

ANÁLISIS DE FRECUENCIAS NATURALES PARA CUERPOS HEXAEDRICOS A PARTIR DE LAS ECUACIONES DE LA ELASTICIDAD MEDIANTE RAYLEIGH-RITZ

Agustín G. Rauschert, José Converti
División de Termohidráulica, Centro Atómico Bariloche
Av E. Bustillo 9500, R8402AGP S. C. de Bariloche, Argentina
e-mail: rauscha@ib.cnea.gov.ar

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un modelo tridimensional de un sólido hexaédrico, homogéneo e isotrópico, para análisis modal mediante Rayleigh-Ritz. Este modelo está basado en la elasticidad lineal, y el campo de desplazamientos expresado por los polinomios de Legendre. Las condiciones de contorno son impuestas a posteriori mediante la elección de un conjunto de coordenadas físicas apropiadas para cada caso. Se presentan ejemplos comparados con los de trabajos recientes para el análisis modal de placas tridimensionales.

ABSTRACT

A three-dimensional Rayleigh-Ritz model for modal analysis of a homogeneous and isotropic solid hexahedral was developed. This model is based on the linear elasticity, and the displacement field expressed by Legendre's polynomials. The boundary conditions are imposed "a posteriori" through the choice of the physical co-ordinates needed for each case. Several cases are compared with recent works on modal analysis of three dimensional plates.

DESARROLLO TEORICO

Funcional de la energía en 3-D

Las expresiones de las energías de deformación elástica y cinética a partir de las ecuaciones de la teoría lineal de la elasticidad para un sólido pueden escribirse como

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad y \quad T = \frac{\rho}{2} \int_V (u^2 + v^2 + w^2) dV \quad (1)$$

en donde U es la energía elástica de deformación, T la energía cinética y ρ es la densidad. El tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ se relaciona con los desplazamientos (u, v, w) a través de

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2)$$

También tenemos la matriz de elasticidad \mathbf{D} que para un material isótropo toma la siguiente forma

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \nu/(1-\nu) & 1 & & & & \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1+\nu) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1+\nu) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Simétrica

en la cual E es el módulo de elasticidad y ν es el coeficiente de Poisson. El campo de desplazamientos $\{u, v, w\}^T$, funciones de x, y, z y t , podemos expresarlo a través de

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= U(x, y, z)e^{i\omega t} \\ v(x, y, z, t) &= V(x, y, z)e^{i\omega t} \\ w(x, y, z, t) &= W(x, y, z)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4)$$

en donde t es el tiempo y ω es la frecuencia de vibración.

Las funciones que representan la amplitud de los desplazamientos en (4) pueden ser escritas mediante una combinación lineal de funciones de alguna base

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(x, y, z) \\ V(x, y, z) &= \sum_{j=1}^M a_j \phi_j(x, y, z) \\ W(x, y, z) &= \sum_{k=1}^L a_k \phi_k(x, y, z) \end{aligned} \quad (5)$$

siendo a_i, a_j, a_k coeficientes indeterminados. El funcional de la energía es la suma de la máxima energía potencial de deformación y la máxima energía cinética, esto es

$$\Pi = U_{max} + T_{max} \quad (6)$$

Reemplazando en (6) las expresiones de las energías cinética y potencial de deformación expandidas según (1)-(5), y minimizando el funcional resultante con respecto a los coeficientes de acuerdo con el principio de Ritz

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = 0 \quad (7)$$

obtenemos el siguiente problema de autovalores y autovectores

$$[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}]\{a\} = \{0\} \quad (8)$$

donde $\{a\} = \{a_i, a_j, a_k\}^T$ son los autovectores y $\lambda = \omega^2$ son los correspondientes autovalores del problema. \mathbf{K} y \mathbf{M} representan la matriz de rigidez y masa respectivamente que tienen la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & & \\ [\mathbf{K}_{21}] & [\mathbf{K}_{22}] & \\ [\mathbf{K}_{31}] & [\mathbf{K}_{32}] & [\mathbf{K}_{33}] \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{11}] & & \\ 0 & [\mathbf{M}_{22}] & \\ 0 & 0 & [\mathbf{M}_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a_i\} \\ \{a_j\} \\ \{a_k\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (9)$$

Las expresiones para los bloques anteriores de las matrices de masa y rigidez pueden escribirse como

$$[\mathbf{K}_{11}] = (\Lambda + 2G) \int \phi_{i,x} \phi_{i,x} dv + G \int (\phi_{i,y} \phi_{i,y} + \phi_{i,z} \phi_{i,z}) dv \quad (10a)$$

$$[\mathbf{K}_{22}] = (\Lambda + 2G) \int \phi_{j,y} \phi_{j,y} dv + G \int (\phi_{j,x} \phi_{j,x} + \phi_{j,z} \phi_{j,z}) dv \quad (10b)$$

$$[\mathbf{K}_{33}] = (\Lambda + 2G) \int \phi_{k,z} \phi_{k,z} dv + G \int (\phi_{k,x} \phi_{k,x} + \phi_{k,y} \phi_{k,y}) dv \quad (10c)$$

$$[\mathbf{K}_{21}] = \int (\Lambda \phi_{i,x} \phi_{j,y} + G \phi_{i,y} \phi_{j,x}) dv \quad (10d)$$

$$[\mathbf{K}_{31}] = \int (\Lambda \phi_{i,x} \phi_{k,z} + G \phi_{i,z} \phi_{k,x}) dv \quad (10e)$$

$$[\mathbf{K}_{32}] = \int (\Lambda \phi_{j,y} \phi_{k,z} + G \phi_{k,y} \phi_{j,z}) dv \quad (10f)$$

$$[\mathbf{M}_{11}] = \rho \int \phi_i \phi_i dv \quad (10g)$$

$$[\mathbf{M}_{22}] = \rho \int \phi_j \phi_j dv \quad (10h)$$

$$[\mathbf{M}_{33}] = \rho \int \phi_k \phi_k dv \quad (10i)$$

con

$$\Lambda = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{y} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (11)$$

Funciones de forma y transformación del dominio de integración

A partir de la transformación del dominio hexaédrico, según [1], en un recinto cubico como lo muestra la figura 1, la cual puede escribirse como

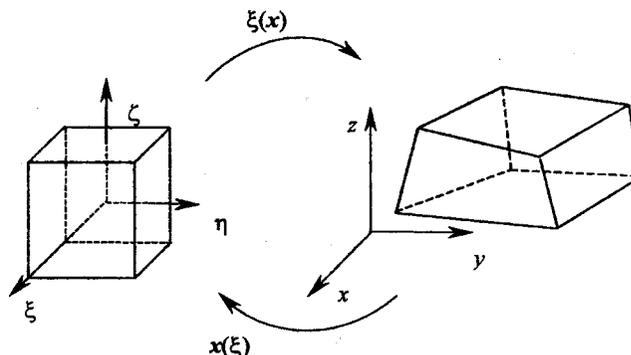


Figura 1: transformación del dominio

$$x(\xi) = \sum_{a=1}^8 N_a(\xi) x_a \quad (12)$$

donde x_a son las coordenadas de los vértices del hexaedro y N_a responde a la siguiente expresión

$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_a) (1 + \eta \eta_a) (1 + \zeta \zeta_a) \quad \text{con } a=1,8 \quad (13)$$

en la cual ξ_a, η_a, ζ_a son las coordenadas de cada vértice del cubo, definido en el intervalo $[-1, 1]$ para cada una de las variables, es posible escribir que

$$\phi_i(x, y, z) = \phi_i[x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)] = \sigma_i(\xi, \eta, \zeta) = P_\alpha(\xi) P_\beta(\eta) P_\gamma(\zeta) \quad (14)$$

donde la función σ_i se encuentra expresada como el producto de polinomios de Legendre, los cuales son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$, para cada una de las variables. $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$ representan a los polinomios de Legendre de orden α, β y γ . De esta misma manera se expresan las funciones de forma restantes ϕ_j y ϕ_k . Con esto pueden reescribirse las (10) de manera que las derivadas de las funciones ϕ pueden expresarse a través de la regla de la cadena como

$$\begin{aligned} \phi_{,x} &= \frac{\sigma_{,\xi} \text{cof}_{11} + \sigma_{,\eta} \text{cof}_{12} + \sigma_{,\zeta} \text{cof}_{13}}{J} \\ \phi_{,y} &= \frac{\sigma_{,\xi} \text{cof}_{21} + \sigma_{,\eta} \text{cof}_{22} + \sigma_{,\zeta} \text{cof}_{23}}{J} \\ \phi_{,z} &= \frac{\sigma_{,\xi} \text{cof}_{31} + \sigma_{,\eta} \text{cof}_{32} + \sigma_{,\zeta} \text{cof}_{33}}{J} \end{aligned} \quad (15)$$

donde J es el jacobiano de la transformación expresada en (12) y tiene la siguiente expresión

$$J = \begin{vmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} & x_{,\zeta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} & y_{,\zeta} \\ z_{,\xi} & z_{,\eta} & z_{,\zeta} \end{vmatrix} \quad (16)$$

y cof_{ij} son los cofactores de la matriz J .

Coordenadas mixtas y condiciones de contorno

Las condiciones de borde analizadas pueden ser mas que variadas al tratar el problema en forma completa a través del análisis tridimensional. La imposición de éstas ó el ensamble de varios elementos se realizó mediante la introducción de las coordenadas mixtas, analizadas por *Scheble et al.*[2]. En éstas se eligen como coordenadas físicas aquellas necesarias para establecer un vinculo rígido o un empalme y el resto son optimizadas para mejorar el número de condición de la matriz de pasaje de coordenadas. El cambio de coordenadas propuesto puede escribirse como

$$\{a_n\} = [\Psi]\{p_n\} \quad \text{con } n = i, j, k \quad (17)$$

donde $\{a_n\}$ representa al vector de coordenadas generalizadas, $\{p_n\}$ al de coordenadas mixtas y $[\Psi]$ es la matriz que vincula ambos sistemas de coordenadas. Esta matriz $[\Psi]$ se obtiene a través de la descomposición en valores singulares de otra matriz que llamaremos $[A]$ de $N \times M$, donde N es la cantidad de coordenadas físicas elegidas y M los grados de libertad totales. La matriz $[A]$ resulta de evaluar las M funciones de forma o una combinación de estas en las N coordenadas físicas elegidas. Si definimos la siguiente partición $[\Psi] = [\Psi_1 | \Psi_2]$, definimos a $[\Psi_1]$ de orden $M \times N$ como la pseudoinversa de $[A]$ y a $[\Psi_2]$ de $M \times (M-N)$ como el núcleo de $[A]$. Este tipo de coordenadas mantiene las ventajas del Método en Coordenadas Físicas en cuanto al ensamblaje y la imposición de condiciones de contorno como en el Método de Elementos Finitos.

Las condiciones de borde clásicas que pueden ser analizadas son el simple soporte y el empotramiento las cuales pueden ser expresadas para $\xi=1$ como

$$\begin{aligned} (1) \text{ C empotrado } & U=0, V=0, W=0 \\ (2) \text{ SS simple soporte } & W=0, V=0, \sigma_x=0 \end{aligned} \quad (18)$$

Esta forma de imponer las condiciones de borde hace posible tratar una amplia gama de posibilidades.

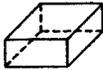
RESULTADOS NUMERICOS

Sobre la base de las ecuaciones anteriores se analizaron las frecuencias naturales de placas de espesor considerable. Se utilizaron rutinas en FORTRAN y para calcular la descomposición en valores singulares y la resolución del problema de autovalores rutinas de la IMSL. El número de ecuaciones a resolver esta determinado por la suma de la cantidad de funciones de forma utilizadas para representar cada uno de los desplazamientos (u, v, w). La cantidad de funciones de forma para cada desplazamiento es el producto de los máximos ordenes de los polinomios de Legendre para cada una de las variables. En todos los casos se tomo $E=1, \rho=1, \nu=0.3$.

En primer lugar se calcularon los parámetros de frecuencia para una placa cuadrada (caso a) libre de condiciones de contorno y se compararon, como se observa en la tabla I, mostrando el ensamblado de dos placas rectangulares (caso b) para obtener una cuadrada, y de dos placas con un lado oblicuo (caso c) para obtener siempre la misma placa cuadrada. Se calcularon los seis primeros parámetros de

frecuencia $\lambda = \omega b^2 / \pi^2 (\rho h/D)^{1/2}$ donde b es el lado de la placa y D la rigidez a la flexión. Se observa una buena correspondencia en los resultados de los tres casos, mostrando la posibilidad de ensamblar elementos de este tipo en 3-D.

Tabla I: parámetros λ para (a) una placa cuadrada libre, (b) ídem conformada mediante dos placas rectangulares, (c) ídem mediante dos placas con un lado oblicuo. $h/b=0.5$

| Modo |  (a) |  (b) |  (c) |
|------|--|--|--|
| 1 | 8.89608 | 8.89604 | 8.89604 |
| 2 | 12.6800 | 12.6799 | 12.6799 |
| 3 | 15.1591 | 15.1591 | 15.1591 |
| 4 | 16.2847 | 16.2847 | 16.2847 |
| 5 | 17.2550 | 17.2550 | 17.2550 |
| 6 | 17.2550 | 17.2550 | 17.2550 |

Para analizar el comportamiento a la imposición de condiciones de contorno se calcularon las frecuencias naturales de una placa cuadrada. Las condiciones de borde elegidas fueron el empotramiento en todo el contorno (CCCC) y el simple soporte (SSSS), y en dos relaciones de espesor/lado (h/b). En la Tabla II se observa la convergencia del parámetro λ para la frecuencia fundamental comparada con la convergencia del método de Differential Quadrature (DQ) presentado por Liew *et al.* [3]. En la figura 2 se presenta un gráfico de la convergencia del parámetro λ para la primera frecuencia natural en dos relaciones de h/b . En ambos casos puede observarse una convergencia monótona con el incremento de orden de buenas características y buenos resultados a partir de polinomios de orden 8. En la Tabla III se muestran los resultados de los seis primeros parámetros de frecuencia para una placa cuadrada cuyos lados se encuentran simplemente soportados. Los resultados muestran una correspondencia con los presentados en [4] por Liew *et al.* en un análisis tridimensional de placas rectangulares.

Para observar el comportamiento del modelo a las distorsiones se planteó la solución de las frecuencias naturales de una placa triangular isósceles con una relación $b/h=0.1$ y con $\beta = 30^\circ$ (Figura 3), donde $b=1$ es la base del mismo y se encuentra empotrada y los otros dos libres. Los resultados se encuentran comparados con los obtenidos por [5] a través de la teoría de placas de Mindlin, las que incluyen la influencia del corte y la inercia rotatoria (Tabla IV). El orden de los polinomios utilizados en este caso fue 9 en todas las variables de los tres desplazamientos, observándose buena correspondencia de los resultados.

Tabla II. Convergencia del parámetro λ para la frecuencia fundamental de una placa cuadrada CCCC comparada con DQ

| Orden | Cond. De Contorno CCCC | | | |
|----------|------------------------|----------------|----------|----------------|
| | h/b=0.2 | | h/b=0.5 | |
| | Ref. [3] | Trabajo actual | Ref. [3] | Trabajo actual |
| 7x7x7 | 2.7605 | 2.7415 | 1.5590 | 1.5516 |
| 8x8x8 | 2.7361 | 2.7361 | 1.5484 | 1.5506 |
| 9x9x9 | 2.7302 | 2.7322 | 1.5508 | 1.5501 |
| 10x10x10 | 2.7288 | 2.7301 | 1.5490 | 1.5497 |
| 11x11x11 | 2.7270 | 2.7284 | 1.5494 | 1.5494 |

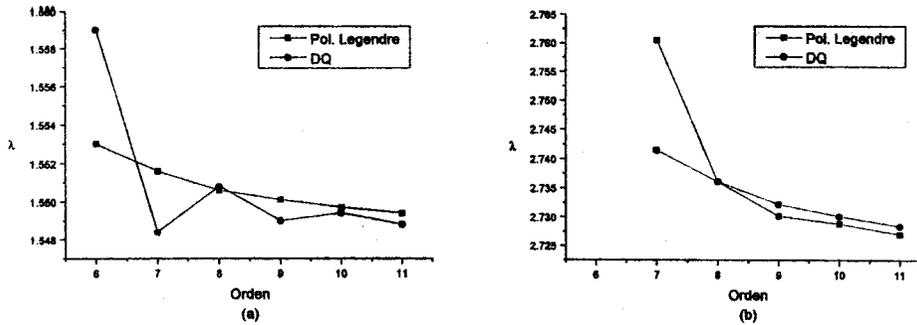


Figura 2. Convergencia de λ para el primer modo con (a) $h/b=0.5$ y (b) $h/b=0.2$

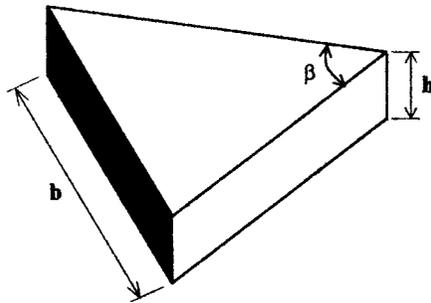


Figura 3. Placa triangular isósceles

Tabla IV. Parámetros λ para una placa triangular de base empotrada con $h/b=0.1$ y $\beta=30^\circ$

| Modo | Ref. [5] | Trabajo presente |
|------|----------|------------------|
| 1 | 0.1982 | 0.1990 |
| 2 | 0.8442 | 0.8475 |
| 3 | 1.2604 | 1.2658 |
| 4 | - | 1.3099 |
| 5 | 2.0041 | 2.0137 |
| 6 | 3.0082 | 3.0235 |

Tabla III. Parámetros de frecuencias para una placa cuadrada con condiciones SSSS

| Modo | Cond. de Contorno SSSS | | | |
|------|------------------------|----------------|-----------|----------------|
| | $h/b=0.2$ | | $h/b=0.5$ | |
| | Ref. [4] | Trabajo actual | Ref. [4] | Trabajo actual |
| 1 | 1.7758 | 1.7758 | 1.2590 | 1.2590 |
| 2 | 3.2617 | 3.2617 | 1.3047 | 1.3047 |
| 3 | 3.2617 | 3.2617 | 1.3047 | 1.3047 |
| 4 | 3.8991 | 3.8991 | 1.8451 | 1.8451 |
| 5 | 3.8991 | 3.8991 | 2.3312 | 2.3312 |
| 6 | 4.6127 | 4.6127 | 2.3312 | 2.3312 |

CONCLUSIONES

El modelo de sólido en tres dimensiones presentado en este trabajo ha demostrado un buen comportamiento para calcular frecuencias naturales de placas de diversas formas y condiciones de contorno. La introducción de las coordenadas mixtas ha optimizado la imposición de condiciones de contorno y el ensamble de elementos. Ha mostrado buenas características de convergencia, obteniendo buenos resultados con ordenes de magnitud bajos, lo cual hace posible la utilización de ordenadores convencionales para la resolución de los mismos.

Si bien únicamente se presentó la resolución de placas, el modelo también puede ser utilizado para la solución de vigas tridimensionales (p.ej: vigas muy cortas en las cuales es necesario utilizar la teoría

completa para su descripción correcta) o de espesor variable linealmente, o condiciones de contorno especiales (p.ej: apoyos intermedios).

REFERENCIAS

- [1] Hughes T.J.R., *The Finite Element Method*, Prentice-Hall Inc, 1987.
- [2] Scheble M., Strizzolo C., Converti J., *Un método de Rayleigh-Ritz optimizado para el análisis dinámico de estructuras adoptando coordenadas mixtas*, Mec. Comp. Vol XIX, pp. 513-518, S. C. De Bariloche, 2000.
- [3] Liew K. M., Teo T. M., Han J. B., *Comparative accuracy of DQ and HDQ methods for Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates*, Int. J. Numer. Meth Engng. 45, 1831-1848 (1999).
- [4] Liew K. M., Hung K. C., Lim K. M., *A continuum Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates*, Int. J. Solids Structures. Vol. 30, No. 24, pp. 3357-3379 (1993).
- [5] Liew K. M., Wang C. M., Xiang Y., Kittipornchai S., *Vibration of Mindlin Plates: Programming the p-version Ritz Method*. Elsevier: Oxford, 1998.