

## TEORÍA CONSTITUTIVA DE GRADIENTES PARA MODELOS MATERIALES ELASTOPLÁSTICOS

Guillermo Etse, Sonia M. Vrech  
Centro de Métodos Numéricos, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología  
Universidad Nacional de Tucumán, Avda. Independencia 1800,4000 San Miguel de  
Tucumán, Argentina  
e-mail: [getse@herrera.edu.ar](mailto:getse@herrera.edu.ar)

### RESUMEN

En este trabajo se presentan las ecuaciones más importantes de un modelo elastoplástico basado en la teoría de gradientes y del problema algebraico asociado, para la solución en incrementos de tensiones en el marco del método de los elementos finitos. La teoría de gradientes es una de las estrategias más exitosas para solucionar la ya conocida deficiencia de los modelos constitutivos clásicos basados en el concepto *smearred crack*, como la fuerte dependencia respecto de la malla en el comportamiento post-pico. Esta teoría ha sido recientemente propuesta por Aifantes y luego desarrollada por de Borst, Steinmann y otros. En este paper también se presentan y analizan las ecuaciones resultantes de la formulación de elementos finitos relacionadas con la aplicación de la teoría de gradientes a nivel constitutivo. Los resultados son el primer paso de un programa de simulaciones computacionales de modos de falla estáticos y dinámicos en estructuras y materiales que se lleva a cabo en la Universidad de Tucumán.

### ABSTRACT

In this work the relevant equations of a gradient theory-based elastoplastic constitutive model and of the related algebraic problem for the solution of the stress increment in the framework of the finite element method is presented. The gradient theory is one of the most successful strategy to bypass the well-known deficiency of the classical smeared cracked-based constitutive models, such as the strong mesh dependent of the post-peak behavior. This theory was recently proposed by Aifantes and further developed by de Borst, Steinmann among others. In this paper also the resulting equations of the finite element formulation related with the application of the gradient theory at the constitutive level are presented and analyzed. The results here are the first step for a consistent research program on computational simulations of static and dynamic localized failure modes in material and structures at the University of Tucuman.

### 1.INTRODUCCIÓN

La observación del comportamiento mecánico y de la falla de varios materiales revela el fenómeno de la **localización**, acompañado de fuertes no linealidades que inducen al **ablandamiento** o *softening*. Para simularlo computacionalmente, se hace necesario evaluar el comportamiento post-pico con teorías y métodos numéricos capaces de reproducirlo. En los modelos constitutivos clásicos o "locales", formulados en el marco teórico del concepto

*smearred crack*, el ablandamiento es descrito mediante relaciones directas entre tensiones y deformaciones en el mismo punto del continuo donde se las evalúa. Como consecuencia, se plantea la fuerte sensibilidad de los resultados respecto a la discretización de la malla y la pérdida del sentido físico de las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio que los gobiernan al comienzo del comportamiento de ablandamiento.

Para eliminar estas deficiencias se utilizan las **teorías de regularización** del comportamiento post-pico. Uno de los más prominentes y novedosos en este sentido es la teoría de gradientes, que utiliza gradientes superiores de deformaciones para crear interacciones espaciales y "suavizar" discontinuidades, de forma tal que las deformaciones permanezcan continuas.

En este trabajo se establecen las bases numéricas de un modelo constitutivo elastoplástico formulado sobre la base de la teoría de gradientes de deformaciones. En ese sentido se obtienen las ecuaciones resultantes de elementos finitos, cuyas formulaciones son fuertemente afectadas en el caso de la teoría de gradientes.

## 2. CONCEPTOS BÁSICOS

Para obtener una mejor representación de la respuesta del continuo en los modelos con ablandamiento se deben regularizar las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio mediante la incorporación de una longitud característica  $l$  en las relaciones constitutivas tensiones-deformaciones de tal forma de "espacializar" la localidad intrínseca de dichas ecuaciones.

Los gradientes de orden superior, planteados originalmente en el marco de la teoría del flujo de la plasticidad, fueron incorporados en la función de fluencia en los trabajos pioneros de ZBIB y AIFANTIS [1] y MÜHLHAUS y AIFANTIS [2].

La función de fluencia en la teoría de gradientes toma la forma

$$F(\kappa, \nabla^2 \kappa) = \phi(\sigma) - \bar{\sigma}_g(\kappa, \nabla^2 \kappa) = 0, \quad (2.1)$$

siendo  $\kappa$  un invariante de la deformación plástica. La tensión de fluencia es ahora dependiente del gradiente de dicho invariante

$$\bar{\sigma}_g = \bar{\sigma}(\kappa) + g \nabla^2 \kappa. \quad (2.2)$$

El módulo de gradiente  $g$  es un coeficiente positivo con la dimensión de una fuerza. El término de gradiente desaparece para estados de tensiones y deformaciones homogéneos. También es despreciable cuando las deformaciones varían suavemente (régimen de pre-pico), pero su influencia es significativa en la localización de las deformaciones.

### 2.1.1 Solución analítica para el caso uniaxial

Analizando el ejemplo uniaxial de una barra traccionada [5], la deformación plástica no local  $\bar{\varepsilon}^p$  se calcula como el promedio de las deformaciones plásticas locales en una cierta longitud  $l$ , siendo ésta la longitud característica del material [7].

$$\bar{\varepsilon}^p(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \varepsilon^p(x+s) ds \quad (2.3)$$

Desarrollando la función  $\varepsilon^p(x+s)$  en Serie de Taylor alrededor de  $s=0$

$$\bar{\varepsilon}^p(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l [\varepsilon^p + (\varepsilon^p)'s + \frac{1}{2}(\varepsilon^p)''s^2 + \dots] ds =$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{2l} [\varepsilon^p s + (\varepsilon^p)' s^2 + \frac{1}{6} (\varepsilon^p)'' s^3]_{-l}^l \\ &\approx \frac{1}{2l} \varepsilon^p 2l + \frac{1}{2l} (\varepsilon^p)' \frac{1}{2} (l^2 - l^2) + \frac{1}{2l} \frac{1}{6} (\varepsilon^p)'' (l^3 + l^3) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\bar{\varepsilon}^p(x) \approx \varepsilon^p + (\varepsilon^p)'' \frac{l^2}{6}$$

La función de fluencia adopta ahora la forma

$$F(\kappa, \nabla^2 \kappa) = \phi(\sigma) - h(\kappa + \nabla^2 \kappa \frac{l^2}{6}). \quad (2.5)$$

Con lo que el coeficiente de gradiente  $g$  resulta

$$g = |h| \frac{l^2}{6}. \quad (2.6)$$

Que simplifcadamente se adoptara como  $g = |h| l^2$ .

### 2.1.2 Consecuencias de la dependencia del gradiente

Considerando la relación incremental

$$\dot{\kappa} = \eta \dot{\lambda}, \quad (2.7)$$

la ley de ablandamiento no lineal (2.2) puede escribirse

$$\bar{\sigma}_g = \bar{\sigma}(\kappa) + \frac{g(\kappa)}{\eta} \nabla^2 \kappa, \quad (2.8)$$

donde  $\bar{\sigma}(\kappa)$  representa la regla de ablandamiento clásica y  $\eta$  una constante positiva (Criterio de VON MISES,  $\eta=1$ ).

El módulo de ablandamiento  $h$  será entonces

$$h = \eta \frac{\partial \bar{\sigma}_g}{\partial \kappa} = \eta \bar{\sigma}'(\kappa) - g \nabla^2 \kappa, \quad (2.9)$$

donde el Laplaciano se considera una variable independiente en la diferenciación.

La relación entre  $g$ , la longitud interna  $l$  obtenida para el caso unidimensional y el módulo de endurecimiento o ablandamiento clásico  $\bar{\sigma}'(\kappa)$  es

$$g(\kappa) = -\eta l^2 \bar{\sigma}'(\kappa), \quad (2.10)$$

La ley de ablandamiento dependiente del gradiente

$$\bar{\sigma}_g(\kappa, \nabla^2 \kappa) = \bar{\sigma}(\kappa) + l^2 \bar{\sigma}'(\kappa) \nabla^2 \kappa, \quad (2.11)$$

refleja la disminución de la influencia del gradiente con el incremento de la deformación plástica acumulada, durante el daño progresivo del material.

### 3. ESTABILIDAD, CONTINUIDAD Y SENSITIVIDAD RESPECTO A LA MALLA

Considerando la función de fluencia (2.5) y la condición de consistencia representada por la ecuación diferencial

$$\dot{F} = \mathbf{n}^T \dot{\sigma} - h \dot{\lambda} + g \nabla^2 \dot{\kappa} = 0, \quad (3.1)$$

procedemos a obtener  $\dot{\lambda}$  y mediante resolución posterior de la ecuación constitutiva

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} \dot{\varepsilon}, \quad (3.2)$$

obtenemos finalmente, pasos algebraicos mediante,

$$\dot{\sigma} = \left[ \mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e \mathbf{m} \mathbf{n}^T \mathbf{D}^e}{h + \mathbf{n}^T \mathbf{D}^e \mathbf{m}} \right] \left( \dot{\varepsilon} - \frac{g}{h} \nabla^2 \dot{\kappa} \mathbf{m} \right). \quad (3.3)$$

La relación tensión-deformación elastoplástica modificada puede escribirse alternativamente como

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}^{ep} \dot{\varepsilon} + g \nabla^2 \dot{\kappa}, \quad (3.4)$$

con la matriz de rigidez tangente continua "clásica"  $\mathbf{D}^{ep}$  y el vector  $\mathbf{g}$  definidos de la forma [5]

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e \mathbf{m} \mathbf{n}^T \mathbf{D}^e}{h + \mathbf{n}^T \mathbf{D}^e \mathbf{m}}, \quad \mathbf{g} = -g \frac{\mathbf{D}^e \mathbf{m}}{h + \mathbf{n}^T \mathbf{D}^e \mathbf{m}}. \quad (3.5)$$

#### 3.1 Continuidad-Elipticidad

Considerando la posibilidad de la aparición de una discontinuidad a lo largo de un plano de normal  $\mathbf{v}_i$ , la que además de un salto en el campo de gradiente de velocidades (tasas de deformación) involucra un salto en el gradiente de segundo orden de velocidades plásticas equivalentes [6], el primer salto se puede representar con la ecuación

$$\|\varepsilon_{ij}\| = \frac{1}{2} (v_j u_i + v_i u_j). \quad (3.6)$$

y el segundo con:

$$\|\nabla^2 \dot{\kappa}\| = v_k \alpha_k, \quad (3.7)$$

con el vector  $\alpha_k$  arbitrario. Usando la condición de equilibrio

$$\|t_j\| = v_i \|\dot{\sigma}_{ij}\| = 0, \quad (3.8)$$

que requiere la continuidad de la tracciones a lo largo del plano de discontinuidad, la relación elastoplástica constitutiva (3.2) escrita en forma indicial es

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + g_{ij} \nabla^2 \dot{\kappa}, \quad (3.9)$$

y puede ser escrita

$$\|t_j\| = v_i \|\dot{\sigma}_{ij}\| = (v_i D_{ijkl} v_l) \mu_k + (v_i g_{ij} v_k) \alpha_k = 0. \quad (3.10)$$

La aparición de una discontinuidad sólo es posible si, para  $u_k$  y  $\alpha_k$  arbitrarios, ambos términos de (3.10) se anulan simultáneamente. Esto normalmente no ocurre, excepto para algunas estructuras especiales del operador constitutivo. Como la violación de las ecuaciones:

$$\|u_{i,j}\| = u_{i,j}^+ + u_{i,j}^- \neq 0, \quad (3.11)$$

y (3.8) garantiza la elipticidad fuerte de las ecuaciones que gobiernan el problema estático considerado, se concluye que la dependencia del gradiente ha regularizado el problema, evitando la localización en un área de medida cero, lo cual matemáticamente corresponde a la bifurcación discontinua y consiguiente hiperbolicidad de las ecuaciones diferenciales.

En este caso el valor crítico del módulo de endurecimiento y la dirección de localización también pueden determinarse a partir de la condición clásica de singularidad del tensor acústico.

### 3.2 Sensitividad respecto a la malla

Se considera como ejemplo el caso de una barra traccionada discretizada en  $m$  elementos. Se adopta el modelo de plasticidad de ablandamiento uniaxial y se desea conocer la distribución de tensiones y deformaciones y la respuesta global en términos de tensiones y promedio de deformaciones  $\bar{\epsilon}$ , calculadas como el desplazamiento del extremo derecho sobre la longitud inicial.

Dando a todos los elementos iguales dimensiones y propiedades del material constitutivo, se deforman uniformemente en la etapa elástica. Sin embargo, después de la carga pico, el operador tangente del modelo de elementos finitos posee autovalores negativos introducidos por las matrices de rigidez tangentes, y la solución se vuelve inestable. En este estado, cualquier variación puede causar una solución más crítica, en la que sólo parte de la barra presenta ablandamiento.

Cuando las deformaciones plásticas se concentren en una menor cantidad de elementos, será menor la cantidad de energía que se disipará durante la falla, y el resto de los elementos descargará elásticamente. La solución puede inducirse haciendo que un elemento sea más débil que el resto y la deformación se localice en él. Para diferentes discretizaciones, la inclinación de la rama post-pico del diagrama  $\sigma - \bar{\epsilon}$  depende claramente del número de elementos  $m$ , como se observa en la Figura 1. Si éste tiende a infinito, la rama post-pico del diagrama de respuesta, tiende a volver sobre la rama elástica. Esto es físicamente inaceptable, ya que la falla total se desarrollaría sin disipación de energía.

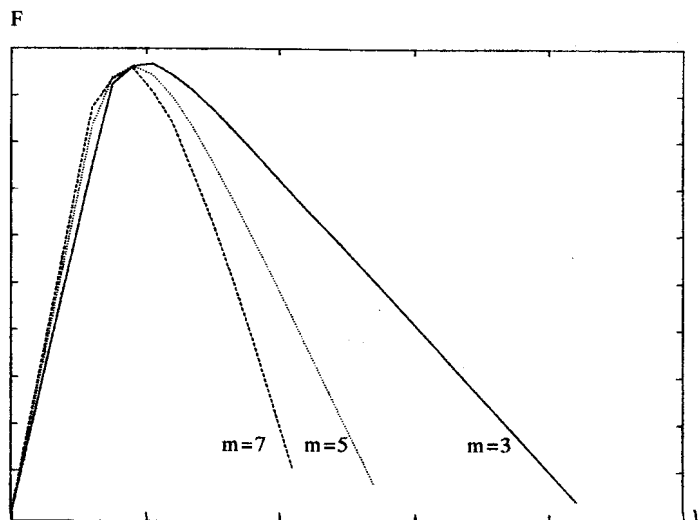


Figura 1: Diagrama Fuerza-Desplazamiento para 3 discretizaciones diferentes

El campo de deformaciones para plasticidad clásica o local viene dado por

$$\bar{\varepsilon}^p = \frac{\bar{u}}{L} = \varepsilon^e + \frac{1}{m} \varepsilon^p \quad (3.12)$$

Este campo presentara, en el caso del problema de la barra traccionada indicado, fuertes gradientes de deformaciones plásticas en los bordes del único elemento plastificado. Por el contrario, en el caso de la teoría de gradientes, los saltos o gradientes que se registran en los bordes del elemento plastificado, modificarán la tensión de comparación  $\bar{\sigma}_e$  (Eq.2.2) haciendo que los elementos adyacentes entren también en regimen plástico. En otras palabras, la teoría de gradientes produce una regularización y distribución de la plastificación en un dominio mayor al del elemento finito donde originariamente se localizaba la deformación, actuando así como un limitador de localizaciones.

Esto lo vemos en detalle. En el caso de la teoría de gradientes, la condición de fluencia dependiente del gradiente de deformaciones plásticas es

$$\sigma = \sigma_y + h\varepsilon^p + hl^2 \varepsilon^{p''} \quad (3.13)$$

y representa una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden

$$hl^2 \varepsilon^{p''} + \varepsilon^p = \frac{\sigma - \sigma_y}{h} \quad (3.14)$$

Asumiendo las condiciones de borde  $\varepsilon^p = 0$  para  $x = \pm w/2$ , simetría respecto de  $x=0$  y localizando las deformaciones plásticas en una longitud  $w$  en el centro de la barra, la ecuación diferencial anterior puede resolverse respecto de la deformación plástica [3]y [4]

$$\varepsilon^p = \frac{\sigma - \sigma_y}{h} \left[ 1 - \frac{\cos(x/l)}{\cos(w/2l)} \right] \quad (3.15)$$

Solución que se representa en la Figura 2.

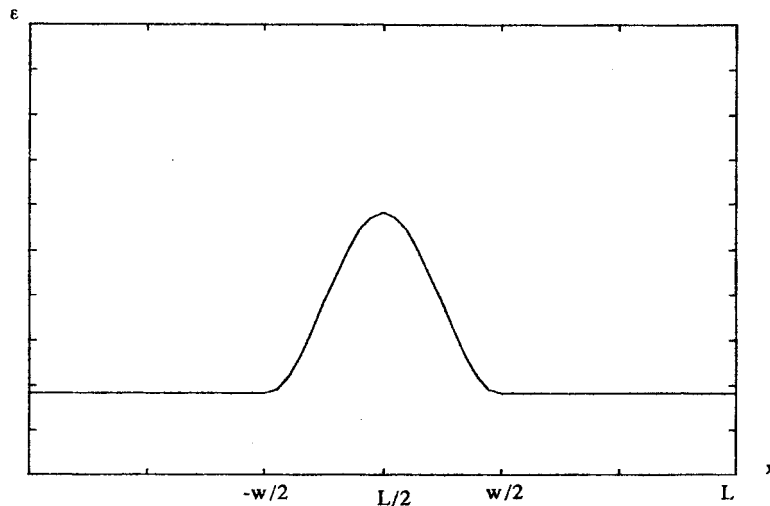


Figura 2: Campo de Deformaciones para Plasticidad con Gradientes

La relación entre la longitud característica y el ancho de la zona de localización está dado por

$$w = 2\pi l \quad (3.16)$$

y surge de considerar la condición  $\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial w} = 0$  en  $L/2$ .

Con esto queda demostrado que la solución es función de la relación entre la longitud característica  $l$  y la longitud  $L$  de la barra.

### 3.3 Solución algebraica en el marco del MEF

En esta sección se presenta el método para la solución algebraica del incremento de tensiones del modelo constitutivo elastoplástico de gradientes en el marco del Método de los Elementos Finitos [5] y [8]. Como se observará, esta particular teoría regularizante requiere de campos de interpolación de continuidad  $C^1$ , definidos con los polinomios Hermíticos, a fin de describir la aproximación del campo de variación del Multiplicador Plástico. Esta interpolación de orden superior se conjuga con otra de continuidad  $C^0$  para el campo de desplazamientos. Desde este punto de vista, la formulación de gradientes requiere de elementos finitos mixtos en los cuáles los campos incógnitas adicionales son interpolados mediante funciones de diferente orden y superior a los campos incógnitas clásicos.

En la Tabla 1 se plantea el procedimiento para la solución.

Para una iteración  $j$

1. Cálculo de  $\mathbf{K}_{aa}$ ,  $\mathbf{K}_{a\lambda}$ ,  $\mathbf{K}_{\lambda a}$ ,  $\mathbf{K}_{\lambda\lambda}$ ,  $\mathbf{f}_e$ ,  $\mathbf{f}_a$  y  $\mathbf{f}_\lambda$  de acuerdo con las ecuaciones (4.26) a (4.30).

2. Dado una componente  $a_i$  del vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a}$ , cálculo de  $d\mathbf{a}$  y  $d\Lambda$  utilizando el sistema de ecuaciones (4.25) y actualización de  $\Delta\mathbf{a}_j = \Delta\mathbf{a}_{j-1} + d\mathbf{a}$  y

$$\Delta\Lambda_j = \Delta\Lambda_{j-1} + d\Lambda.$$

3. Cálculo para cada punto de integración:

$$\Delta\varepsilon_j = \mathbf{B}\Delta\mathbf{a}_j,$$

$$\Delta\lambda_j = \mathbf{h}^T \Delta\Lambda_j,$$

$$\nabla^2(\Delta\lambda_j) = \mathbf{p}^T \Delta\Lambda_j,$$

$$\kappa_j = \kappa_0 + \eta\Delta\lambda_j,$$

$$\nabla^2\kappa_j = \nabla^2\kappa_0 + \eta\nabla^2\Delta\lambda_j, \quad (\eta = 1)$$

$$\sigma_t = \sigma_0 + \mathbf{D}^e \Delta\varepsilon_j \quad (\text{tensión trial}),$$

$$\text{si } F(\sigma_t, \kappa_j, \nabla^2\kappa_j) \geq \text{tolerancia},$$

$$\text{entonces es estado plástico: } \sigma_j = \sigma_t - \Delta\lambda_j \mathbf{D}^e \mathbf{m}_t,$$

$$\text{sino, es estado elástico: } \sigma_j = \sigma_t.$$

4. Verificación del criterio de convergencia global. Si no verifica, volver a 1.

### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado las ecuaciones básicas de la formulación constitutiva elastoplástica basada en la teoría de gradientes y las implicancias de su formulación numérica computacional en el marco de los elementos finitos. De gran interés y particularidad es la necesidad de trabajar con formulaciones de elementos finitos con campos de interpolación mixtos, para los campos de variables básicas y extendidas. Éstos permiten una regularización del comportamiento de ablandamiento y un tratamiento adecuado del problema de borde.

Estos desarrollos vienen siendo realizados en el programa de investigación que los autores llevan a cabo en la Universidad Nacional de Tucumán y constituyen la primera etapa de un proyecto amplio que incluye el desarrollo de un modelo constitutivo de gradientes para materiales cohesivos friccionales.

#### REFERENCIAS

- [1] Zbib H.M. y Aifantis E.C., *On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation*, I,II,III, Res Mechanica 23, 1988, págs. 261-277, 279-292, 293-305.
- [2] Mühlhaus H.B. y Aifantis E.C., *A variational principle for gradient plasticity*, Int.J.Solids Structures, 28, 1991, págs. 845-857.
- [3] De Borst R. y Mühlhaus H.B., *Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects*, Int.J.Num. Meth.Eng., 1991, págs. 521-539.
- [4] De Borst R., Mühlhaus H.B. y Pamin J., *A gradient continuum model for Mode-I fracture in concrete and rock*, Fracture Mechanics of Concrete Structures, Ed.Z.P.Bazant, Elsevier Applied Science, London and New York, 1992, págs. 251-259.
- [5] Pamin J., *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*, Delft University Press, 1994, págs. 10-13, 25-50.
- [6] Willam K.J. y Dietsche A., *Fundamental aspects of strain-softening descriptions*, Fracture Mechanics of Concrete Structures, Ed.Z.P.Bazant, Elsevier Applied Science, London and New York, 1990, págs. 227-230.
- [7] Wang, W., *Stationary and propagative instabilities in metals- a computational point of view*, Delft University Press, 1997, págs. 58-59.
- [8] Sluys L.J., *Wave propagation, localisation and dispersion in softening solid sand fracturee*, Cip-Gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag, 1992, págs. 86-89.