

ANALISIS DEL MODELO ELASTO-PLASTICO DE LADE-DUNCAN PARA MATERIALES NO-COHESIVOS

María D. Crespo
Escuela de Ingeniería Civil, Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, UNR
Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina
e-mail: mcrespo@fceia.unr.edu.ar

RESUMEN

Se presentan los resultados de la implementación computacional del modelo de plasticidad no-asociada de Lade-Duncan.

Como primer paso para la validación del modelo se simulan los ensayos triaxiales cúbicos realizados por Lade y Duncan a partir de la aplicación directa de la relación tensión-deformación incremental.

Se incorpora luego a un programa de cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos, para condiciones de tensiones axisimétricas y estados planos de deformaciones.

Se analiza la aplicabilidad del modelo para casos de deformación uniaxial, estado plano de deformaciones y de carga proporcional.

ABSTRACT

The results of the numerical implementation of the non-associated plasticity model by Lade and Duncan are presented.

As a first step for the validation of the model the cubical triaxial tests performed by Lade and Duncan are simulated.

The model is incorporated into a finite element code for axisymmetric and plane strain conditions.

The performance of the model for cases of uniaxial strain, plane strain and proportional loading is analyzed.

INTRODUCCION

Lade y Duncan [1] desarrollaron tanto un modelo de resistencia como un modelo elasto-plástico, para simular el comportamiento tensión-deformación de materiales no-cohesivos desde el estado elástico hasta la falla.

Utilizaron los resultados de los ensayos triaxiales cúbicos [2] y conceptos de elasticidad y plasticidad para desarrollar esta teoría, la cual incorpora un criterio de fluencia, una regla de flujo no-asociada y una regla empírica de endurecimiento por trabajo (work-hardening).

Este modelo permite tener en cuenta los efectos de las tensiones principales intermedias, de dilatación por corte y la dependencia del camino de cargas. Teóricamente es aplicable a condiciones de tensiones tridimensionales generales, pero los parámetros envueltos pueden derivarse de una serie de ensayos de compresión triaxiales.

En lo que sigue se describe la formulación del modelo y a continuación se muestran los resultados de la implementación.

EL MODELO DE LADE DUNCAN

Los incrementos de deformaciones totales $\{\delta\epsilon_{ij}\}$ son divididas en una componente elástica $\{\delta\epsilon_{ij}^e\}$ y una componente plástica, $\{\delta\epsilon_{ij}^p\}$ tal que:

$$\{\delta\epsilon_{ij}\} = \{\delta\epsilon_{ij}^e\} + \{\delta\epsilon_{ij}^p\} \quad (1)$$

Los incrementos de deformaciones elásticas se calculan con la ley de Hooke, usando el módulo de descarga-recarga definido por Duncan y Chang [3]:

$$E_w = K_w p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (2)$$

Los valores de las constantes adimensionales del módulo K_w , y el exponente n , se determinan a partir de ensayos de compresión triaxial ejecutados con distintos valores de la tensión de confinamiento σ_3 ; p_a es la presión atmosférica expresada en las mismas unidades que E_w y σ_3 .

Lade y Duncan asumieron el valor del coeficiente de Poisson igual a cero porque observaron que las deformaciones axiales y volumétricas eran muy parecidas en los ensayos de compresión triaxial para el primer incremento de carga.

La *superficie de falla* en función del primer y tercer invariante del tensor de tensiones queda:

$$f_f = I_1^3 - \kappa_1 I_3 = 0 \quad (3)$$

Las *superficies de carga* f_l toman una forma similar,

$$f_l = I_1^3 - \kappa I_3 = 0 \quad (4)$$

o en función de los invariantes del tensor desviador:

$$f_l = I_1^3 - \kappa \left(W_p \right) \left(\frac{1}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 J_2 + J_3 \right) = 0 \quad (5)$$

donde $\kappa = I_1^3 / I_3$ es el valor del *nivel de tensiones corriente* y varía desde 27 para condición de tensiones hidrostáticas ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) hasta el valor de κ_1 en la falla.

La *función de potencial plástico* se expresa como:

$$g = I_1^3 - \kappa_2 I_3 \quad \text{ó} \quad g = I_1^3 - \kappa_2 \left(\frac{1}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 J_2 + J_3 \right) \quad (6)$$

La *regla de flujo* se deriva de acuerdo a la expresión:

$$\Delta\epsilon_{ij}^p = \Delta\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7)$$

En estas relaciones, el valor de κ_2 determina las magnitudes relativas de los incrementos de deformaciones plásticas, y el valor de $\Delta\lambda$ determina sus magnitudes absolutas.

$$\kappa_2 = A\kappa + 27(1 - A) \quad (8)$$

donde A es una constante experimental.

$$\Delta\lambda = \frac{dW_p}{3g} \quad (9)$$

dW_p es el incremento en el trabajo plástico debido a un incremento en el nivel de tensiones $d\kappa$, se determina a partir de la relación hiperbólica entre W_p y κ :

$$(\kappa - \kappa_i) = \frac{W_p}{a + dW_p} \quad (10)$$

en la que κ_i es un nivel de tensiones umbral, por debajo del cual no se producen deformaciones plásticas.

Los parámetros a y d se fijan usando el procedimiento puntualizado por Duncan y Chang [3].

$$a = M \cdot p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^l \quad d = \frac{r_f}{(\kappa_1 - \kappa_i)} = \frac{1}{(\kappa - \kappa_i)_{ult}} \quad (11) \text{ y } (12)$$

Basado en la Ec. (10), el incremento del trabajo plástico se expresa como:

$$dW_p = \frac{a \cdot d\kappa}{\left(1 - r_f \frac{\kappa - \kappa_i}{\kappa_1 - \kappa_i} \right)^2} \quad (13)$$

κ = valor del nivel de tensiones corriente; $d\kappa (\geq 0)$ = diferencia entre dos niveles de tensiones sucesivos.

Tabla I Parámetros experimentales para arena densa y suelta Monterey N°0.

Parámetro	Arena densa	Arena suelta
κ_i	103	58
κ_1	40	33
Λ	0.44	0.39
r_f	0.957	0.97
M	2.55×10^{-4}	6.80×10^{-4}
l	1.32	1.17
K_w	2300	1600
n	0.80	0.86
v_i	0.0	0.

IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL

La forma general de las relaciones constitutivas elasto-plásticas para plasticidad con endurecimiento es la siguiente [4]

$$d\sigma_{ij} = \left[C_{ijkl} - \frac{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}} C_{ijrs} C_{mnl}}{H' + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abcd} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{cd}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right] d\epsilon_{kl} \quad (14)$$

$d\sigma_{ij}$: vector incremento de tensiones
 $d\epsilon_{ij}$: vector incremento de deformaciones
 C_{ijkl} : tensor constitutivo elástico

F : función de carga
 g : función de potencial plástico
 H' : módulo de endurecimiento

La Ec. (14) puede escribirse simplificada como:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (15)$$

donde C_{ijkl}^{ep} es el tensor constitutivo elasto-plástico dado por:

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{H} H_{ij}^* H_{kl} \quad (16)$$

en el cual

$$H = 3AL(3\lambda + 2\mu) + 2B\mu(2MJ_2 + 3NJ_3) + 2C\mu(3MJ_3 + Ns_{ik}s_{ij}s_{ij} - \frac{4}{3}NJ_2^2) + H' \quad (17.a)$$

$$H_{ij} = A(3\lambda + 2\mu)\delta_{ij} + 2\mu Bs_{ij} + 2\mu Ct_{ij} \quad (17.b)$$

$$H_{ij}^* = L(3\lambda + 2\mu)\delta_{ij} + 2\mu Ms_{ij} + 2\mu Nt_{ij} \quad (17.c)$$

donde δ_{ij} : tensor delta de Kronecker; $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$: tensor de tensiones deviatorico; p es el valor de la tensión media: $p = \frac{1}{3}I_1$.

J_2 y J_3 son el segundo y tercer invariante del tensor deviatorico y se calculan a partir de: $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$

y $J_3 = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki}$, $t_{ij} = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}}$, resulta: $t_{ij} = s_{ik}s_{kj} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij}$

El tensor constitutivo elástico, en función de las constantes de Lamé λ y μ toma la forma:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (18)$$

Los coeficientes de rigidez A, B, C, L, M y N [4], toman la forma:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f}{\partial I_1} = 3I_1^2 - \kappa(W_p) \left(\frac{1}{9}I_1^2 - \frac{1}{3}J_2 \right) & L &= \frac{\partial g}{\partial I_1} = 3I_1^2 - \kappa_2 \left(\frac{1}{9}I_1^2 - \frac{1}{3}J_2 \right) \\ B &= \frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{1}{3}\kappa(W_p)I_1 & M &= \frac{\partial g}{\partial J_2} = \frac{1}{3}\kappa_2 I_1 \\ C &= \frac{\partial f}{\partial J_3} = -\kappa(W_p) & N &= \frac{\partial g}{\partial J_3} = -\kappa_2 \end{aligned} \quad (19)$$

El módulo de endurecimiento H' , en la Ec. (14) para un modelo con endurecimiento por trabajo se expresa por [4] $H' = -\frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{dW_p} \sigma_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$, donde $\frac{\partial f}{\partial \kappa} = -\left(\frac{1}{27}I_1^3 - \frac{1}{3}I_1J_2 + J_3\right)$ y $\frac{d\kappa}{dW_p}$ se obtiene

de la Ec. (13), $\frac{d\kappa}{dW_p} = \frac{1}{a} [1 - d(\kappa - \kappa_0)]^2$.

Como la función de potencial plástico es una función homogénea de tercer grado, $\sigma_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 3g$. Finalmente se obtiene H' en la forma:

$$H' = \frac{3g}{a} [1 - d(\kappa - \kappa_c)]^2 \left(\frac{1}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 J_2 + J_3 \right) \quad (20)$$

Cálculo de las deformaciones por aplicación directa de la relación incremental

Cuando los datos del problema son las tensiones y las incógnitas las deformaciones, se puede hacer un análisis directo, por aplicación de la forma inversa de la Ec. (15), que resulta

$$d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^{ep-1} d\sigma_{kl} \quad (21)$$

en la que C_{ijkl}^{ep-1} es la inversa del tensor elasto-plástico.

Los ensayos triaxiales cúbicos

En los ensayos triaxiales cúbicos se incrementan las tensiones principales mayor e intermedia (σ_1 y σ_2) en forma proporcional, manteniendo constante la tensión principal menor (σ_3) y se miden las deformaciones. La relación entre las tensiones está dada por el parámetro $b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$ que se mantiene

constante y varía entre 0 (compresión triaxial) y 1 (extensión triaxial). El estado de tensiones es tridimensional, por lo que el tensor elasto-plástico se expresa en la forma general de la Ec. (16).

Para compresión triaxial ($b=0$), las curvas tensión-deformación calculadas coinciden muy bien con las medidas (Fig. 1). Para otros valores de b , los cambios de volumen calculados son inicialmente más compresivos que los medidos, mientras las razones de dilatación ($-\Delta\varepsilon_v/\Delta\varepsilon_1$) calculadas para niveles altos de tensiones resultan mayores que las observadas.

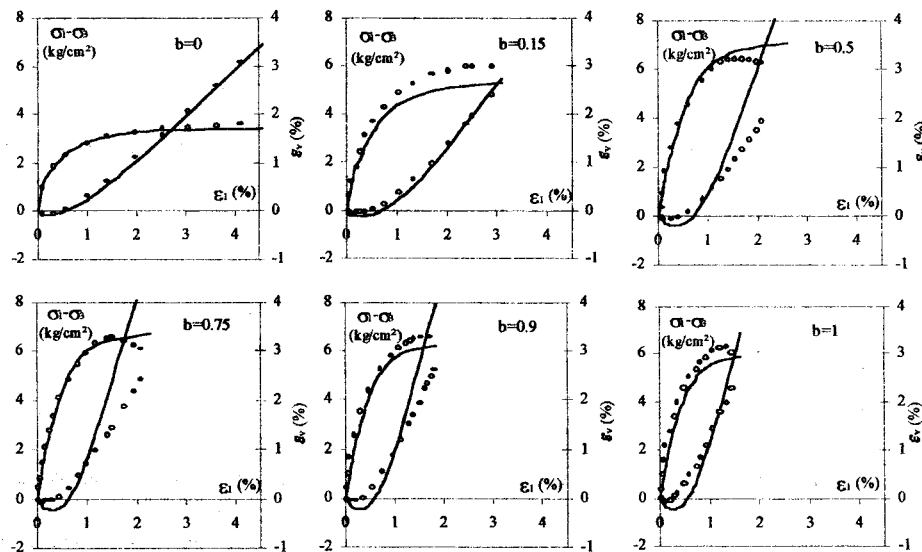


Figura 1: Comportamiento tensión-deformación y cambio de volumen calculado y medido para los ensayos triaxiales cúbicos de la arena densa Monterey N° 0.

Se estimó que el motivo por el cual los cambios de volumen calculados son inicialmente más compresivos que los medidos, podía deberse a la suposición del coeficiente de Poisson nulo, por lo que

se procesó nuevamente suponiendo un coeficiente de Poisson $\nu=0.1$ y $\nu=0.2$. En la Figura 2 se muestra la comparación de resultados para relaciones $b=0$ (compresión triaxial) y $b=0.5$.

Las curvas para las deformaciones volumétricas con $\nu=0.2$ son en ambos casos más dilatantes, no varían mucho para la compresión axial y para el caso $b=0.5$ hay mayor diferencia, pero a niveles bajos de tensiones se aproximan mejor a los resultados experimentales.

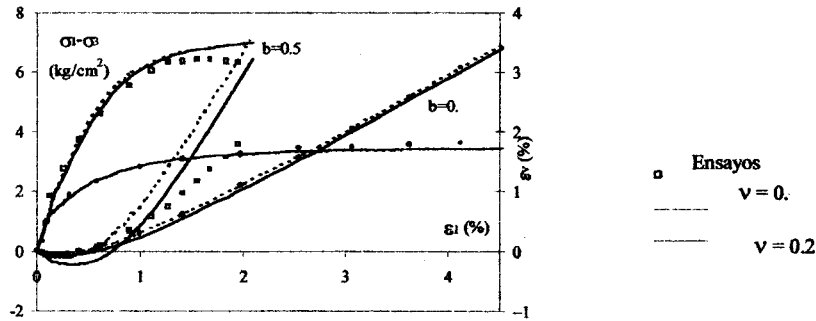


Figura 2: Comparación de resultados para $\nu=0$ y $\nu=0.2$ para compresión triaxial ($b=0$.) y $b=0.5$ (Arena densa)

Deformación uniaxial

Para este caso vale $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$ [4]. La relación tensión-deformación elasto-plástica se reduce a [4]:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda + 2\mu - \frac{1}{H} H_{11}^* H_{11} \\ \lambda - \frac{1}{H} H_{22}^* H_{11} \\ \lambda - \frac{1}{H} H_{33}^* H_{11} \end{Bmatrix} \{d\varepsilon_{11}\} \quad (22)$$

Se estudió el caso en que se aumentan las tensiones verticales en 20 escalones de carga desde un valor nulo. En la Figura 3 se muestran las curvas tensión deformación para $\nu=0.2$ y $\nu=0.25$.

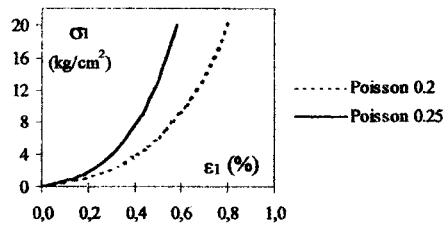


Figura 3: Deformación uniaxial. Relación σ - ε para arena suelta Monterey N°0. 20 incrementos de carga.

El nivel de tensiones resulta $\kappa = \frac{(1+\nu)^3}{(1-\nu)\nu^2}$, que es independiente de las tensiones, por lo que el estado de deformación uniaxial es un caso de carga neutra, es decir que se comporta elásticamente.

Se puede observar que si se toma un coeficiente de Poisson $\nu=0$ (como lo sugieren Lade y Duncan), el nivel de tensiones resulta "infinito", por lo que el material estaría en falla.

Estudio por elementos finitos de estados planos de deformaciones y axisimétricos

Se incorporó el modelo a un programa de cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos [5], implementándose para elementos isoparamétricos de nodos variables de cuatro a ocho en condiciones axisimétricas y estados planos de deformaciones [6], [7].

La expresión de la matriz elasto-plástica para estado plano de deformaciones y axisimetría resulta:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu - \frac{1}{H} H_{11}^* H_{11} & \lambda - \frac{1}{H} H_{11}^* H_{22} & -\frac{1}{H} H_{11}^* H_{12} & \lambda - \frac{1}{H} H_{11}^* H_{33} \\ \lambda - \frac{1}{H} H_{22}^* H_{11} & \lambda + 2\mu - \frac{1}{H} H_{22}^* H_{22} & -\frac{1}{H} H_{22}^* H_{12} & \lambda - \frac{1}{H} H_{22}^* H_{33} \\ -\frac{1}{H} H_{12}^* H_{11} & -\frac{1}{H} H_{12}^* H_{22} & \mu - \frac{1}{H} H_{12}^* H_{12} & -\frac{1}{H} H_{12}^* H_{33} \\ \lambda - \frac{1}{H} H_{33}^* H_{11} & \lambda - \frac{1}{H} H_{33}^* H_{22} & -\frac{1}{H} H_{33}^* H_{12} & \lambda + 2\mu - \frac{1}{H} H_{33}^* H_{33} \end{bmatrix}$$

Caso axisimétrico : ensayo de compresión triaxial

Se idealizaron los ensayos de compresión triaxial y se obtuvieron buenos resultados para la arena Monterey N° 0 con dos relaciones de vacíos diferentes.

Estado plano de deformaciones

Se idealizó el ensayo de estado plano de deformaciones con una presión de confinamiento inicial de $\sigma_0 = -0.6 \text{ kg/cm}^2$ y se aumentó la tensión vertical en 20 escalones de carga.

Se procesó con coeficiente de Poisson $\nu=0$, y $\nu=0.2$ y se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 4. La relación entre las deformaciones principales vertical (ε_1) y horizontal (ε_3) es bastante buena, como así también $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$. No se disponen de gráficas para comparar la relación entre las tensiones y deformaciones, el único dato que figura en el trabajo de Lade y Duncan [2] es que el parámetro b (que no se mantiene constante) resultó 0,34 en la falla y numéricamente se llega a un parámetro $b_f = 0.20$, lo que indicaría que las tensiones en la dirección normal al plano estarían subestimadas.

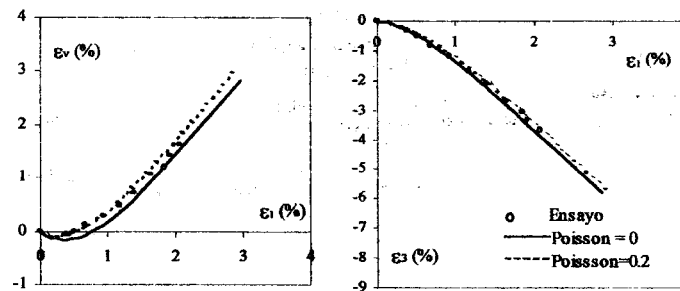


Figura 4: Estado plano de deformaciones con $\sigma_0 = -0.6 \text{ kg/cm}^2$. Arena densa Monterey N° 0.

Carga proporcional

En un trabajo posterior Lade y Duncan [8] realizaron un ensayo de carga proporcional; sometieron una probeta de arena suelta Monterey N° 0 a un estado de tensiones iniciales $\sigma_1 = -0.4 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -0.2 \text{ kg/cm}^2$ y mantuvieron la proporcionalidad entre las tensiones ($\sigma_1 = 2\sigma_2$) hasta $\sigma_1 = -1.8$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -0.9$.

Se realizó el mismo estudio para dos coeficientes de Poisson $\nu=0$, y $\nu=0.2$. En la Figura 5 se muestra la comparación de resultados.

El nivel de tensiones para arena suelta es $\kappa = 32 < \kappa_c = 33$, donde κ_c es el nivel de tensiones umbral, por debajo del cual las tensiones serían elásticas.

Del análisis de la Figura 5 se puede inferir que el problema de carga proporcional es muy sensible al valor del coeficiente de Poisson. Los resultados para $\nu=0.2$ concuerdan mejor con los resultados de ensayos en lo que se refiere a las deformaciones volumétricas, no así a la relación tensión-deformación.

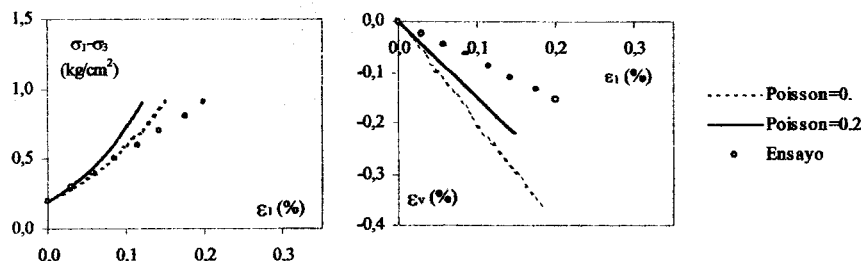


Figura 5: Ensayo de carga proporcional para arena suelta Monterey N° 0.

CONCLUSIONES

- *Los resultados hallados mediante el modelo concuerdan bien para los ensayos triaxiales cúbicos.
- *Los resultados de los ensayos triaxiales cúbicos son poco sensibles al valor del coeficiente de Poisson..
- *Se simula correctamente el ensayo de compresión triaxial por elementos finitos.
- *Para el ensayo de estado plano de deformaciones las deformaciones halladas concuerdan bastante bien con las obtenidas mediante ensayos, pero la relación b en la falla ($=0.20$) difiere mucho de la obtenida mediante ensayos ($=0.34$).
- *El problema de deformación uniaxial es fuertemente dependiente del coeficiente de Poisson adoptado. No se puede suponer coeficiente de Poisson nulo pues el material se encontraría en falla.
- *En el ensayo de carga proporcional se obtienen grandes diferencias, las que podrían deberse al hecho de suponer coeficiente de Poisson nulo o un módulo de elasticidad incorrecto.

REFERENCIAS

- [1] Lade, P.V. and Duncan, J. M., 1975. "Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil". *Journal Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 101(GT10):1037-1053.
- [2] Lade, P.V. and Duncan, J.M., 1973. "Cubical Triaxial Tests on Cohesionless Soil". *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 99 (SM10): 793-812.
- [3] Duncan, J.M. and Chang, C.Y., Sept. 1970. "Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 96, SMS, Proc. Paper 7513.
- [4] Chen, W.F. and Mizuno, E., 1990. NON LINEAR ANALYSIS IN SOIL MECHANICS: Theory and Implementation, Elsevier, Amsterdam.
- [5] Orengo, J.R., 1990. *Modelisation numerique des structures en beton arme*, tesis presentada para obtener el grado de Docteur de L'Ecole National des Ponts et Chaussees, Paris.
- [6] Bathe, K.J., 1982. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall.
- [7] Crespo, M.D., 1989. *Manual de utilización del programa de Elementos Finitos para Cálculo de Estructuras NORM*. Esc. Ing. Civil. Fac. Ciencias Exactas e Ingeniería. U.N.R.
- [8] Lade, P.V. and Duncan, J. M., 1976. "Stress-path dependent behavior of cohesionless soil". *Journal Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 102, 51.