

## MODELIZACIÓN DE ANISOTROPÍA PLÁSTICA EN EMBUTICIÓN DE LÁMINAS METÁLICAS

**Fernando G. Flores**

Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba,  
Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina  
e-mail: fflores@efn.uncor.edu

### ABSTRACT

This paper shows the application of the yield criteria proposed by Hill in 1948 to thin sheet metal forming simulations. Two kind of shell finite elements are considered, classical and transverse shear deformable ones, both based on a Total Lagrangean Formulation with a logarithmic strain-stress pair. To assess the behavior a recently proposed benchmark is analyzed.

### RESUMEN

En este trabajo se muestra la utilización del criterio de fluencia formulado por Hill en 1948 en la simulación de conformado de chapas metálicas. Se consideran dos tipos de elementos finitos de lámina, con y sin deformaciones transversales por corte. Ambos elementos están basados en una formulación Lagrangeana total con deformaciones logarítmicas y su tensión asociada. A los fines de evaluar el comportamiento se analiza un benchmark propuesto recientemente.

### INTRODUCCIÓN

La simulación de procesos de embutición de láminas metálicas es hoy una tarea rutinaria en la industria, especialmente la industria automotriz. A su vez las chapas que se utilizan se fabrican habitualmente mediante un proceso de rolado sobre bloques cuyo material original puede suponerse isótropo. Al final del proceso de rolado el comportamiento del material deja de ser isótropo, particularmente su comportamiento plástico, debido a las grandes deformaciones plásticas y la fuerte direccionalidad del proceso.

Una adecuada modelización del proceso de embutición requiere considerar la anisotropía del material, debido a las marcadas diferencias entre el comportamiento del material en el plano de la lámina y en la dirección normal a la misma (anisotropía transversal) y también debido al diferente comportamiento en la dirección de rolado y en otras direcciones del plano (anisotropía en el plano). La anisotropía transversal es un efecto beneficioso en este tipo de procesos pues permite lograr mayores profundidades de embutición, en tanto que la anisotropía en el plano en general no lo es. Finalmente la anisotropía requiere el seguimiento detallado de las fibras materiales y asociar el comportamiento (resistencia y deformación) con ellas, lo que no es posible en la mayoría de los algoritmos propuestos para el tratamiento de la plasticidad con grandes deformaciones

En las modelizaciones por elementos finitos, se pueden utilizar elementos de lámina o de sólidos. Los primeros en general son computacionalmente más económicos, pero no pueden captar algunos detalles asociados a variaciones en el espesor y tensiones asociadas a la dirección normal. Por otro

lado el comportamiento de la chapa es principalmente membranaral aunque no puede despreciarse la influencia de la flexión.

### CARACTERIZACIÓN DEL MATERIAL

La caracterización del comportamiento de una lámina metálica obtenido por rolado se realiza a través de resultados experimentales. No existe un conjunto único de ensayos que permitan caracterizarla y siempre es posible realizar nuevos ensayos que representen nuevas condiciones sobre el modelo. Así por ejemplo es habitual realizar ensayos en tres direcciones, sin embargo el número de direcciones no es fijo y por ejemplo para chapas de aluminio, que presentan un comportamiento más complejo que las de acero, suelen considerarse 7 direcciones.

En este trabajo supondremos que el material que constituye la lámina puede ser caracterizado por hipótesis de comportamiento y por resultados experimentales. Las hipótesis de comportamiento son:

- El comportamiento elástico del material es isótropo. Esta hipótesis no es significativa para la formulación considerada y utilizar un comportamiento elástico ortótropo no representa una complejidad importante.
- El límite de fluencia es independiente de la presión media, es decir que la superficie de fluencia sólo depende de la componente desviadora de las tensiones
- La deformación plástica es isócara

$$\dot{\epsilon}_{11}^P + \dot{\epsilon}_{22}^P + \dot{\epsilon}_{33}^P = 0 \quad (1)$$

- El comportamiento plástico es idéntico en tracción y compresión, es decir el material no presenta el efecto Bauschinger.

En tanto que los resultados de ensayos proveen:

- Tres (3) tensiones de fluencia a tracción en las direcciones de: rolado  $\sigma_0(e^P)$ , a  $45^\circ$  de la dirección de rolado  $\sigma_{45}(e^P)$  y a  $90^\circ$  de la dirección de rolado  $\sigma_{90}(e^P)$ . Todas éstas como función de la deformación plástica efectiva  $e^P$  que pueden ser independientes o tener una relación constante, es decir

$$\frac{\sigma_{90}(e^P)}{\sigma_0(e^P)} = S_{90} = \text{cte} \quad \frac{\sigma_{45}(e^P)}{\sigma_0(e^P)} = S_{45} = \text{cte} \quad (2)$$

- Tres (3) relaciones entre la deformación plástica transversal (en el plano) a la dirección de estiramiento y la deformación plástica normal (al plano), en la forma de parámetros de Lankford

$$r_0(e^P) = \frac{\dot{\epsilon}_{90}^P}{\dot{\epsilon}_{33}^P} \quad r_{45}(e^P) = \frac{\dot{\epsilon}_{135}^P}{\dot{\epsilon}_{33}^P} \quad r_{90}(e^P) = \frac{\dot{\epsilon}_0^P}{\dot{\epsilon}_{33}^P} \quad (3)$$

que similarmente al caso de las resistencias pueden ser constantes o dependientes de la deformación plástica efectiva.

- Eventualmente también pueden existir resultados de resistencia a tracción bi-axial. Dicho valor de resistencia se denominará con  $\sigma_b(e^P)$  que al igual que las resistencias uniaxiales en las distintas direcciones dependerá de la deformación plástica efectiva y se la relacionará con la resistencia a tracción en la dirección de rolado

$$S_b = \frac{\sigma_b}{\sigma_0} \quad (4)$$

que supondremos constante. Notar por otro lado que la tensión  $\sigma_b$  es equivalente a la resistencia a compresión en la dirección normal a la lámina y por lo tanto también a la resistencia a tracción.

### CRITERIO DE FLUENCIA DE HILL

Existen en la literatura diferentes superficies de fluencia orientadas al tratamiento de materiales anisótropos y en particular al comportamiento de chapas obtenidas por rolado. Los criterios que mejor se ajustan a los valores experimentales utilizan exponentes no enteros o distintos de 2 en la definición de la función de fluencia. Esto encarece substancialmente el tratamiento numérico y aquí se intenta mantener una forma cuadrática para la función de fluencia. En base a lo anterior se utilizará el criterio de fluencia formulado por Hill[1]

$$f = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 - 1 \quad (5)$$

Notar que el comportamiento plástico es insensible a la presión media, lo que permite trabajar con el tensor desviador de tensiones. Particularizado para un estado de tensión plana asociado a una teoría clásica de láminas

$$f = F\sigma_{22}^2 + G\sigma_{11}^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2N\sigma_{12}^2 - 1 = 0 \quad (6)$$

Los coeficientes  $F, G, H$  y  $N$  pueden obtenerse a partir de los parámetros de Lankford

$$\begin{bmatrix} F \\ G \\ H \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+r_0)} \frac{r_0}{r_{90}} \frac{1}{\sigma_y^2} \\ \frac{1}{(1+r_0)} \frac{1}{\sigma_y^2} \\ \frac{r_0}{(1+r_0)} \frac{1}{\sigma_y^2} \\ \left(\frac{1}{2} + r_{45}\right) \frac{1}{(1+r_0)} \left(\frac{r_0}{r_{90}} + 1\right) \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

o a partir de las relaciones de resistencia

$$G = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_b^2} - \frac{1}{\sigma_{90}^2} \right) \quad (8a)$$

$$F = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{90}^2} + \frac{1}{\sigma_b^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) \quad (8b)$$

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_{90}^2} - \frac{1}{\sigma_b^2} \right) \quad (8c)$$

$$N = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{\sigma_{45}^2} - \frac{1}{\sigma_b^2} \right) \quad (8d)$$

Está muy claro que la superficie de fluencia cuadrática propuesta por Hill no puede simultáneamente satisfacer todas las condiciones impuestas por los experimentos. El criterio de Hill incluye 4 coeficientes o parámetros y por lo tanto acepta cuatro condiciones, luego de los resultados experimentales disponibles deben elegirse aquellos que sean más representativos del comportamiento de la lámina.

Para el caso de embutición de láminas metálicas, que es el objetivo de este trabajo, parece razonable dar prioridad a los coeficientes de Lankford, con lo cual resta imponer una cuarta condición que naturalmente debe estar asociada a la resistencia. Así las expresiones 7 permiten calcular los coeficientes de Hill en base a los tres parámetros de Lankford más la resistencia a tracción axial en la dirección de rolado.

Resulta obvio que la utilización de tales coeficientes cuando se modele los ensayos correspondientes satisficará en forma exacta las condiciones utilizadas, es decir que se obtendrán numéricamente los coeficientes de Lankford utilizados y la resistencia a tracción axial en la dirección

de rolado. Por otro lado las resistencias a tracción axial en las otras direcciones de ensayo (incluyendo la biaxial si estuviera disponible) no podrán satisfacerse. Esto significa un privilegio para la dirección de rolado que no es justificable, por lo cual parece más razonable solicitar que se pueda promediar las diferencias entre los resultados experimentales en las distintas direcciones y el modelo numérico.

En el caso de que se quiera utilizar el criterio de Hill con formulaciones de elementos de láminas que incluyan deformaciones transversales por corte (tipo Mindlin-Reissner), es necesario evaluar los coeficientes  $L$ , y  $M$ , asociados a la resistencia al corte transversal al plano de la lámina.

El coeficiente  $M$  está asociado a la resistencia al corte en el plano 1-3 formado por la dirección de rolado y la dirección normal. En general no se dispone de información respecto al comportamiento en ese plano. Una aproximación posible es considerar como equivalentes desde el punto de vista de la resistencia a:

1) Un estado tensional de la forma  $\sigma_{11} = \sigma = -\sigma_{33}$  que corresponde a un estado de corte puro en el plano 1-3, resulta

$$F\sigma^2 + 4G\sigma^2 + H\sigma^2 - 1 = 0 \quad (9)$$

2) Un estado de corte puro en el mismo plano pero rotado a  $45^\circ$  del anterior, se obtiene haciendo  $\sigma_{13} = \sigma$ , de tal forma que

$$2M\sigma^2 - 1 = 0 \quad (10)$$

De donde puede obtenerse una primera aproximación (arbitraria) para  $M$

$$M = \frac{1}{2}(F + 4G + H) \quad (11)$$

Algo completamente semejante puede hacerse en el plano 2-3, del cual se obtiene

$$L = \frac{1}{2}(4F + G + H) \quad (12)$$

En el caso de modelos bidimensionales con simetría de revolución, no es posible considerar anisotropía en el plano, sólo transversal. En tal caso los coeficientes  $F$  y  $G$  coinciden

Como se indicara antes el criterio de Hill no puede satisfacer todas los resultados obtenidos de los tres ensayos de tracción en distintas direcciones. Sin embargo si se utiliza un modelo de plasticidad "no-asociada" es posible satisfacer en forma simultánea todas las condiciones impuestas en los ensayos pero con la desventaja de no satisfacer el postulado de máxima disipación plástica asociado a la regla de normalidad. En tal caso puede utilizarse como superficie de fluencia el criterio de Hill, donde los coeficientes se calculan en base a las resistencias a tracción en las direcciones de ensayo y la resistencia biaxial (expresiones 8a-8d), en tanto que la regla de flujo resulta de imponer que se cumplan las relaciones de Lankford. Lo cual se logra sencillamente usando como potencial plástico a la función de fluencia de Hill con coeficientes obtenidos usando los parámetros de Lankford medidos en los ensayos

## IMPLEMENTACIÓN

El criterio de fluencia de Hill ha sido implementado en dos tipos de elementos de lámina.

1. Un elemento de lámina clásica (sin deformaciones transversales de corte) [2]. Es un triángulo de 3 nudos con 3 grados de libertad por nudos correspondientes a los desplazamientos. El elemento no tiene grados de libertad de rotación. Es no conforme, membranalmente corresponde a un triángulo de deformación (tensión) constante y flexionalmente también tiene curvatura constante, la que se evalúa en función de la configuración de los elementos vecinos.

2. elementos (un cuadrilátero de cuatro nudos y un triángulo de seis nudos[3]) basados en la teoría de láminas de Simo et al [4] que incluye deformaciones transversales por corte.

Ambos tipos de elementos están basados en formulaciones Lagrangeanas totales, de tal forma que los medidas de deformación y tensión se refieren a fibras materiales, lo que resulta imprescindible a los fines de poder tratar el comportamiento anisótropo que está precisamente referido a ejes materiales.

Por otro a los fines de considerar grandes deformaciones plásticas, es necesario trabajar con medidas de tensión y deformación conjugadas adecuadas a este fin. Por ello se ha elegido el par de Hencky asociado a deformaciones logarítmicas y a tensiones de Kirchhoff rotadas (similares a las tensiones de Biot). Se ha supuesto (considerando pequeñas deformaciones elásticas) que es posible descomponer al tensor de deformaciones como la suma de una componente elástica y una plástica. Se ha supuesto además una relación lineal, constante e isótropa entre la componente elástica de deformación y el tensor de tensiones. Se ha considerado endurecimiento isótropo exponencial. La integración en el espesor de la lámina se realiza en forma numérica dividiendo la lámina en capas, habitualmente cuatro. En base a las hipótesis de incompresibilidad plástica y de pequeñas deformaciones elásticas, el volumen se supone constante lo que permite actualizar fácilmente el espesor.

Los elementos de láminas han sido implementados en un código de dinámica explícita (hidro-código)[5] lo que evita la necesidad de la evaluación de la matriz de rigidez tangente, que en este caso es muy onerosa debido a las características de la cinemática utilizada. Este programa utiliza para el contacto entre herramientas y lámina una formulación de penalización. El algoritmo de contacto considera los cambios de espesor que pueda sufrir la lámina y se realiza entonces a nivel de las superficies exteriores de la lámina.

### EJEMPLO

Se ha utilizado como ejemplo un "benchmark" propuesto en el último encuentro NUMISHEET [6]. Corresponde a la embutición profunda de una lámina circular de acero dulce con un punzón esférico de 50 mm de radio ( $R_P$ ). El radio original de la lámina ( $R_L$ ) es 100mm ( $\frac{R_L}{R_P} = \beta = 2$ ). La profundidad de embutición ( $PE$ ) es 85mm ( $\frac{PE}{R_P} = 1.7$ ) y la fuerza sobre el pisador es 80KN. La caracterización del material está dada por 3 ensayos a tracción en distintas direcciones respecto a la dirección de rolado (DR):

Espesor	Orientación respecto a DR	Tensión de fluencia	Resistencia a tracción	$\epsilon_u$ (uniforme)	$\epsilon_t$ (total)	$n$	$r$
[mm]	[°]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[%]	[%]	-	-
	0	176	322	24	40	0.214	1.73
0.98	45	185	333	22	39	0.203	1.23
	90	180	319	23	44	0.206	2.02

Se ha modelado un cuarto de la geometría. Las herramientas se modelan como superficies rígidas, la superficie del punzón ha sido discretizado con 1438 puntos y 2730 facetas triangulares; para la matriz se han utilizado 744 puntos y 690 cuadriláteros; y para el pisador 155 puntos y 120 cuadriláteros. En la Figura 1.a se muestra una vista de la geometría del punzón y de la matriz, en tanto que en la Figura 1.b se puede ver una vista de la geometría final de la lámina.

La lámina ha sido alternativamente modelada con 6370 elementos triangulares de 3 nudos, 3284 nudos (9724 GdeL) y 3185 elementos cuadriláteros de 4 nudos, 3284 nudos (16164 GdeL). Se han utilizado en ambos casos los mismos nudos, sin embargo el elemento triangular (tipo Kirchhoff que denominaremos Elemento-1) tiene menos grados de libertad por nudo que el cuadrilátero (tipo Mindlin que denominaremos Elemento-2). La diferencia en la cantidad de grados de libertad no es significativa en el análisis, si lo es la cantidad de puntos de integración. El E2

tiene cuatro puntos de integración en tanto que el E1 tiene sólo uno, lo que conduce a que el elemento E2 tenga para las mallas indicadas el doble de puntos de integración. Para las simulaciones en el elemento 1 se ha considerado alternativamente una regla de flujo no-asociada.

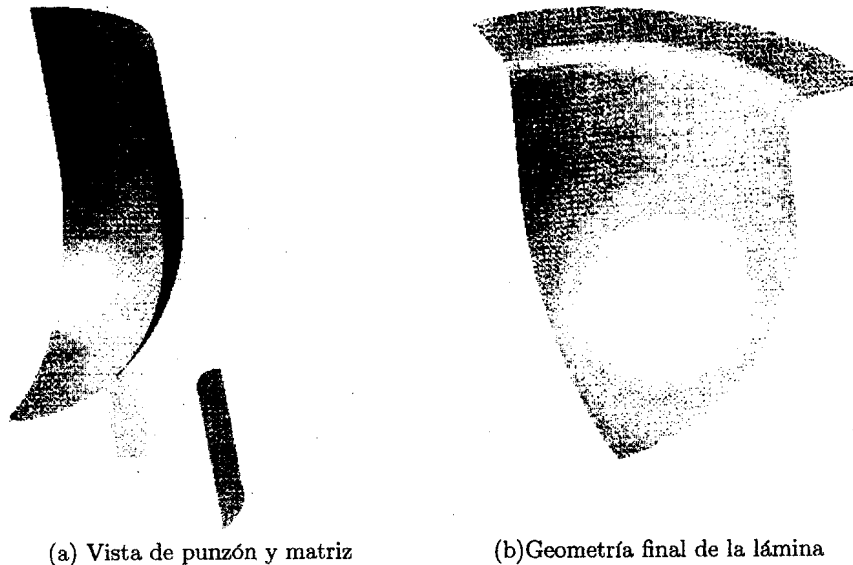


Figura 1: "benchmark" de NUMISHEET'99.

Los resultados presentados se asocian a tres meridianos distintos:

Sección A: en la dirección transversal al rolado

Sección B: a  $45^\circ$  de la dirección de rolado

Sección C: en la dirección de rolado

Los resultados numéricos se han comparado con un conjunto de resultados experimentales presentados por la empresa Krupp (quien propuso el "benchmark"). Debe hacerse notar que entre los datos enviados a NUMISHEET existió una gran dispersión entre los resultados experimentales por lo cual resulta difícil sacar conclusiones de una única comparación, sin embargo los valores experimentales de Krupp utilizados para comparación parecen ser los más confiables y permiten tener una idea de si el modelo numérico es razonable.

Como primer elemento de comparación a los fines de evaluar la anisotropía en el plano de la láminas son los desplazamientos "draw in" de los puntos extremos de cada meridiano, estos son:

Modelo	Draw in [mm]		
	Seccion A	Seccion B	Seccion C
E1-No Asociada	27.86	30.77	29.56
E1-Asociada	27.09	31.25	28.96
E2-Asociada	24.37	28.33	26.09
Experimental	30.75	32.30	30.00

Los resultados con E1 son muy cercanos a los experimentales, los obtenidos con el E-2 son significativamente más bajos (un 10%). El mayor desplazamiento se produce en el meridiano a

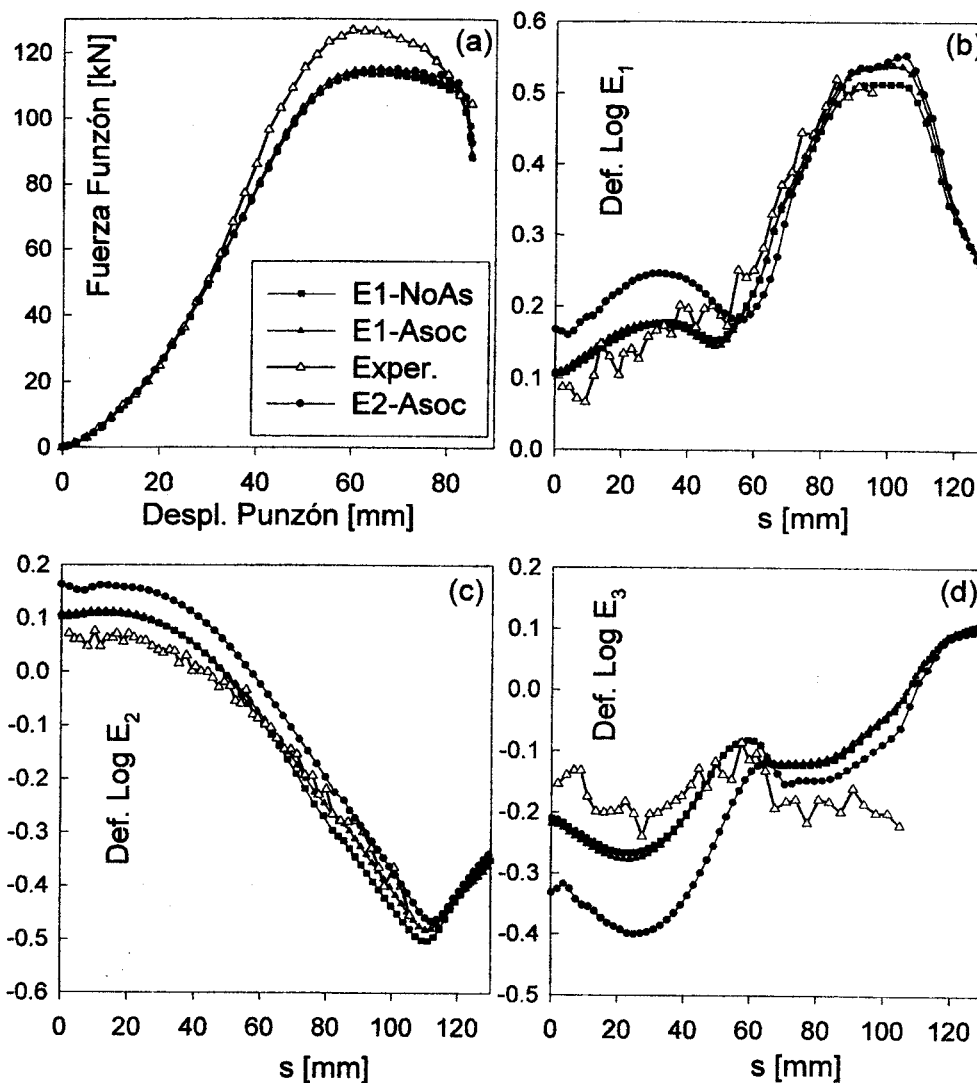


Figura 2: Resultados del benchmark de NUMISHEET. (a) Fuerza sobre el punzón vs. avance del mismo; (b) Deformación meridional  $\epsilon_1$  en la dirección transversal al rolado (meridiano "A"); (c) Deformación circunferencial  $\epsilon_2$  en la dirección a  $45^\circ$  del rolado (meridiano "C"); (d) Deformación en el espesor  $\epsilon_3$  en la dirección del rolado (meridiano "C");

$45^\circ$  ("B"). En los modelos numéricos el "draw-in" es mayor en el meridiano "C", que en el "A", en tanto que en los resultados de Krupp es al revés. Debe hacerse notar que los otros resultados experimentales presentados en NUMISHEET y la mayoría de las simulaciones numérica mostraban la misma tendencia que los resultados presentados aquí.

Resulta también importante notar que para la modelización es imprescindible tratar el material como transversalmente anisótropo, característica que mejora las características de embutición, y que si en este caso no se considera conduce a una pronta estricción del material.

La figura 2.a muestra la fuerza sobre el punzón en función del desplazamiento del mismo. En todos los casos las fuerzas son similares entre si y son menores que las experimentales. Esta diferencia es más marcada cuanto mayor es la deformación.

Los datos experimentales para comparación están asociados a la distribución de las tres deformaciones (logarítmicas) principales a lo largo de los tres meridianos de interés. Se han elegido para presentar aquí una deformación para cada meridiano. En la Figura 2.b se muestran las deformaciones en la dirección del meridiano, a lo largo del meridiano "A" (dirección transversal al rolado), en la Figura 2.c se muestra la deformación circunferencial a lo largo del meridiano "B" en tanto que en la Figura 2.d se han graficado las deformaciones en la dirección del espesor de la lamina a lo largo del meridiano "C" (dirección de rolado).

Las mediciones experimentales presentan un comportamiento oscilante difícil de aceptar, por lo cual debe inferirse que puntualmente los valores son poco confiables, pero si puede considerarse la tendencia promedio. En base a esto y a las mencionadas diferencias entre los distintos resultados experimentales puede decirse que los modelos numéricos predicen razonablemente bien el comportamiento del ensayo.

En la parte central de la lámina los resultados experimentales muestran deformaciones más bajas que las simulaciones numéricas. Podría decirse que experimentalmente la lámina embute más fácilmente que en la simulación. En la parte externa de la lámina las diferencias son menores, sin embargo se nota una fuerte diferencia en la deformación en el espesor. Experimentalmente las deformaciones en el espesor muestran un adelgazamiento bastante uniforme, lo que difiere de las simulaciones numéricas aquí presentadas y también de las simulaciones numéricas y otros resultados experimentales presentadas en NUMISHEET.

Finalmente resulta difícil inferir de los resultados aquí presentados cuales son las deficiencias de los modelos y que resulta necesario mejorar para predecir mejor el comportamiento, esto teniendo en cuenta además de la relación constitutiva, al resto de los errores numéricos que aparecen en la modelización asociados a la teoría de láminas, a las limitaciones de los elementos finitos utilizados, a la formulación del contacto, etc.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICET y la Agencia Córdoba Ciencia S.E.

## REFERENCIAS

- [1] Hill, R. *A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals*, Proc. Royal Society London, vol. A193, 1948, pag. 281
- [2] Flores F.G. y Oñate E. *A basic thin shell triangle with only translational DOFs for large strain plasticity*, Int. J. Num. Meths in Engng, vol. 51, 2001, págs. 57-83.
- [3] Flores F.G. , Oñate E. y Zárate F. *New assumed strain triangles for non-linear shell analysis*, Computational Mechanics, vol. 17, 1995, págs. 107-114.
- [4] Simo J.C. y Fox D.D., *On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., vol. 72, 1989, pags. 267-304.
- [5] STAMPACK, *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems*, Quantech ATZ, Barcelona, España, ver. 5.6, 2001.
- [6] NUMISHEET'99, *Fourth International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes* 13 al 19 de setiembre de 1999, Besancon, Francia