

## **EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN LA SIMULACIÓN DE PROBLEMAS DE INESTABILIDAD CAPILAR. ANÁLISIS NUMÉRICO PARA LA DETERMINACIÓN DE UNA ESTRATEGIA COMPUTACIONAL EFICIENTE**

Diego M. Campana, Fernando A. Saita  
INTEC- Facultad de Ingeniería Química  
Universidad Nacional del Litoral, Güemes 3450, CP 3000, Santa Fé, Argentina  
e-mail: [dimaca@hotmail.com](mailto:dimaca@hotmail.com)

Carlos M. Corvalán  
Grupo de Biomecánica Computacional – Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de Entre Ríos, CC 47 Suc. 3 (3100), Paraná, Entre Ríos, Argentina.  
Email: [biomecanica@fi.uner.edu.ar](mailto:biomecanica@fi.uner.edu.ar)

### **RESUMEN**

En este trabajo se ha probado el desempeño y eficiencia numérica de dos técnicas para la determinación de una superficie libre en la simulación de problemas de inestabilidad capilar: el método de spines y el Height Flux Method o HFM. Ellas fueron utilizadas con el Método de Elementos Finitos en formulación mixta y penalizada en presión. Los resultados permiten identificar la estrategia más eficiente y situaciones donde un algoritmo puede ser más conveniente que otro.

### **ABSTRACT**

In this work have been proven the performance and numeric efficiency of two techniques for determination of a free surface in the simulation of capillary instability problems: the spines method and the Height Flux Method or HFM. They were used with the Finite Elements Method in mixed and penalty formulations. The results allow to identify the most efficient strategy and situations where an algorithm can be more convenient than another.

### **INTRODUCCIÓN**

Los fenómenos de inestabilidad de un filamento o película de fluido de pequeñas dimensiones, debido a fuerzas de tensión superficial en una interfase, se denominan comúnmente *problemas de inestabilidad capilar o de Rayleigh* [1]. Por ejemplo, la inestabilidad que produce la ruptura de un chorro o jet de fluido hacia la formación de gotas se explota convenientemente en el mecanismo de las impresoras ink-jet o de “chorro de tinta” [2]. Además de su utilización en pequeña escala (impresoras domésticas o de oficina), dispositivos de aplicación industrial se usan para la impresión de grandes volúmenes de etiquetas de medicamentos y, en otros casos, para depositar sustancias reactivas sobre un sustrato. Por otro lado, el proceso de colapso de una película de fluido sobre un sólido de geometría cilíndrica es un fenómeno indeseable en procesos de recubrimiento de cables metálicos con polímeros aislantes y en la fabricación de conductores de última generación (fibras ópticas). Esto se debe a que se interrumpe la uniformidad del recubrimiento mediante la formación de gotas sobre la superficie del sustrato [3]. Por último, la mecánica respiratoria de los seres vivos está fuertemente influenciada por el comportamiento

de una delgada película de fluido que recubre el interior de las vías respiratorias y cuya dinámica está gobernada por los fenómenos de inestabilidad capilar antes mencionados [4].

Debido a que estos problemas se desarrollan a pequeña escala (tamaño reducido), la observación y experimentación es muy difícil de realizar. Por el contrario, el análisis numérico ha mostrado ser una herramienta muy poderosa para la simulación, visualización y comprensión de los complejos fenómenos físicos involucrados. A través de los años, se han desarrollado modelos cada vez más realistas de éstos problemas, gracias al importante avance y desarrollo de las computadoras y las técnicas numéricas. Los procesos de inestabilidad son implícitamente transientes, situación que se refleja en las variables de flujo (velocidad y presión) y en la geometría del dominio (debido a la interfase móvil o SL). Esta última, se debe determinar como parte de la solución e introduce nuevas variables o grados de libertad al problema. Además, la naturaleza temporal, el fuerte carácter no-lineal de las ecuaciones y la complejidad que introduce el cálculo de la SL, determinan que la simulación numérica sea muy costosa (en cuanto a tiempo de cómputo). Entonces, es evidente que para el buen suceso de trabajos donde se pretenda obtener resultados adecuados, se debe contar con una técnica probada y eficiente.

Con respecto a los modelos numéricos más desarrollados, se pueden mencionar los trabajos de Mashayek y Ashgriz ([5], [6] y [7]), quienes resolvieron las ecuaciones de Navier-Stokes 3-D axisimétricas, simulando la evolución temporal de perturbaciones interfaciales sobre jets y películas de recubrimiento. Para ello, utilizaron el Método de Elementos Finitos (MEF) en formulación penalizada en presión, junto con una técnica novedosa para encontrar la posición de la SL en cada paso de tiempo: el Height Flux Method o HFM. Por otro lado, Campana y col. [8] obtuvieron resultados con un modelo equivalente al presentado en [7], que fue resuelto con el MEF en formulación mixta y utilizando el método de *spines implícito* [9]. Estos datos fueron comparados con los publicados en [5], [6] y [7], lográndose un muy buen acuerdo a pesar de las diferencias en las técnicas numéricas usadas. Sin embargo, persiste la inquietud acerca de cual de los algoritmos es más eficiente.

El objetivo de este trabajo es el de realizar un estudio numérico comparativo entre dos técnicas para el cálculo de la superficie libre (HFM vs *spines implícito*), para determinar las ventajas y limitaciones de cada una. En forma simultánea, se evaluará el desempeño de las formulaciones del MEF *penalizada en presión vs mixta*. Este marco de trabajo, permitirá además la prueba y análisis de algunos algoritmos de integración temporal y estrategias para la selección automática del paso de tiempo ([10] y [11]), como también el desempeño de algunos elementos finitos clásicos. Para la realización de éstas pruebas, se resolvieron las ecuaciones de Navier - Stokes 3D axisimétricas, simulando la evolución temporal de perturbaciones interfaciales en jets y recubrimientos de fluidos.

## MODELO

En la Fig. 1 se muestra una idealización geométrica para los problemas de inestabilidad capilar a estudiar. Se supone que el cilindro sólido tiene radio  $a$  y la interfase radio  $r_0$ . Seleccionando a  $r_0$  y a  $(\rho r_0^3 / \sigma)^{1/2}$  como escalas características de longitud y de tiempo respectivamente [7], las ecuaciones de Navier - Stokes en forma adimensional quedan

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Re} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2)$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$$

En las ec. (1) y (2),  $\mathbf{v}$  es el vector velocidad,  $t$  el tiempo,  $\mathbf{T}$  el tensor de tensiones e  $\mathbf{I}$  el tensor identidad,

$p$  la presión hidrodinámica y  $\nabla$  el vector gradiente. Además,  $\dot{\mathbf{x}}$  representa la velocidad de desplazamiento del dominio físico, debido a que las ecuaciones están formuladas de acuerdo con una descripción Euleriana Lagrangiana Arbitraria del movimiento. Por último,  $Re$  representa el número de Reynolds que, de acuerdo con las escalas características definidas, toma la forma  $Re = (1/\nu)(\sigma r_0/\rho)^{1/2}$ , donde  $\rho$  representa la densidad,  $\sigma$  la tensión superficial líquido-gas en la interfase, y  $\nu$  la viscosidad cinemática ( $\mu/\rho$ ) del fluido. La condición de contorno de balance de tensiones sobre la SL, considerando esfuerzos de corte o tangenciales despreciables, se puede escribir (para problemas axisimétricos) como

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = Re \left( \frac{d\mathbf{t}}{d\chi} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r)}{r_s} \right) \quad (3)$$

En la ec. (3),  $\mathbf{t}$  indica el versor tangente a la superficie libre,  $\chi$  el parámetro longitud de arco,  $\mathbf{n}$  el versor normal,  $\mathbf{e}_r$  el versor en la dirección radial y  $r_s$  el radio local de la interfase. Sobre la pared del filamento sólido de radio adimensional  $s$ , se imponen condiciones de contorno de no-deslizamiento. El dominio de flujo es perturbado con una sinusoide sobre su estado inicial de reposo. Con fines de simplificación, se supone que el problema es simétrico en la dirección axial y se resuelve sólo media longitud de onda del dominio perturbado. En los planos  $z=0$  y  $z=\alpha=\pi/\omega n_0$ , se supone que durante la evolución persisten las condiciones de simetría; esto significa que no hay flujo ni esfuerzo de corte sobre ellos o de manera equivalente

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (4)$$

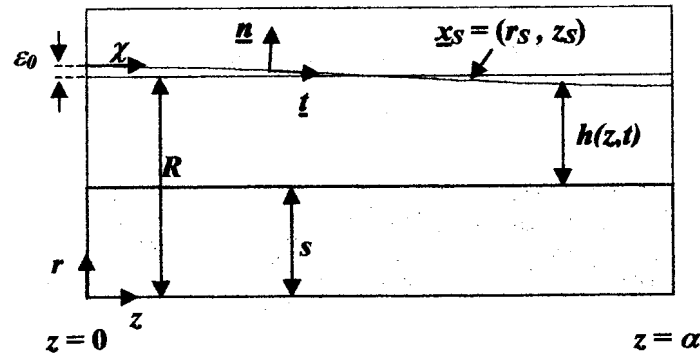


Figura 1: Representación del dominio axisimétrico de flujo sobre media longitud de onda de la perturbación y sistema coordenado adoptado, en variables adimensionales.

La condición inicial o perturbación se impone de acuerdo a

$$h(z,0) = (R - s) + \varepsilon_0 \cos(\omega n_0 z) \quad (5)$$

En la ec. (5),  $\omega n_0 = 2\pi/\theta$  es el número de onda y  $\theta$  la longitud de onda, ambos adimensionales. De acuerdo con lo presentado en [7], el valor  $R$  (menor que la unidad) se calcula para permitir la conservación de volumen y es función de la amplitud de la perturbación inicial  $\varepsilon_0 = \varepsilon(1-s)$ . El parámetro  $\varepsilon$  representa la amplitud de la perturbación referida a al espesor de fluido inicial. La SL se trata como una superficie material, por lo que el fluido no es capaz de atravesarla. Esta condición se representa a través de la ecuación cinemática, según

$$(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6)$$

La ec. (6) es válida sobre todos los puntos pertenecientes a la interfase. Cuando se trabaja simulando chorros de fluido, se tiene  $s = 0$  (no hay sustrato sólido) y por lo tanto se debe modificar la condición de no deslizamiento por otra de simetría axial en  $r = 0$ . Las ec. (1) a (6), completan la formulación teórica de los problemas de inestabilidad capilar. Se han definido cuatro parámetros adimensionales mediante los cuales se pueden representar diferentes condiciones físicas: (i) el número de Reynolds  $Re$ , que relaciona las fuerzas inerciales y viscosas puestas en juego, (ii) el número de onda  $wno$  mediante el cual se impone la perturbación con una longitud de onda determinada, (iii) la amplitud de la perturbación  $\varepsilon$  y (iv) un parámetro geométrico  $s$  que indica el radio del sustrato sólido o, en forma equivalente, el espesor de la capa de fluido de recubrimiento.

### IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Las ecuaciones presentadas en la sección anterior conforman un sistema no lineal para la velocidad, que depende del tiempo a través de la derivada temporal en la ec. (2) y la condición cinemática definida por la ec. (6). Además, el dominio físico se desconoce a priori y se debe determinar como parte de la solución del sistema (problema de frontera libre). Para resolver este complejo conjunto de ecuaciones, se utilizó el MEF (residuos ponderados de Galerkin) con elementos isoparamétricos de Lagrange de 4 nodos de velocidad y presión constante. Por lo tanto, las derivadas espaciales se discretizaron con funciones de forma bilineales (BL) continuas entre elementos y dado que la presión se considera constante sobre cada elemento, se lo referirá como BLPC. Para el tratamiento de la presión y la condición de incompresibilidad (ec. (1)) se utilizaron las dos formulaciones más conocidas del MEF. Por un lado, la formulación mixta, en la cual la presión se aproxima con funciones de interpolación distintas a las usadas para la velocidad y los valores de presión, ingresan como nuevos grados de libertad al sistema global. De forma alternativa, se trabajó también con la formulación penalizada (técnica de integración reducida selectiva), eliminando como incógnita la presión del sistema global mediante la ecuación constitutiva

$$p = -\lambda(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (7)$$

En la ec. (7),  $\lambda$  representa el parámetro de penalización (de valor típico entre  $10^7$  y  $10^9$ ). Para la integración en el tiempo, se optó por el método predictor - corrector, discretizando las derivadas temporales por diferencias finitas. Se utilizaron dos algoritmos predictor - corrector, de acuerdo con la técnica usada para encontrar la SL: (a) predictor de Orden Cero - corrector Backward Euler (O0-BE) y (b) predictor Adams Basforth - corrector Trapezoidal Rule (AB-TR). El sistema de ecuaciones algebraico no-lineal resultante de la discretización se resuelve (en forma implícita) aplicando el método de Newton en cada paso de tiempo. Para la parametrización de la superficie libre se utilizó el método de los spines [9], el cual permite desplazar los nodos de cálculo de acuerdo con la posición actual de la SL. En el cálculo de dicha posición, se define un conjunto de variables que representan la altura de la interfase medida con respecto a una referencia. En forma independiente de la parametrización, se debe considerar el método de cálculo de dichas alturas. Una opción es el método de *spines implícito* [9], donde las alturas se calculan en forma simultánea con el resto de las variables (velocidad y presión). Al ser un algoritmo implícito, todas las variables del problema se pueden aproximar con la misma precisión en la integración temporal. Por lo tanto, todas las derivadas temporales se discretizaron en el tiempo con el esquema AB-TR. Otra alternativa, es la utilización de un método de *spines explícito* (HFM) [5], en el cual las alturas se calculan en forma separada mediante balances de masa locales en parcelas del dominio. Dado que éste es un esquema explícito para el cálculo de las alturas y fue diseñado con precisión de primer orden, la integración temporal de las ecuaciones del movimiento se debe realizar con el método O0-BE para aproximar todas las variables con la misma precisión.

De acuerdo con lo expuesto hasta aquí, se cuenta con diferentes alternativas para resolver los modelos presentados en la sección anterior. En la Tabla I se indican los códigos numéricos construidos y sus características, facilitando la posterior referencia y discusión de los resultados. Para comprender las siglas, las primeras tres letras representan el método de cálculo de la SL y las restantes la formulación del MEF.

Tabla I – Códigos numéricos analizados comparativamente.

SIGLAS	Cálculo de la SL	Formulación MEF	Integración Temporal
HFMPEN	HFM	Penalizada en Presión	OO-BE
SPIPEN	Spines Implícito	Penalizada en Presión	AB-TR
SPIMIX	Spines Implícito	Mixta	AB-TR

Finalmente, es importante aclarar que todos los programas mencionados en la Tabla I trabajan con el mismo algoritmo para la selección automática del salto de tiempo. Para ellos se optó por utilizar el método de Crisfield [11], que ajusta el salto temporal de tal forma que el bucle de Newton alcance el error prescrito ( $10^{-6}$ ) en un número deseado de iteraciones (3, por ejemplo) para todos los instantes de tiempo. Resultados complementarios sobre la utilización de otros tipos de elementos finitos, también serán discutidos.

## RESULTADOS

### Sobre la Organización y Validación.

Indudablemente, los resultados en [7] se encuentran entre los más confiables disponibles en la literatura ya que fueron validados con análisis teóricos y experimentales. Por esa razón, se utilizarán para comparar con los obtenidos en este trabajo. Por razones de brevedad, se seleccionaron cuatro casos representativos, dos para jet y dos para recubrimiento. Recordar que el parámetro  $s$  representa el radio del sustrato o cilindro ( $a$ ), adimensionalizado con el radio de la película de fluido  $r_0$  (ver Fig. 1). Luego, para un jet se tiene  $s = 0$ . Entonces, los cuatro casos en cuestión son: Caso 1 ( $s = 0$  y  $Re = 0,1$ ), Caso 2 ( $s = 0$  y  $Re = 200$ ), Caso 3 ( $s = 0,5$  y  $Re = 0,1$ ) y Caso 4 ( $s = 0,5$  y  $Re = 200$ ). En la Fig. 2 se muestran resultados de simulaciones numéricas para cada uno. Si se consideran valores típicos de  $r_0 = 0,001$  m,  $\rho = 1000$  Kg/m<sup>3</sup> y  $\sigma = 0,05$  N/m, las variaciones del número de Reynolds representan cambios en la viscosidad del fluido ( $10^{-3}$  Pa s para  $Re = 200$  y  $1$  Pa s para  $Re = 0,1$ ). Otros valores asignados en los cuatro casos (de acuerdo con [7]) fueron:  $\varepsilon = 0,05$ ,  $w_0 = 0,5$  (longitud de onda inestable según la teoría lineal [12]) y se considera que la simulación finaliza, cuando el espesor de la película de fluido alcanza el límite adimensional  $\delta_C = 0,01$  en cualquier posición axial del dominio. Este espesor adimensional se define según  $\delta_C = (r_s - s)$ , donde  $r_s$  es la altura de la interfase y  $s$  el radio del sustrato (ver Fig. 1). Además, se referirá al tiempo para el cual se alcanza el límite de colapso  $\delta_C$  como  $t_C$  o "tiempo de colapso". En la Fig. 2 se indican los valores dimensionales (en segundos) de  $t_C$  resultantes de la simulación para cada caso. Finalmente, en el análisis comparativo entre los resultados de los programas y los publicados, se utilizaron como variables el tiempo de colapso ( $t_C$ ) y la posición axial ( $z_C$ ) para la cual se alcanza el espesor límite  $\delta_C = 0,01$ , porque están disponibles en la literatura [7].

Para la cuantificar la eficiencia de cómputo, se tomó el siguiente criterio: *en la simulación de cada caso, el número de nodos de velocidad se mantiene constante para todos códigos*. Luego, como variables representativas de eficiencia numérica se seleccionaron las siguientes:  $N_{ec}$  es el número de ecuaciones (grados de libertad),  $T_t$  es el tiempo total de simulación (en segundos),  $N_t$  representa el número total de pasos de tiempo realizados,  $T_N$  el tiempo promedio requerido por cada paso temporal (en segundos),  $N_{IG}$  el número total de soluciones obtenidas para el sistema de ecuaciones y  $T_{IG}$  es el tiempo promedio para la solución del sistema de ecuaciones (en segundos), realizada con un método directo de reducción de Gauss-Jordan. Las pruebas se realizaron sobre una PC con procesador Pentium III (500 MHz) y 256 Mbytes de RAM y los códigos numéricos se implementaron en FORTRAN.

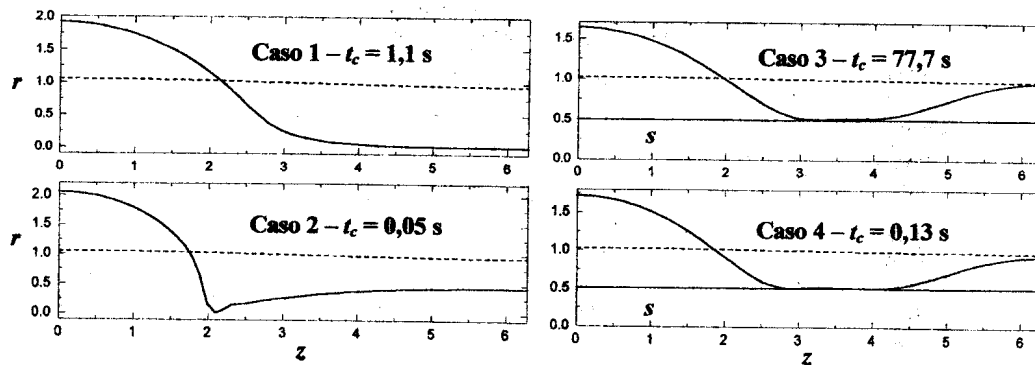


Figura 2: Perturbación inicial (líneas de puntos) y forma final (líneas continuas) de la interfase para los cuatro casos. Los valores de  $r$  y de  $z$  son adimensionales, mientras que el  $t_c$  está expresado en segundos.

### Desempeño y Características de las Técnicas Usadas.

Los resultados de los códigos construidos fueron validados con los publicados, y se encontró que todos funcionan en forma correcta. Además, se obtuvieron importantes conclusiones acerca del funcionamiento de las técnicas, a saber:

- La formulación penalizada en presión mostró problemas al trabajar con la condición de simetría axial en forma “natural o débil” para el Caso 2 (jet de alto Reynolds). Por lo tanto, se debió implementar esta condición de forma “fuerte”. Por el contrario, la formulación mixta no acusó comportamientos anómalos y siempre se pudo utilizar confiablemente la forma débil de esta condición de contorno.
- El método HFM presentó inconvenientes para describir zonas de la interfase con curvatura elevada. En éstos casos, HFM deja de funcionar correctamente antes de alcanzar el límite de colapso establecido ( $\delta_c$ ). Una situación típica es el Caso 2, en la zona donde se produce el colapso del jet. Sin embargo, la extrapolación de los resultados obtenidos antes de la falla de HFM, permiten obtener un tiempo de colapso estimado que presenta un error despreciable con los datos publicados y los demás programas.

Como se mencionó, el estudio comparativo permitió encontrar algunas limitaciones propias a cada una de las técnicas empleadas. Por otro lado, las Tablas II a V presentan los resultados de eficiencia para los cuatro casos estudiados. Tanto el tiempo de colapso ( $t_c$ ) como su posición axial ( $z_c$ ) están en unidades adimensionales, mientras que los tiempos de cómputo están dados en segundos. Nótese el excelente acuerdo entre los resultados para  $z_c$  con todos los programas, mientras que existen algunas diferencias para  $t_c$  con los resultados publicados. Se cree que los autores de [7] utilizaron mallas más refinadas que las de este trabajo y esto causa las diferencias. No obstante, las características de la evolución temporal y el proceso de flujo involucrado coinciden completamente con las referencias de la literatura [7]. El resultado más importante de las Tablas II a V consiste en el hecho que los programas que utilizan spines implícito muestran un desempeño igual o mejor que aquel que trabaja con HFM, aún cuando el último resuelve menos ecuaciones en cada paso de tiempo (ver variable  $N_{ec}$  en las tablas). Además, SPIMIX muestra resultados de eficiencia mejores (salvo para el Caso 4) que SPIPEN, a pesar que calcula más incógnitas. La explicación radica en que la convergencia del bucle de Newton es superior para SPIMIX y eso permite que trabaje con saltos de tiempo mayores que SPIPEN y HFMPEN. Esto se refleja en el menor número de pasos de tiempo (ver variable  $N_t$ ) que requiere. Resulta evidente que el método AB-TR es muy conveniente para su utilización con spines implícito. Además, la formulación mixta no sólo es una técnica más precisa y confiable, sino que su desempeño numérico es mejor (en la mayoría de los casos) que la penalizada en presión.

**Tabla II: Caso 1 (240 elementos)**

Código	$T_C$	$z_C$	$N_{ec}$	$N_{IG}$	$T_{IG}$	$N_t$	$T_N$	$T_t$
HFMPEN	250,55	$2\pi$	539	5169	0,032	2582	0,239	617
SPIPEN2	249,96	$2\pi$	600	1280	0,04	415	0,468	196
SPIMIX2	249,28	$2\pi$	840	719	0,141	227	0,901	209
Publicación	249,4	$2\pi$						

**Tabla III: Caso 2 (240 elementos)**

Código	$t_C$	$Z_C$	$N_{ec}$	$N_{IG}$	$T_{IG}$	$N_t$	$T_N$	$T_t$
HFMPEN	11,875*	2,2	539	5537	0,057	2763	0,290	803
SPIPEN2	11,834	1,989	600	1729	0,059	566	0,525	300
SPIMIX2	11,96	2,1	840	679	0,15	217	0,89	198
Publicación	11,975	$2 \pm 0,1$						

\* Tiempo de colapso obtenido mediante extrapolación de resultados.

**Tabla IV: Caso 3 (360 elementos)**

Código	$t_C$	$z_C$	$N_{ec}$	$N_{IG}$	$T_{IG}$	$N_t$	$T_N$	$T_t$
HFMPEN	17752,8	3,1415	718	12921	0,078	7021	0,446	3131
SPIPEN2	17489,6	3,1415	779	1939	0,107	649	0,929	607
SPIMIX2	18276,8	3,1415	1139	426	0,31	145	1,607	244
Publicación	19473							

**Tabla V: Caso 4 (360 elementos)**

Código	$t_C$	$z_C$	$N_{ec}$	$N_{IG}$	$T_{IG}$	$N_t$	$T_N$	$T_t$
HFMPEN	27,01	3,9793	718	9355	0,081	4676	0,459	2150
SPIPEN2	27,42	3,9793	779	6349	0,109	2060	0,96	2008
SPIMIX2	27,948	3,9793	1139	4997	0,301	1661	1,68	2801
Publicación	29,55	4,04						

#### Otras Pruebas con la Formulación Mixta.

Para la formulación mixta, además del elemento BLPC, se implementó el elemento de 9 nodos de velocidad (funciones de aproximación bicuadráticas o BC) con dos variantes en la aproximación de la presión: (i) funciones bilineales continuas entre elementos (BCBL) y (ii) función lineal discontinua entre elementos (BCPL). Con los nuevos elementos se repitieron las simulaciones para los cuatro casos que no serán mostrados por brevedad. Se pudo verificar una afirmación encontrada frecuentemente en la literatura, acerca que los elementos con funciones de interpolación discontinuas para la presión (BLPC y BCPL en este caso) realizan una aproximación superior de la condición de incompresibilidad (ec. (1)) que aquellos que utilizan funciones continuas (BCBL). Aunque esta característica no parece jugar un papel importante en este caso, ya que los resultados con los tres tipos de elementos son totalmente comparables, es recomendable la utilización de BLPC o de BCPL. Entre estos últimos, BCPL resultó ser más eficiente ya que, para el mismo número de nodos de velocidad, BLPC introduce más nodos de presión al problema, incrementando el tiempo de cómputo.

#### CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos a partir de los diferentes códigos computacionales probados, permitieron determinar claramente la ventaja de utilizar la formulación mixta del MEF y el método de spines implícito para la simulación de problemas de inestabilidad capilar. Su combinación resulta en un algoritmo robusto, confiable y eficiente, cuando se lo utiliza con un integrador temporal adecuado (AB-TR). Trabajos posteriores sobre este programa, permitieron la utilización de elementos finitos de mejor desempeño numérico y se comprobó la superioridad de un simple esquema de selección automática del salto de tiempo, el método de Crisfield [11], frente a otro de mayor complejidad como Newton de un paso [10]. Todo esto contribuyó a una mejora en la herramienta de cómputo, sobre la

cual pueden continuar los desarrollos para permitir la simulación de problemas más realistas (procesos de inestabilidad capilar en presencia de agentes tensioactivos, etc.).

El HFM demostró un funcionamiento razonable, siendo su principal ventaja la simplicidad de implementación frente a spines implícito. Por lo tanto, puede utilizarse confiablemente si se pretenden obtener resultados en forma rápida. Sin embargo, HFM es una técnica menos flexible que el método de spines implícito. Luego, para abordar estudios a largo plazo de problemas de inestabilidad capilar, donde se trabajará con diferentes configuraciones geométricas, es preferible optar por el último. El HFM funcionó de manera satisfactoria en combinación con la formulación penalizada y no se esperan ventajas al utilizarlo con la formulación mixta. Por el contrario, el método de spines implícito acusó una pérdida de eficiencia con la formulación penalizada, al verse comprometida la convergencia en el método de Newton y no se recomienda utilizar esta combinación de técnicas.

### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Facultad de Ingeniería Química de la UNL, la ANPCyT y a la Facultad de Ingeniería de la UNER por el apoyo económico brindado para la realización de este trabajo.

### REFERENCIAS

- [1] **Rayleigh, Lord.** *On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force.* Phil. Mag. V. 34, 145, 1892.
- [2] **Aden, J. S.; Bohorquez, J. H.; Collins, D. M.; Crook, M. D.; Garcia, A. and Hess, U.E.** *The third generation HP thermal InkJet printhead.* Hewlett-Packard Journal. V. 45 (1), 1994.
- [3] **Yarin, A. L.; Oron, A. y Roseneau, P.** *Capillary instability of a thin liquid film on a cylinder.* Phys. Fluid A. V. 5 (1), 91, 1993.
- [4] **Johnson, M.; Kamm, R. D.; Ho, L. W.; Shapiro, A. y Pedley, T. J.** *The nonlinear growth of surface-tension driven instabilities of a thin annular film.* J. Fluid Mech. V. 233, 141, 1991.
- [5] **Mashayek, F. y Ashgriz, N.** *A height-flux method for simulating free surface flows and interfaces.* Int. J. Num. Meth. In Fluids. V. 17, 1035, 1993.
- [6] **Ashgriz, N. and Mashayek, F.** *Temporal analysis of capillary jet breakup.* J. Fluid Mech. V. 291, 163-190, 1995.
- [7] **Mashayek, F. and Ashgriz, N.** *Instability of liquid coatings on cylindrical surfaces.* Physics of Fluids. V. 7 (9), 2143-2153, 1995.
- [8] **Campana, D.; Corvalán, C. M. Y Saita, F. A.** *Análisis Numérico de la Evolución Temporal de Interfases Líquido – Gas en Chorros de Fluidos y en Recubrimientos Líquidos sobre Superficies Cilíndricas.* Mecánica Computacional. Compilado por: F. Quintana y S. Felicelli. AMCA. V. XIX, 85-90, 2000.
- [9] **Kistler, S. F. and Scriven, L. E.** *Coating Flows.* Computational Analysis of Polymer Processing. J. R. A. Pearson and S. M. Richardson (eds), Applied Science Publishers, New York, 243-299, 1984.
- [10] **Gresho, P. M., Lee, R. and Sani, R.** *On the time – dependent solution of the incompressible Navier-Stokes Equation in two and three dimensions.* Recent Advances In Numerical Methods In Fluids. V. 1, Ch. 2, 27-79, 1980.
- [11] **Corvalán, C. M. y Saita, F. A.** *Automatic Stepsize Control in Continuation Procedures.* Comp. Chem Engng. V. 5 (10), 729-739, 1991.
- [12] **Goren, S.** *The instability of an annular thread of fluid.* J. Fluid Mech. V. 12, 309, 1962.