

## **ELEMENTOS FINITOS PARA EL ANÁLISIS DE SÓLIDOS ANISÓTROPOS CON GRANDES DEFORMACIONES PLÁSTICAS**

**Fernando G. Flores**

Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba,  
Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina  
e-mail: fflores@efn.uncor.edu

### **ABSTRACT**

A finite element formulation for the analysis of solids under large plastic strains is presented. It is aimed to the simulation of anisotropic metal forming in an explicit dynamic code. A total Lagrangean formulation is employed with logarithmic strains. A couple of benchmark tests are shown for assessment.

### **RESUMEN**

En este trabajo se presenta la formulación de un elemento finito para el análisis de sólidos con grandes deformaciones plásticas. Está orientado a la simulación de conformado de metales anisótropos dentro de un código dinámico explícito. Se utiliza una Formulación Lagrangeana Total y deformaciones logarítmicas. Se muestran dos ejemplos para evaluación.

### **INTRODUCCIÓN**

Gran cantidad de materiales de uso común en ingeniería presentan un comportamiento anisótropo. Esta anisotropía puede estar asociada al comportamiento elástico y/o plástico. Naturalmente un material con comportamiento elástico anisótropo presenta un comportamiento plástico también anisótropo. Típicamente los materiales composites cuando se los analiza desde un punto de vista macroscópico. Por otro lado materiales cuyo comportamiento elástico puede considerarse isotrópico, presentan una fuerte anisotropía en el campo plástico. Un caso típico corresponde a las láminas metálicas fabricadas por rolado.

La caracterización de los materiales anisótropos, particularmente los ortótropos, se realiza en base a los ejes principales de ortotropía del material, en base a ensayos simples.

La simulación de procesos con estos materiales en el campo de las grandes transformaciones, asociadas a grandes rotaciones y/o grandes deformaciones plásticas, requiere por la naturaleza anisótropa del material seguir detalladamente la posición que ocupan las fibras materiales respecto a las cuales se ha caracterizado el material en los ensayos.

Ante tales condiciones parece natural la utilización de una formulación Lagrangeana total (FLT) que refiere las medidas de tensión y deformación a las fibras asociadas a la geometría original. Esto no es estrictamente imprescindible ya que siempre es posible expresar mediante adecuadas transformaciones tensoriales las características del material respecto a cualquier otro sistema espacial (movil) de referencia. Por otro lado si se pretende considerar grandes deformaciones plásticas (por ejemplo simulación de procesos de embutición de láminas metálicas), es necesario utilizar las adecuadas medidas de deformación y tensión asociadas a la forma en que se caracterizan tales materiales.

El objetivo de este trabajo es presentar elementos finitos para el análisis de sólidos anisótropos con la suficiente generalidad, que permita tratar diferentes tipos de anisotropía en el campo de grandes deformaciones plásticas.

### CINEMÁTICA. MEDIDAS DE DEFORMACIÓN Y TENSIÓN

A continuación se presenta un resumen de las expresiones de la mecánica de los sólidos relevantes a la formulación a utilizar.

Definiendo, referidos a un sistema cartesiano global cualquiera:

$\mathbf{X}$  : la posición original de los puntos materiales del sólidos

$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3]$  : la terna ortogonal respecto a la cual se caracteriza el material en cada punto del sólido indeformado (sistema local)

$\mathbf{Y}$  : las coordenadas originales referidas al sistema local

$$\mathbf{Y} = \mathbf{R}^T \mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} \mathbf{Y}$$

$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  : la posición de los puntos materiales del sólidos en un instante cualquiera  $t$

Denominando con  $\mathbf{F}$  al gradiente de la deformación

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

que puede referirse al sistema local (indicaremos con una barra superpuesta, las variables referidas al sistema local cuando sea necesario)

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \mathbf{R} \quad (2)$$

$$\bar{F}_{ik} = \frac{\partial x_m}{\partial Y_k} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial Y_k}$$

La medida de deformación Lagrangeana más sencilla, a los fines del planteo de la ecuaciones de equilibrio usando Trabajos Virtuales, es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange definido por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{U}}^2 - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{R}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{R} - \mathbf{1}) = \mathbf{R}^T \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^T \mathbf{E} \mathbf{R} \end{aligned} \quad (3)$$

Si realizamos la descomposición espectral de  $\bar{\mathbf{U}}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}} &= \mathbf{L}^T \Lambda \mathbf{L} \\ &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal que agrupa a los autovalores  $\lambda_i$  de  $\bar{\mathbf{U}}$  y  $\mathbf{l}_i$  son los autovectores (unitarios) asociados. Entonces es posible escribir (3) como

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T (\Lambda^2 - \mathbf{1}) \mathbf{L} \quad (5)$$

La medida de tensión asociada (a través del principio de Trabajos Virtuales) es el segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff  $\bar{\mathbf{S}}$  que se relaciona con el tensor de tensiones (reales) de Cauchy  $\sigma$  por

$$\bar{\mathbf{S}} = \det(\bar{\mathbf{F}}) \bar{\mathbf{F}}^{-1} \sigma \bar{\mathbf{F}}^{-T} \quad (6)$$

que permite escribir el trabajo virtual interno como

$$\int_{V_0} \bar{\mathbf{S}} : \delta \bar{\mathbf{E}} dV_0 \quad (7)$$

donde  $V_0$  es el volumen original indeformado del sólido.

Este par conjugado tensión-deformación presenta algunas dificultades para el tratamiento de relaciones constitutivas en grandes deformaciones, por lo cual introduciremos la deformación de Hencky

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{L}^T \ln(\Lambda) \mathbf{L} \quad (8)$$

Esta medida de deformación es una extensión adecuada de la deformación logarítmica (natural) unidimensional y es Lagrangeana, es decir que mide deformaciones respecto a la terna original. Denominaremos con  $\bar{\mathbf{T}}$  a la medida de tensión asociada, que puede relacionarse con  $\bar{\mathbf{S}}$  a través de las expresiones siguientes:

Definiendo los tensores rotados

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_L &= \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{T}} \mathbf{L} \\ \mathbf{S}_L &= \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{S}} \mathbf{L} \end{aligned} \quad (9)$$

La relación entre el 2do tensor de Piola Kirchhoff y la tensión de Hencky es (ver por ejemplo la referencia [1])

$$\begin{aligned} [S_L]_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{\lambda_\alpha^2} [T_L]_{\alpha\alpha} \\ [S_L]_{\alpha\beta} &= \frac{\ln(\lambda_\alpha/\lambda_\beta)}{\frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2)} [T_L]_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (10)$$

Finalmente

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{R}_L \mathbf{S}_L \mathbf{R}_L^T \quad (11)$$

El objetivo de calcular  $\bar{\mathbf{S}}$  es que las condiciones de equilibrio se expresan a partir de la expresión (7) debido a la complejidad computacional que representa obtener la variación de la deformación de Hencky (expresión (8)).

## RELACIONES CONSTITUTIVAS

A los fines de considerar comportamiento elasto-plástico se supondrá que las deformaciones elásticas son pequeñas y que es admisible descomponer en forma aditiva al tensor de deformación de Hencky en una componente elástica y una componente plástica

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{e}}^e + \bar{\mathbf{e}}^p \quad (12)$$

Se supondrá además que existe una relación constante entre la medida de tensión de Hencky  $\bar{\mathbf{T}}$  y la componente elástica del tensor de deformaciones  $\bar{\mathbf{e}}^e$ .

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{C} : \bar{\mathbf{e}}^e \quad (13)$$

Esta relación está expresada en las direcciones principales de ortotropía que es donde se ha caracterizado el material. En el caso de materiales composites existen diferentes formas de tratarlo. Una posibilidad es considerarlo como un único material equivalente, en tal caso se aplica directamente la expresión anterior. El problema de esta aproximación es el tratamiento plástico que resulta muchas veces muy complejo de aproximar como un único material equivalente. Una segunda posibilidad, de mayor generalidad pero más costosa computacionalmente, es utilizar la teoría de mezclas y analizar separadamente el comportamiento de cada componente (ver por ejemplo la Ref. [2]). En tal caso resulta conveniente expresar al tensor de deformaciones  $\bar{\mathbf{e}}$  en las direcciones principales de ortotropía de cada componente

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{R}}_i^T \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{R}}_i$$

donde  $\bar{\mathbf{R}}_i = [\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i]$  son las direcciones principales de ortotropía de la componente  $i$  referidas al sistema local  $\bar{\mathbf{R}}$ . La teoría de mezclas permite tratar separadamente cada componente, evaluando su estado tensional y luego calcular el estado tensional equivalente en función de la fracción de volumen de cada componente dentro del compuesto.

Este trabajo se concentra en materiales mono-componentes, elasticamente isótropos, y se ha utilizado la función de fluencia definida por Hill [3].

$$f = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 - 1 \quad (14)$$

Que resulta de una generalización del criterio de von Mises para materiales cuya comportamiento plástico es independiente de la presión media. Esta elección está principalmente orientada a la simulación de embutición de chapas metálicas. Los coeficientes  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$ , y  $N$ , dependen de las relaciones de resistencia en las distintas direcciones y/o de las relaciones de deformación plástica entre las distintas direcciones.

## ELEMENTOS FINITOS DE SÓLIDOS

Se ha utilizado la cinemática descripta en la Sección 2 para implementar elementos sólidos en 2 y 3 dimensiones. Se han considerado elementos cuadriláteros de 4 nudos en 2 dimensiones y hexaedros de 8 nudos en 3 dimensiones.

Las geometrías inicial y deformada del elemento están descriptas por las aproximaciones isoparamétricas usuales (con  $NN$  el número de nudos por elemento)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\xi) &= \sum_{I=1}^{NN} N^I(\xi) \mathbf{X}^I \\ \mathbf{x}(\xi) &= \sum_{I=1}^{NN} N^I(\xi) \mathbf{x}^I = \sum_{I=1}^{NN} N^I(\xi) (\mathbf{X}^I + \mathbf{u}^I) \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{X}^I$ ,  $\mathbf{x}^I$ , y  $\mathbf{u}^I$  son respectivamente las coordenadas originales, coordenadas actuales y desplazamientos del nudo  $I$ . Las funciones de forma  $N^I(\xi)$  son las habituales funciones de forma Lagrangeanas en función de las coordenadas locales  $\xi$  del elemento maestro correspondiente.

La evaluación de las derivadas cartesianas se realiza en forma estandar, definiendo la matriz jacobiana en cada punto de integración

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \quad (15)$$

$$N_{\mathbf{x}}^I = \mathbf{J}^{-1} N_{\xi}^I \quad (16)$$

En cada elemento se define un sistema cartesiano local coincidente con las direcciones principales de ortotropía del material constitutivo

$$\mathbf{R} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3]$$

de tal forma que las derivadas cartesianas referidas a este sistema ( $\mathbf{Y}$ ) resultan

$$\bar{N}_{\mathbf{Y}}^I = \mathbf{R}^T N_{\mathbf{X}}^I$$

lo que permite evaluar el gradiente de deformación  $\bar{\mathbf{F}}$  en función de las coordenadas actuales de los nudos

$$\bar{F}_{ij} = \sum_{I=1}^{NN} \bar{N}_{ij}^I x_i^I$$

y las componentes del tensor  $\bar{\mathbf{U}}^2$

$$(\bar{\mathbf{U}})_{ij}^2 = \bar{F}_{ki} \bar{F}_{kj}$$

La descomposición espectral de  $\bar{\mathbf{U}}$  en 2 dimensiones no presenta dificultad alguna, en el caso tridimensional es necesario un cierto cuidado para deformaciones muy pequeñas o para autovalores casi-coincidentes para evitar problemas de precisión en la obtención de los autovectores correspondientes.

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{L}^T \Lambda \mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i$$

El tensor de deformaciones se calcula como

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{L}^T \ln(\Lambda) \mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i$$

Para evitar problemas de bloqueo debido al flujo plástico incompresible el tensor de deformaciones se descompone en sus componentes volumétrica y desviadora.

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{\Delta}{3} \mathbf{1} + \bar{\mathbf{e}}_D$$

La componente volumétrica resulta de la traza del tensor  $\Delta = \text{tr}(\bar{\mathbf{e}})$  que se promedia sobre todo el elemento ( $\bar{\Delta}$ ), con lo cual se obtiene un valor corregido del tensor de deformaciones en cada punto de integración

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{\bar{\Delta}}{3} \mathbf{1} + \bar{\mathbf{e}}_D$$

Aceptando la hipótesis de aditividad de componentes elástica y plástica del tensor de deformaciones este se escribe

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{e}}^p + \bar{\mathbf{e}}^e$$

Para el caso de materiales donde la ley de fluencia es independiente de la componente volumétrica, la componente plástica tiene traza nula y  $\bar{\Delta}$  es puramente elástica.

El tensor de tensiones asociado se obtiene de suponer una ley constitutiva hiperelástica, constante entre tensiones y componentes elásticas del tensor de deformaciones

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{e}}^e$$

Para el caso de un material isótropo con deformación plástica incompresible, lo anterior puede escribirse

$$\bar{\mathbf{T}} = 2G \bar{\mathbf{e}}_D^e + K \bar{\Delta}$$

Si se utiliza el criterio de von Mises o el criterio de Hill es posible trabajar con las componentes desviadoras de tensiones y deformaciones, lo que facilita y hace más económica la integración de las ecuaciones constitutivas.

## EJEMPLOS

Se ha implementado un elemento cuadrilátero de 4 nudos y un elemento exahédrico de 8 nudos para problemas bi y tridimensionales respectivamente. Estos elementos han sido codificados en un programa dinámico con integración explícita de las ecuaciones de movimiento [4].

### Compresión de un cuerpo cilíndrico

Este primer ejemplo ha sido utilizado por diferentes autores y programas comerciales como "benchmark". Es una probeta cilíndrica de 10mm de radio y 30mm de longitud comprimida entre dos platos rugosos hasta una longitud final igual al 53% inicial. El material en este caso es isótropo ( $E = 200GPa$ ,  $\nu = 0.3$ ), con endurecimiento lineal ( $\sigma_y = (0.7 + 0.3e^P) GPa$ ). Se ha modelado la mitad superior (15mm) de la geometría con 625 elementos bidimensionales axilsimétricos.

En la Figura 1.a se muestra la configuración original y deformada para un acortamiento de 7mm. Se han superpuesto los contornos de deformación plástica efectiva que para este nivel de compresión ha sobrepasado el valor de 1.4. En la Figura 1.b se muestra la fuerza sobre el plato versus el avance del mismo. Los resultados comparados con los existentes en la literatura (basados en formulaciones Lagrangeanas actualizadas con descomposición multiplicativa del gradiente de deformación) muestran una excelente correlación hasta desplazamientos de 5mm.

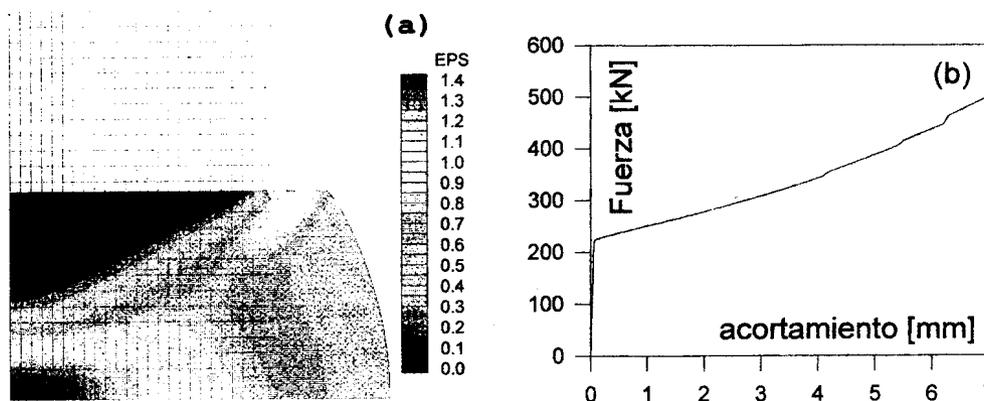


Figura 1: Compresión de un cilindro. (a) Contornos de deformación plástica efectiva. (b) Fuerza vs. desplazamiento

### Embutición profunda de una lámina circular.

En este ejemplo se utiliza un material cuyo comportamiento elástico puede considerarse isótropo pero presenta una marcada anisotropía en el campo plástico. La caracterización del material (acero dulce) de la lámina fabricada por rolado, está dada por ensayos de tracción en tres direcciones diferentes referidas a la dirección de rolado (DR).

Espesor	Orientación respecto a DR	Tensión fluencia	resistencia a tracción	$\epsilon_u$ uniforme	$\epsilon_t$ total	n	r
mm	°	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	%	%		
0.98	0	176	322	24	40	0.214	1.73
	45	185	333	22	39	0.203	1.23
	90	180	319	23	44	0.206	2.02

Tabla 1. Propiedades plásticas del material (DDQ)

El problema en estudio es geoméricamente sencillo, corresponde a la embutición profunda de una lámina circular con un punzón esférico. El diámetro de la lámina es de 200 mm, el diámetro del punzón es de 100 mm, el diámetro interno de la matriz es de 102.4 mm y el radio de curvatura de la matriz es de 5 mm. La fuerza sobre el pisador es de 80 kN, y la profundidad de embutición es de 85 mm.

En la simulación numérica el material se supuso elásticamente isótropo ( $E=193$  GPa,  $\nu=0.3$ ), con endurecimiento isótropo exponencial, en la dirección de rolado  $\sigma_0(e^p) = 441.54(0.0136 + e^p)^{0.214}$  MPa. En función de los valores indicados en la tabla, los coeficientes de la función de fluencia de Hill utilizados fueron

$$\begin{array}{lll} F = 0.3137/\sigma_0^2 & G = 0.3663/\sigma_0^2 & H = 0.6337/\sigma_0^2 \\ N = 1.1764/\sigma_0^2 & L = 1.4452/\sigma_0^2 & M = 1.4452/\sigma_0^2 \end{array}$$

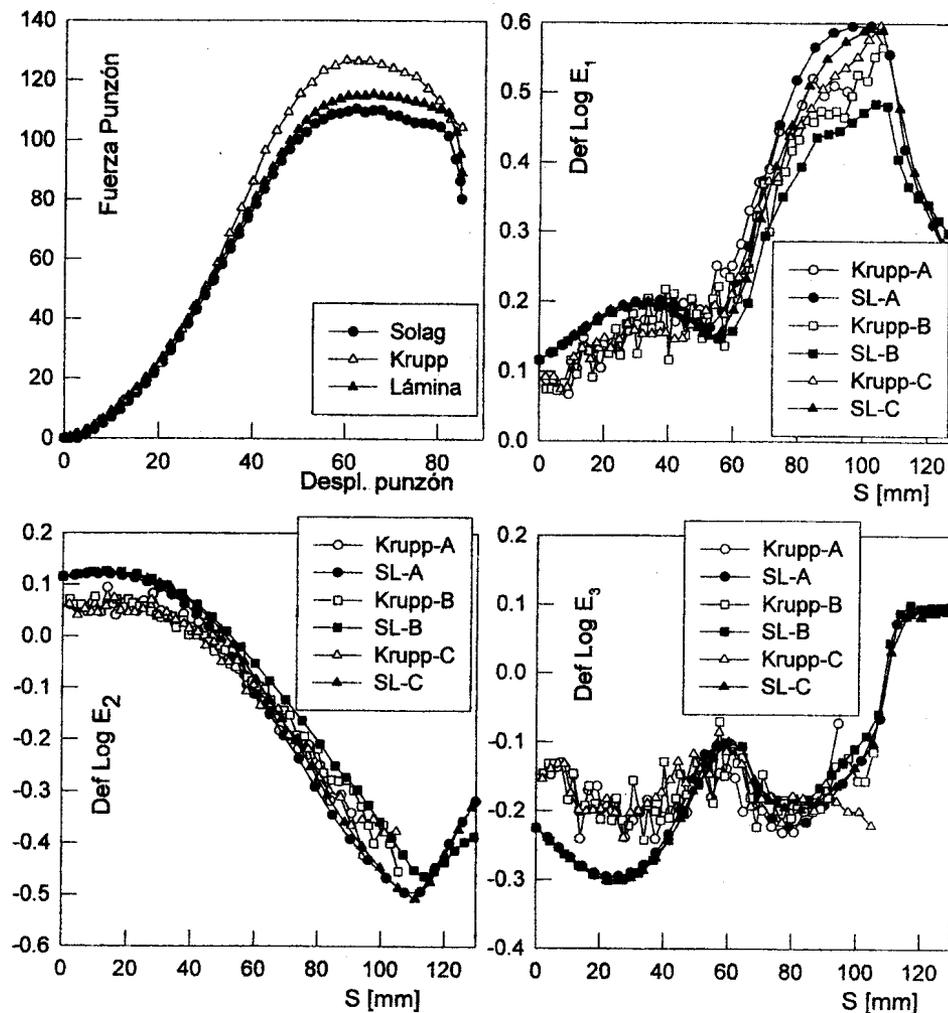


Figura 2: Resultados del "benchmark" de Numisheet'99

Una característica del material, habitualmente no disponible experimentalmente, es la tensión de fluencia biaxial, asociada a la resistencia a compresión en la dirección normal a la lámina. Este dato tiene poca importancia cuando se utilizan elementos de lámina pero es relevante cuando se utilizan elementos de sólido como en este caso. En particular porque tampoco se dispone de la resistencia al corte en la dirección normal a la lámina. En esta simulación se utilizó, a partir de las relaciones de deformación plástica  $r$  (o coeficientes de Lankford), un valor de  $\sigma_{biaxial} = 1.21\sigma_0$ .

Este ejemplo fue utilizado como "benchmark" en NUMISHEET'99[5], los resultados presentados en dicha reunión presentan una dispersión importante, tanto los resultados experimentales como los provenientes de simulaciones numéricas, por lo cual resulta muy difícil extraer conclusiones definitivas respecto al comportamiento del modelo numérico. En la Figura 2 se muestran los principales resultados de la simulación y se comparan con los resultados experimentales provistos por Krupp, que son los más completos, pero que sin embargo muestran algunas oscilaciones poco creíbles desde el punto de vista físico. Los resultados son la resistencia al avance del punzón y los perfiles de deformaciones logarítmicas a lo largo de 3 meridianos (A: a  $90^\circ$  de la dirección de rolado (DR), B: a  $45^\circ$  de DR y C: en la DR. En la simulación la fuerza sobre el punzón (Fig. 2.a) es menor que la experimental, para comparar se ha incluido además otra simulación numérica con una formulación similar pero usando un elemento de lámina [6] que da valores un poco más altos. Las deformaciones tienen perfiles similares pero en el centro de la lámina son mayores que las experimentales. Globalmente el comportamiento de la simulación es más flexible que el experimental y muestra una menor facilidad para embutir. Los resultados experimentales de Krupp muestran una menor anisotropía en el plano, es decir que los perfiles para distintas orientaciones son más parecidos entre sí que en la simulación. Esto no ha sido así en otros resultados experimentales presentados, ni en muchas de las simulaciones numéricas.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICET y la Agencia Córdoba Ciencia S.E.

### REFERENCIAS

- [1] Eterovic, A., A study of formulations for large strain elasto-plastic finite element analysis, MSc thesis, MIT, Cambridge, USA, 1989.
- [2] Car E., Oller S. y Oñate E., *A Large Strain Plasticity Model for Anisotropic Composite Materials*, Int. J. Plasticity, aceptado para publicación, 2001.
- [3] Hill R., *A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals*, Proc. Royal Society London, Vol. A193, 1948, pag. 281.
- [4] STAMPACK, *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems*, Quantech ATZ, Barcelona, España, ver. 5.4, 2001.
- [5] NUMISHEET'99, *Fourth International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes* 13 al 19 de setiembre de 1999, Besancon, Francia
- [6] Flores F.G. y Oñate E. *A basic thin shell triangle with only translational DOFs for large strain plasticity*, Int. J. Num. Meths in Engng, vol. 51, 2001, págs. 57-83.