m$  son las funciones de la base usual de elementos lineales y  $U = [u_1, \dots, u_{N+1}]'$  representa el vector que aproxima la solución de la ecuación se deduce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$M\dot{U} + KU = F$$

donde  $M$  es la matriz de masa cuyos elementos son de la forma  $M_{ij} = \int \varphi_i \varphi_j dx$ ,  $K$  es la matriz de rigidez con elementos  $K_{ij} = \int \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx$ , y  $F$  es el vector de cargas.

Con la notación previa el problema de doble malla resulta

$$(\alpha M_2 + (1 - \alpha) M_{1 \rightarrow 2}) \dot{U}_d = -(\alpha K_2 + (1 - \alpha) K_{1 \rightarrow 2}) U_d + (\alpha F_2 + (1 - \alpha) F_{1 \rightarrow 2})$$

donde  $U_d$  representa la solución correspondiente a la malla doble.

Extendiendo la definición de residuos utilizada previamente, el residuo  $r_2$  correspondiente a un valor de  $\alpha = 1/2$  resulta ser

$$r_2 = M_2 \dot{U}_d + K_2 U_d - F_2$$

como, además,  $M_d \dot{U}_d + K_d U_d - F_d = 0$  se tiene la ecuación

$$M_2 (\dot{U}_d - \dot{U}_2) + K_2 (U_d - U_2) = r_2$$

que permite relacionar los residuos (computables) con la diferencia puntual entre las soluciones correspondientes a la malla fina y a la malla doble. De esta última se deduce la siguiente relación explícita

$$U_d - U_2 = e^{(-M_2^{-1} K_2)t} \int_0^t e^{(-M_2^{-1} K_2)s} M_2^{-1} r_2 ds$$

Una expresión análoga se puede obtener para el residuo  $r_1$  correspondiente a la malla gruesa. El uso de ambos residuos permite estimar el error de aproximación vía la estimación de la diferencia  $U_2 - U_1$  (nótese que no es necesario calcular explícitamente ninguna de estas dos aproximaciones).

El problema *test* sobre el cual se ha probado el método de mejoramiento de la solución mediante la doble malla es el siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in [0, 1], \quad t > 0$$

con condición inicial  $u(x, 0) = \sin(\pi x)$  para  $x \in [0, 1]$  y condiciones de borde homogéneas en  $x = 0$  y  $x = 1$ . La solución analítica es  $u(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t)$ .

En la figura 7 se representa la evolución en el tiempo hasta  $t = 0.3$  de los errores exactos (en valor absoluto) correspondientes a  $x = 1/2$  para distintas mallas: la malla gruesa, uniforme, con 100 elementos; la malla fina, también uniforme, con 200 elementos; y las mallas doble con  $\alpha = 1/2$  y con  $\alpha = 4/3$  que combinan a las dos primeras. Los errores correspondientes a la malla doble respetan el comportamiento de los de las mallas simples. En el caso de  $\alpha = 1/2$  los valores resultan intermedios entre los de las mallas gruesa y fina. En el caso de  $\alpha = 4/3$  (malla doble de extrapolación) se observa un mejoramiento notable de la solución.

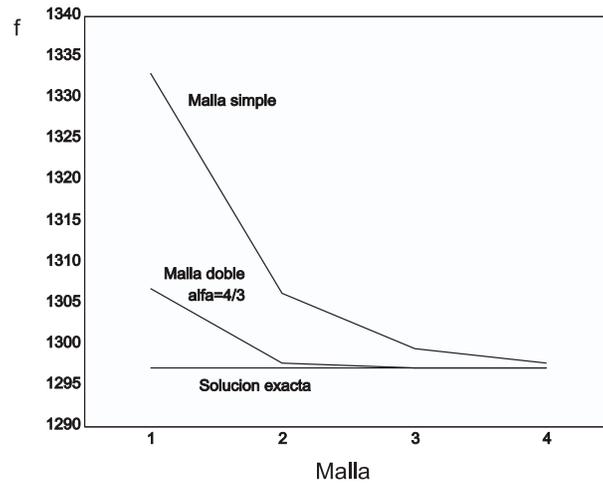


Figura 6. Frecuencia fundamental de una cuerda en vibración axial

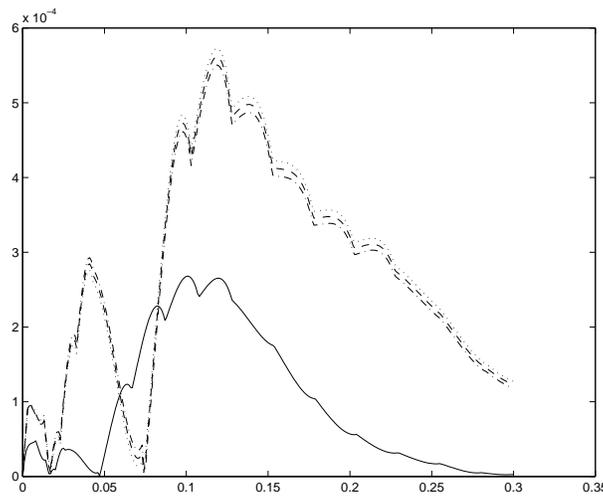


Figura 7. Errores absolutos exactos para distintas mallas correspondientes a  $x = 1/2$   
 ((.-) Malla gruesa; (···) Malla fina; (--) Malla doble  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; (—) Malla doble  $\alpha = \frac{4}{3}$ )

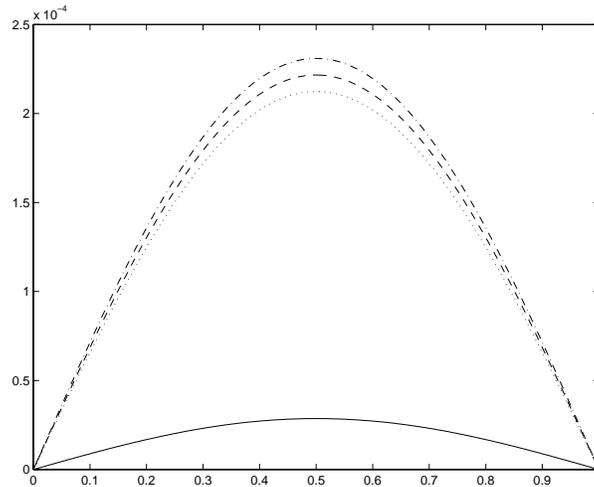


Figura 8. Errores absolutos exactos para distintas mallas correspondientes a  $t=0.05$   
 ((-) Malla gruesa; ( $\cdots$ ) Malla fina; (--) Malla doble  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; (—) Malla doble  $\alpha = \frac{4}{3}$ )

En la figura 8 se representan la sección para el tiempo  $t = 0.05$  de los errores exactos correspondientes a las distintas mallas.

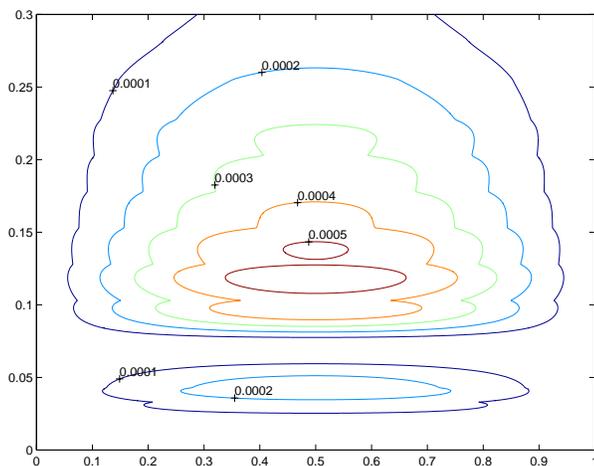


Figura 9. Curvas de nivel de los errores absolutos exactos para la malla fina

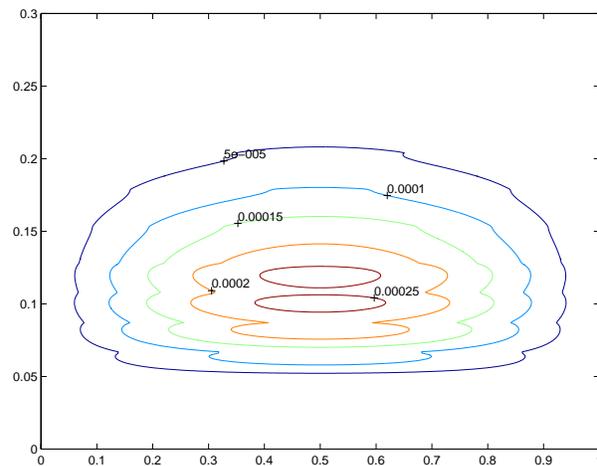


Figura 10. Curvas de nivel de los errores absolutos exactos para la malla doble ( $\alpha = 4/3$ )

En las figuras 9 y 10 representamos las curvas de nivel de los errores absolutos exactos para las mallas fina y doble con  $\alpha = 4/3$ . El eje de las abscisas, en esas figuras, representa la coordenada espacial y el de las ordenadas, la coordenada temporal. Se puede observar cómo mejora la solución cuando en la evolución se utiliza la matriz mezcla con el coeficiente  $\alpha$  de extrapolación.

En este ejemplo se observa una regularidad en el comportamiento de los errores análoga a la que fundamenta el método de dobles mallas en el caso de problemas elípticos (mejoramiento de la solución y estimación de los errores), sin embargo, en estos problemas de evolución el comportamiento de las soluciones y los correspondientes errores puede ser más complejo. En particular el error correspondiente a la malla doble con  $\alpha = 1/2$  no necesariamente será intermedio respecto de los de las mallas simples. En estos problemas de orden 2, la malla doble con  $\alpha = 4/3$  mejora la solución, y no es necesario realizar correcciones en cada etapa de la integración, pero, cuando se utiliza  $\alpha = 1/2$  resulta necesario utilizar los residuos para estimar errores, corregir la solución alcanzada hasta el tiempo actual y decidir en cada etapa si se realiza un remallado en función de los errores estimados.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se han mostrado algunas aplicaciones del método de doble malla, propuesto por los autores, para problemas dinámicos. El método de doble malla, o malla compuesta, permite estimar el error de discretización o bien corregirlo obteniendo una solución mejorada. Puede verificarse que utilizando mallas relativamente gruesas puede reducirse el error a valores que normalmente corresponden a mallas más finas, tanto para problemas elípticos como parabólicos. Esta mejora se consigue además sin necesidad de realizar post-procesamientos o de incrementar demasiado el costo computacional con respecto a la solución estándar de referencia. La aplicación a problemas de dinámica estructural muestra también una mejora en los resultados.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado con el apoyo de la Universidad Nacional del Litoral, del CONICET, y con subsidios de los proyectos: *CAI+D 94-16-4-20 UNL*, *Proy. 25/O033 UTN*, *PICT 51 FONCyT* y *PIP 198/98 y 266/98 CONICET*.

## Referencias

- [1] I. Babuska and W.C. Rheinboldt, “*A posteriori* error estimates of the finite element method”, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, pp. 1597-1615, 1978.
- [2] P.J. Beckers and H.G. Zhong, “Error estimation and adaptivity”, Proceedings MECOM 94 ( Mar del Plata, Argentina, Noviembre 1994), pp. 461-475, 1994.
- [3] M.B. Bergallo y P.J. Beckers, “Aplicación de técnicas de dualidad en elementos finitos”, Proceedings MECOM 94 ( Mar del Plata, Argentina, Noviembre 1994), pp. 476-487, 1994.
- [4] M.B. Bergallo, C.E. Neuman and V.E. Sonzogni, “A finite element error estimation based on the mixed mesh concept”, Proceedings of the IV World Congress on Computational Mechanics (Buenos Aires, Argentina, Jul 1998) CD ROM, 1998.
- [5] N. Kikuchi, “Adaptive grid-design methods for finite element analysis”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 55, pp. 129-160, 1986.
- [6] D.W. Kelly, “Self-equilibration of residuals and complementary *a posteriori* error estimates in the finite element method”, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp. 1491-1506, 1984.
- [7] V.E. Sonzogni, M.B. Bergallo y C.E. Neuman, “Uso de un malla compuesta para estimar errores de discretización y mejorar la solución en elementos finitos”, Proceedings del MECOM 96 (Tucumán, Argentina, Septiembre 1996), Vol.I, pp. 123-132, 1996.
- [8] R. Verfürth, “A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques”, (Wiley-Teubner, Chichester, 1996).
- [9] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, “A simple error estimator and adaptivity procedure for practical engineering analysis”, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 34, pp. 337-357, 1987.