

## **Modelado 3D del Vórtice Polar Austral**

**Walter E. Legnani**

Instituto de Cálculo Universidad de Buenos Aires  
National Center for Atmospheric Research  
Boulder, Colorado, USA

**Rolando R. García**

National Center for Atmospheric Research  
Boulder  
Colorado, USA

**Pablo O. Canziani**

Dpto. Ciencias de la Atmósfera y los Océanos  
Facultad. Ciencias Exactas y Naturales - UBA

**Pablo M. Jacovkis**

Dpto. Computación e Instituto de Cálculo  
Facultad. Ciencias Exactas y Naturales - UBA

### **Resumen**

En este trabajo se implementó un modelo cuasitridimensional de aguas poco profundas para modelizar el vórtice polar austral. El sistema de ecuaciones resultante se integró mediante un método espectral basado en las autofunciones del operador de aguas poco profundas sobre la esfera y en la vertical se empleó interpolación de trazadores cúbicos entre los sucesivos niveles del dominio físico computacional. La condición de contorno inferior fue tomada a partir de datos de temperatura de tropopausa del European Centre for Medium Range Weather Forecasting. Se lo ha calibrado con datos de otros modelos semiempíricos y los resultados finales reproducen con gran fidelidad eventos de deformación del vórtice polar.

### **Abstract**

In this work a quasi-tridimensional shallow water model was implemented to model the austral polar vortex. The equations set was integrated using a spectral method based on the eigenfunctions of the shallow water operator over the sphere, in the vertical interpolation using cubic splines was applied between two successive levels of the physical computational domain. The lower boundary layer condition was given by the tropopause temperature data from the European Centre for Medium Range Weather Forecasting. This model was calibrated using other semi empiric models that and was able to reproduce several of deformation events of the polar vortex.

### **Introducción**

El comportamiento del vórtice polar es un fenómeno sumamente complejo, donde se pone en juego la mecánica de fluidos y la termodinámica, que a su vez es afectada por la química que depende de éstas, dentro del marco de un problema con una fuerte caracterización en tres dimensiones y el tiempo. Por otro lado el tan mentado agujero de ozono desarrolla su

estructura principal en el interior del vórtice polar, aproximadamente entre los 13 y los 22 km. de altura y aunque constituye uno de los procesos naturales más estudiados en los últimos veinte años, sin embargo hasta el día de hoy no se ha llegado a comprender cabalmente los mecanismos de su evolución tanto espacial como temporal.

Dada la vinculación de la capa de ozono con el desarrollo y mantenimiento de la vida sobre nuestro planeta, y más en particular sobre nuestro país dada su proximidad a la Antártida, el estudio del vórtice polar es sin lugar a dudas un hecho crucial para el avance del conocimiento de los mecanismos que modifican la forma del agujero de ozono, dado que lo que le suceda al primero afectará directamente al último, ya que inclusive procesos fisico-químicos que afectan la capa de ozono tienen efectos sobre la estabilidad y longevidad del vórtice polar, constituyendo un sistema extremadamente complejo que se realimenta por múltiples vías. En otras palabras la cuestión del agujero de ozono, con sus implicaciones, es un caso testigo para estudiar y evaluar procesos de cambio global inducidos por la actividad antrópica.

Para modelar el sistema compuesto por el vórtice polar se partió de las ecuaciones básicas de dinámica de la atmósfera escritas en coordenadas isentrópicas (de entropía constante, sobre las cuales se desarrollan los procesos adiabáticos estratosféricos), Salby, (1996)

$$\frac{d\mathbf{v}_h}{dt} + \left( f + u \frac{\tan(\phi)}{a} \right) \hat{k} \times \mathbf{v}_h = -\nabla_{\theta} \Psi - D_h, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \ln(\theta)} = h, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial \theta} (\nabla \cdot \mathbf{v})_{\theta} = 0, \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\theta}{h} \dot{q}_{net}, \quad (4)$$

donde  $\mathbf{v}_h$  es el vector de las componentes horizontales velocidad,  $f$  es el parámetro de Coriolis,  $u$  es la componente longitudinal de la velocidad,  $\phi$  es latitud,  $\theta$  es la temperatura potencial,  $a$  es el radio de la Tierra,  $t$  es el tiempo,  $\hat{k}$  es el versor en la dirección vertical, y  $\Psi$  es el geopotencial,  $h$  es la función termodinámica denominada entalpía,  $\psi = \Phi + h$  es la función corriente de Montgomery, que desempeña un papel similar al del geopotencial en coordenadas isobáricas,  $D$  representa el arrastre por fricción,  $\dot{q}$  es la tasa de calentamiento específica, y se debe tener presente que las derivadas horizontales se evalúan tomando  $\theta$  fijo

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (5)$$

### Ecuaciones del modelo

El sistema de ecuaciones descrito en (1) a (4) puede ser re-escrito en términos de un estado de referencia ( $\mathbf{v}_R, h_R$ ), más perturbaciones ( $\mathbf{v}', h'$ ), de tal manera que:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}',$$

$$h = h_R + h', \quad (6)$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores y reteniendo términos de primer orden en las variables primadas, es decir, descartando los términos no lineales, se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + f \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}' = -\gamma \nabla \Psi_B - \gamma \int_s \nabla h \, ds', \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h'}{\partial t} + \kappa h_R \gamma (\nabla \cdot \mathbf{v}') = q + e^{\frac{s_T - s}{\kappa}} \left[ \frac{\partial h'_T}{\partial t} + \kappa h_R \gamma (\nabla \cdot \mathbf{v}') - \dot{q}_T \right] \\ - \gamma \kappa h_R e^{\frac{s}{\kappa}} \int_s^T e^{-s'/\kappa} \frac{\partial [\nabla \cdot \mathbf{v}']}{\partial s'} ds'. \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\gamma$  es el parámetro de Lamb,  $\kappa = R/c_p$ , siendo  $R$  el valor medio ponderado de la constante de gas ideal de los gases que componen la atmósfera, y  $c_p$  es el calor específico a presión constante,  $s = \log(\theta)$ , y los subíndices  $B$  y  $T$  se refieren a la frontera inferior y superior del recinto de integración respectivamente.

Haciendo uso de la ecuación hidrostática para eliminar la integral en la ecuación de conservación del momento, reemplazando  $\psi$  por  $(\Phi + h)$ , y especificando la altura equivalente  $H_R$  tal que se satisface la relación adimensional para  $h_R$ , resulta:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + f \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}' + \gamma \nabla h' = \gamma \nabla \Phi, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h'}{\partial t} + \gamma (\nabla \cdot \mathbf{v}') = q + e^{\frac{s_T - s}{\kappa}} \left[ \frac{\partial h'_T}{\partial t} + \kappa h_R \gamma (\nabla \cdot \mathbf{v}') - \dot{q}_T \right] \\ - \gamma e^{\frac{s}{\kappa}} \int_s^T e^{-s'/\kappa} \frac{\partial [\nabla \cdot \mathbf{v}']}{\partial s'} ds'. \end{aligned} \quad (10)$$

El lado izquierdo de las ecuaciones anteriores coincide con el de las de aguas poco profundas. Tal como fue hecho en el desarrollo de las ecuaciones del modelo barotrópico (Salby *et al.* 1990, Bowman, 1993) equivalente se suma  $\gamma \nabla h$  a ambos lados de la ecuación (7) y  $\gamma (\nabla \cdot \mathbf{v}')$  en la ecuación (8), el sistema de ecuaciones (9) a (10) puede ser expresado en término del operador de aguas poco profundas en forma matricial como sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{W}' = \mathbf{F}, \quad (11)$$

donde el vector

$$\mathbf{W}' = [u \ v \ h], \quad (12)$$

y la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -f & \frac{\gamma}{\cos(\phi)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ f & 0 & \gamma \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\gamma}{\cos(\phi)} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\gamma}{\cos(\phi)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [\cos(\phi)] & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

es el operador de aguas poco profundas,  $\lambda$  es la coordenada longitudinal,  $F$  el vector de términos fuente del sistema de ecuaciones (con aportes no lineales):

$$F = \begin{pmatrix} -\gamma \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} - s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} + \gamma \nabla h - u \tan(\phi) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} - \gamma \nabla \Psi_B - \gamma \int_n \nabla h ds' - D \\ -\gamma \mathbf{v} \cdot \nabla h - s \frac{\partial h}{\partial s} + q + \gamma \nabla \cdot \mathbf{v} + \left(\frac{h_r}{h}\right)^{\frac{1}{\kappa}-1} e^{-\frac{s_r-s}{\kappa}} \left[ \frac{\partial h_r}{\partial t} - q_r \right] \\ -\gamma \frac{e^{\frac{s}{\kappa}}}{h^{\frac{1}{\kappa}-1}} \int_r \frac{h^{\frac{1}{\kappa}-1}}{e^{\frac{s'}{\kappa}}} \left[ \nabla \cdot \mathbf{v} \left( \frac{\partial h}{\partial s'} - h \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s'} \cdot \nabla h \right] ds' \end{pmatrix}, \quad (14)$$

### Integración espectral horizontal

El sistema de ecuaciones del modelo, escrito en forma vectorial espectral en la ecuación (11) se puede plantear en función de las variables y subíndices en la siguiente forma:

$$\frac{\partial W_{m,n}(s,t)}{\partial t} + L \cdot W_{m,n}(s,t) = F_{m,n}(s,t), \quad (15)$$

donde

$$W_{m,n}(s,t) = \sum_{m,n}^{M,N} \Xi_{m,n}(s,t) H_{m,n}(\lambda, \phi), \quad (16)$$

en donde el subíndice  $m$  corresponde a la dirección longitudinal y el subíndice  $n$  a la dirección latitudinal (o meridional) y el operador  $L$  da lugar a la siguiente ecuación de valores propios

$$L \cdot [H_{m,n}(\lambda, \phi)] = i \sigma_{m,n} H_{m,n}(\lambda, \phi), \quad (17)$$

donde

$$H_{m,n}(\lambda, \phi) = \begin{bmatrix} U_{m,n}(\phi) \\ V_{m,n}(\phi) \\ Z_{m,n}(\phi) \end{bmatrix} e^{im\lambda}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^1 H_{m,r} H_{m',r'}^* d\phi d\lambda = \delta_{m,m'} \delta_{r,r'}. \quad (19)$$

donde  $H_{m,n}$  es el armónico de Hough de orden  $(m,n)$  (Hough, 1898, Longett Higgins, 1968) En el caso en que  $F$  es idénticamente nulo, la expresión (11) (sistema de ecuaciones de aguas poco profundas) coincide con la ecuación de mareas de Laplace (Lamb, 1932) sin fuentes

generadoras de mareas. En el caso general el valor de la transformada de Hough de los términos no lineales en el miembro derecho de la ecuación (11) se puede escribir como:

$$F_{m,n} = [F, H_{m,n}], \quad (20)$$

que representa la proyección del forzante del (m,n)ésimo modo de Hough en la dirección horizontal, o sea su transformada de Hough. Al evaluar  $F$  se lo hace económicamente desde un punto de vista del cálculo, dado que se evalúa  $F$  en el espacio físico en cada paso temporal

para luego transformarla en el espacio espectral mediante una transformada rápida de Fourier (en la dirección longitudinal) y por cuadratura gaussiana (en la dirección latitudinal) (Callaghan, 1999), mientras que los valores de  $W_{mn}(s, t)$  son interpolados en la vertical mediante el uso de splines cúbicas, y la integración temporal se realizó mediante un esquema de leap frog.

### Resultados

A continuación se muestra una serie de gráficos que reproducen eventos estudiados, sobre los mismos se puede observar la coincidencia morfológica con el modelo de Center for Environmental Prediction (NCEP).

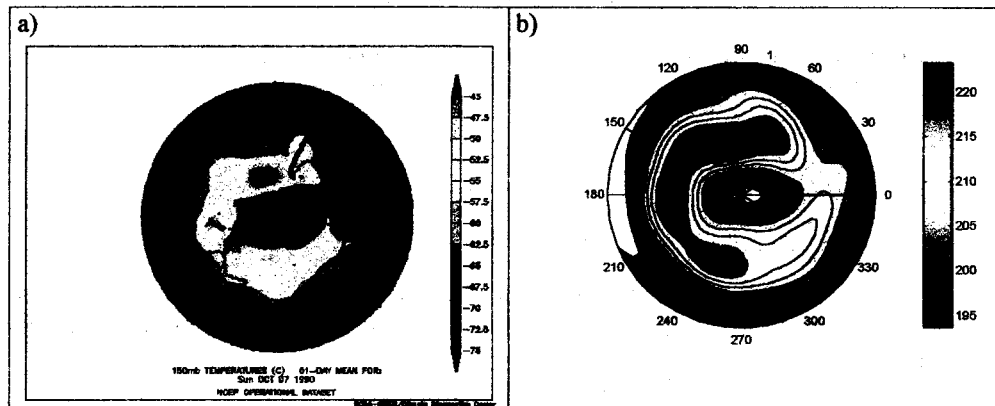


Figura 1

Evento 7 de Octubre de 1990 - Comparación con otro modelo

a) Modelo del NCEP reanálisis b) modelo de este trabajo

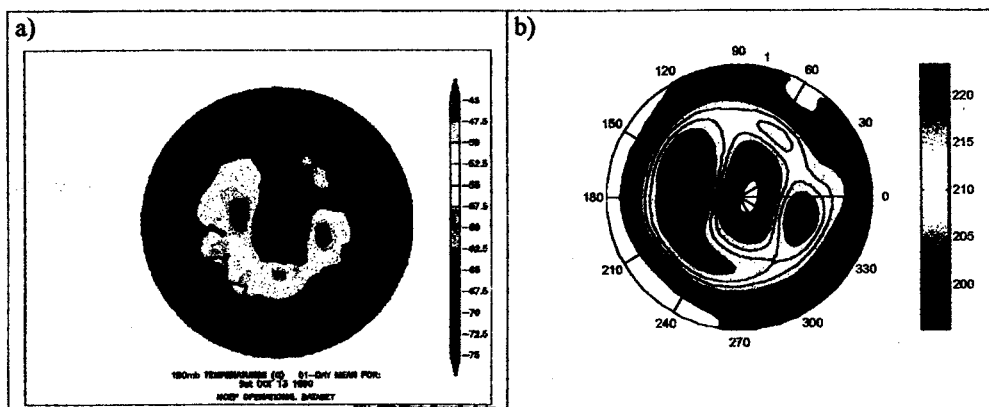


Figura 2  
 Evento 13 de Octubre de 1990 - Comparación con otro modelo  
 a) Modelo del NCEP reanálisis b) modelo de este trabajo

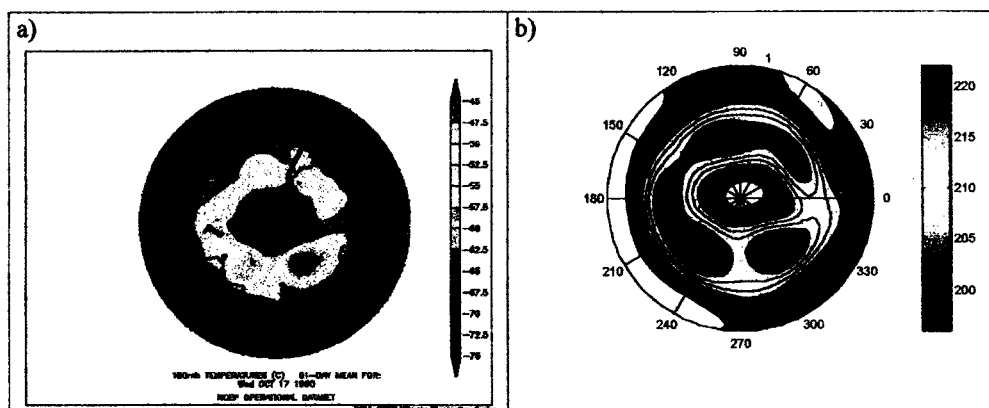


Figura 3  
 Evento 17 de Octubre de 1990 - Comparación con otro modelo  
 a) Modelo del NCEP reanálisis b) modelo de este trabajo

a) Temperatura mínima en el interior del elipsoide:

Evento	Modelo NCEP	Modelo	Diferencia porcentual relativa
1er .	-75	-78	-4.00 %
2do.	-75	-73	2.67 %
3ero.	-75	-73	2.67 %

b) Temperatura en el borde del elipsoide:

Evento	Modelo NCEP	Modelo	Diferencia porcentual relativa
1er .	-65	-65	0 %
2do.	-65	-65	0 %
3ero.	-65	-65	0%

## c) Posición del eje mayor y menor del elipsoide:

Evento	Modelo NCEP		Modelo	
	Semieje Mayor	Semieje Menor	Semieje Mayor	Semieje Menor
1er.	12 °	101 °	0 °	90 °
2do.	79 °	168 °	80 °	170 °
3ero.	0 °	90 °	0 °	90 °

Los ángulos de la posición de los semiejes son tomados en longitud oeste. Hay que destacar los tres casos se mantiene la cuasi perpendicularidad del semieje mayor respecto del semieje menor.

## d) Cociente entre semiejes del elipsoide:

Como una forma de ponderar la elongación del vórtice / agujero de ozono se tomó el cociente entre la longitud de los semiejes de los elipsoides, los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Evento	Eje mayor/Eje menor		Diferencia porcentual relativa
	NCEP	Modelo	
1ero.	1.76	1.82	3.22 %
2do.	1.58	1.66	4.60 %
3ero.	1.35	1.40	3.57 %

## e) Temperatura máxima collar externo al elipsoide:

Al elipsoide de las figuras 2 a 4 lo circunda un collar de temperaturas cuyos valores máximos se muestran a continuación:

Evento	Modelo NCEP	Modelo	Diferencia porcentual relativa
1er.	-45	-48	6.25 %
2do.	-45	-48	6.25 %
3ero.	-49	-47	4.08 %

## f) Temperatura mínima en el collar de temperatura exterior al elipsoide:

Al elipsoide de las figuras 2 a 4 lo circunda un collar de temperaturas cuyos valores mínimos se muestran a continuación:

Evento	Modelo NCEP	Modelo	Diferencia porcentual
1er.	-60	-63	5.00 %
2do.	-58	-60	3.44 %
3ero.	-60	-61	1.66 %

Se puede notar también sobre la serie de gráficos 2 a 4:

- Existe una gran coincidencia entre la orientación de los ejes de los elipsoides en todos los gráficos.
- El collar de temperaturas que acompaña al elipsoide los tres casos posee aproximadamente la misma orientación
- La extensión del collar de altas temperaturas en los resultados de ambos modelos es aproximadamente la misma.

### Conclusiones

El presente modelo es capaz de reproducir con muy buena fidelidad el comportamiento del vórtice polar antártico en un amplio rango de alturas y condiciones de contorno reales. Esto es muy importante porque permite estudiar los mecanismos físicos de la atmósfera que definen comportamientos característicos de su evolución. La variabilidad interanual e intra estacional del sistema vórtice polar / agujero de ozono podrá ser mejor comprendida con esta herramienta, en particular en el aspecto que se refiere a los vínculos entre estratósfera y tropósfera. Una vez que se identifique bien los mecanismos de evolución y deformación del vórtice polar se podrá mejorar la predicción de la evolución del agujero de ozono, sus pasajes sobre el cono sur de América del sur, y su duración hasta finales de la primavera austral. El modelo presentado en este trabajo aporta originalidad en tanto y cuanto son muy poco frecuentes los modelos de naturaleza mecanística que se implementan desde la mecánica de fluidos computacional para reproducir eventos atmosféricos tan específicos como el del estudio de vórtice polar.

### Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento al National Center for Atmospheric Research E.E.U.U. por su contribución al presente proyecto. Al Center for Atmospheric Theory and Analysis de la Universidad de Colorado, en Boulder, Colorado, E.E.U.U. por su aporte económico y la contribución de software y hardware. Al Instituto Interamericano para la Investigación del Cambio Global (IAI) por la beca de su proyecto IAI ISP 3-076 que posibilitó la estadía de W.E. Legnani en E.E.U.U. A los proyectos de la Universidad de Buenos Aires TW91, y IO50, por su contribución económica en la realización de este estudio.

### Referencias

- [1] Salby, Murry L.  
Fundamentals of Atmospheric Physics.  
Academic Press, 1996
- [2] Hough, S. S.  
On the Application of Harmonic Analysis to the Dynamical Theory of Tides.  
Phil. Trans. A. 191. 201-257. 1898.
- [3] Bowman, Kenneth  
Barotropic Simulation of Large Scale Mixing in the Antarctic Polar Vortex  
J. of Atm. Sc. Sept. 50, 2901-2913, 1993.
- [4] Richard L. Burden, J. Douglas Faires  
Análisis Numérico, Thomson, 1998
- [5] Lamb, H.  
Hydrodynamics, 6<sup>th</sup>. Ed. Dover, 738 pp., 1932
- [6] Callaghan, P., Fusco, A., Francis, F., and Salby, M.  
A Hough Spectral Model for Three-Dimensional Studies of the Middle Atmosphere.  
Journal of the Atmospheric Sciences, vol. 56, 1461-1480, June 1999.