

VIBRACIONES NATURALES DE PLACAS RECTANGULARES CON APOYOS INTERMEDIOS PARCIALES: SOLUCIÓN EXACTA

Mario R. Escalante^{1,2}, Marta B. Rosales^{1,3} y Carlos P. Filipich^{1,4}

¹Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca, Argentina.

²F.R.C.U. – U.T.N., 3260 C. del Uruguay (E.R.), Argentina.
e-mail: escalam@infovia.com.ar

³CONICET, Argentina.

e-mail: mrosales@criba.edu.ar

⁴F.R.B.B. – U.T.N., 8000 Bahía Blanca, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se presenta una metodología para determinar frecuencias naturales con precisión arbitraria, de placas rectangulares delgadas con apoyos intermedios lineales y condiciones de borde variadas. Esto es, con bordes total o parcialmente apoyados, empotrados, libres y cualquier combinación de los anteriores. La forma, cantidad y ubicación de los apoyos intermedios, en el interior de la placa, son arbitrarias, lo que permite analizar una gama muy diversa de casos que incluyen simples y múltiples apoyos intermedios, rectos y curvos, completos (los extremos coinciden con los bordes de la placa) y parciales (al menos uno de sus extremos no coincide con los bordes de la placa). En el caso de apoyos lineales curvos, éstos pueden ser arcos de curvas abiertas o curvas cerradas. Se obtiene la solución generalizada utilizando como herramienta el Método del Elemento Completo. Tanto para los apoyos intermedios lineales, como para los bordes empotrados es adoptado un modelo discreto de puntos equidistantes. En todos los casos debe destacarse el planteo sistemático de la solución, y el fundamento teórico de la metodología que asegura la precisión arbitraria (exactitud) de los resultados.

ABSTRACT

A methodology to find natural frequencies with arbitrary precision of thin rectangular plates on lineal supports and varied boundary conditions is presented. This means that the edges are total or partially supported, clamped, free and any combination of these. The layout, number and place of lineal intermediate supports are arbitrary, which allows for the analysis of a wide range of cases that include intermediate supports of different kinds: simple and multiple, straight and curved, complete (the ends coincide with the plate edges) and partial (at least one of the ends does not coincide with the plate edges). In the case of curved lineal supports, the curve can be open or closed. The general solution is obtained using the Whole Element Method. A discrete model of equidistant points both for intermediate supports and clamped edges is adopted. In all cases, both a systematic approach to the solution and the theoretical basis should be emphasized as they ensure an arbitrary precision (accuracy) of the results.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las vibraciones naturales de placas, ha sido ampliamente estudiado por numerosos autores, mucho de los cuales han sido estudiados por Leissa [1-3] siendo escasa la literatura referente al

estudio de placas con soportes intermedios lineales. La mayoría de ellos abordan el caso de uno o más soportes intermedios paralelos a los lados de la placa [4-6], soportes a lo largo de sus diagonales [7-8] y unos muy pocos casos de soportes oblicuos [9-11] que pasan por el centro de la placa. En todos estos trabajos los soportes intermedios son completos, es decir, se extienden de lado a lado. Dentro del conocimiento de los autores, no existen antecedentes en la literatura abierta respecto a estudios de placas rectangulares con apoyos intermedios parciales, con metodologías analíticas.

El problema de vibraciones es analizado dentro de la teoría de placas delgadas de Germain-Lagrange, utilizando el Método del Elemento Completo (MEC). Éste es un método variacional directo previamente desarrollado y fundamentado para problemas de borde, de condiciones iniciales y/o gobernados por ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, en dominios, uni, bi y tridimensionales, conservativos o no, lineales o no [12-19]. Se parte de un funcional ad-hoc (en el caso del problema del título, el funcional energético) y de proponer una secuencia extremante de funciones pertenecientes a un conjunto completo en L_2 . Las condiciones de borde esenciales requeridas por el problema deben ser satisfechas por la secuencia elegida. Si no las verificara idénticamente, se recurre al uso de multiplicadores de Lagrange. Las secuencias utilizadas son series trigonométricas ampliadas y la generación de las mismas es sistemática. Se asegura la completitud y no requiere del estudio previo de las formas modales.

Los apoyos intermedios lineales y empotramientos sobre bordes son abordados mediante un modelo discreto, como un conjunto de puntos equidistantes, a cada uno de los cuales se le exige el cumplimiento de las condiciones de desplazamiento transversal o giro en dirección normal a la línea de empotramiento respectivamente. Otra alternativa de modelar los apoyos intermedios, es mediante un modelo de apoyo continuo [20-22], que por razones de brevedad no es desarrollado en este trabajo aunque posee cierta similitud en su planteo teórico.

Debe destacarse el planteo que se hace de carácter general, sistemático, y el fundamento teórico de la metodología que asegura la precisión arbitraria (exactitud) de los resultados. Por ser el algoritmo independiente de las condiciones de borde y apoyos de la placa, ésta es una ventaja de importancia, por cuanto mediante un sólo planteo y un sólo algoritmo computacional pueden determinarse las frecuencias de innumerables casos. Analizar estos casos por medio de otras metodologías puede ser difícil o sino imposible. Los resultados hallados con MEC son comparados con valores obtenidos de la solución clásica, cuando esté disponible, con los obtenidos por otros autores mediante métodos aproximados y el Método de Elementos Finitos mediante el uso del software comercial ALGOR® [23], entre otros.

PLANTEO DEL PROBLEMA

Se asume, en todos los casos, que la placa bajo estudio es una placa rectangular delgada, de espesor uniforme h_p , de material homogéneo e isotrópico, módulo de elasticidad E , y se encuentra en el plano XY , limitada por los ejes $X = 0$, $X = a$, $Y = 0$ e $Y = b$. El funcional energético correspondiente a las vibraciones libres de una placa rectangular delgada, utilizando la Teoría de Germain-Lagrange es, una vez asumidos modos normales:

$$\mathfrak{J}^* [w] = \|w'' + \lambda^2 \bar{w}\|^2 + 2\lambda(1-\nu) [\|\bar{w}\|^2 - (w'', \bar{w})] - \Omega^2 \|w\|^2 \quad (1)$$

donde w es el desplazamiento transversal, $\Omega \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h_p / D}$, $\lambda \equiv a/b$, $D = Eh_p^3 / 12(1-\nu^2)$, y ν el coeficiente de Poisson, siendo además $(\cdot)' \equiv \partial w / \partial x$; $(\bar{\cdot}) \equiv \partial w / \partial y$, etc. Con el fin de trabajar en el dominio $\{D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, se introdujo el cambio de variables $x = X/a$, $y = Y/b$.

El MEC requiere del planteo de una secuencia extremante en el problema de placas delgadas que es un dominio bidimensional. Por ser el funcional bajo estudio, cuadrático y definido positivo, la misma

será minimizante. En el problema de placas abordados por métodos directos, deben imponerse, al menos, condiciones de borde que involucren funciones esenciales, en donde éstas son las que involucran la solución o sus derivadas hasta el orden $k-1$, siendo $2k$ el orden de la ecuación diferencial gobernante del problema. Por ello, debe verificarse que tanto la función desplazamiento como sus derivadas primeras sean de convergencia uniforme. Una de las posibles secuencias a utilizar es:

$$w_{MN}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} s_i s_j + y \left(\sum_{i=1}^M A_0 s_i + b_0 \right) + x \left(\sum_{j=1}^N A_0 s_j + a_0 \right) + \sum_{i=1}^M a_i s_i + \sum_{j=1}^N b_j s_j + A_{00} xy + k_0 \quad (2)$$

donde $s_i \equiv \text{sen}(\alpha_i x)$; $s_j \equiv \text{sen}(\alpha_j y)$; $\alpha_i \equiv i\pi$; $\alpha_j \equiv j\pi$

Apoyos Intermedios Parciales

En la Figura 1, se muestra una placa rectangular, con un apoyo intermedio parcial de forma arbitraria. Sea $s(t) = (x(t), y(t))$ con $t_0 \leq t \leq t_1$, la ecuación del apoyo intermedio. Se consideran P puntos equidistantes cuyas coordenadas adimensionalizadas son

$$P_k = (x_p(t), y_p(t)) = \left(x_p(t_0 + \frac{p}{P-1} \Delta), y_p(t_0 + \frac{p}{P-1} \Delta) \right)$$

con $p = 0, 1, 2, \dots, (P-1)$ y $\Delta = t_1 - t_0$.

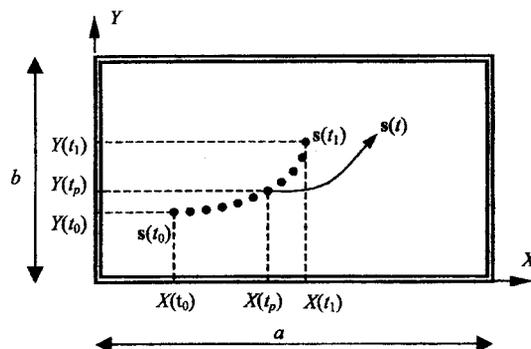


Figura 1: Placa rectangular con un apoyo lineal intermedio. Modelo discreto.

Como el apoyo ahora ha sido sustituido por una sucesión de puntos, se debe exigir que en cada uno de ellos el desplazamiento transversal sea nulo, es decir:

$$w(x_p, y_p) = 0 \quad \forall p = 0, 1, 2, \dots, P-1$$

Esto se logra mediante el uso de multiplicadores de Lagrange, tantos como puntos intermedios se tomen para modelar el apoyo. De esta manera, por cada apoyo intermedio parcial, deberán agregarse al funcional gobernante los términos que ponen en evidencia la presencia del apoyo. Esto es,

$$\sum_{p=0}^{P-1} \mu_p w_{MN}(x_p, y_p) = 0 \quad (3)$$

Empotramientos Parciales

Los empotramientos parciales sobre los bordes son abordados en forma análoga a los apoyos parciales intermedios. Se considera el empotramiento parcial discretizado en Q puntos equidistantes, a los cuales se le exige que la derivada primera en dirección normal al borde de la placa sea nula. Esto es,

$$w_n(x_q, y_q) = 0 \quad \forall q = 0, 1, 2, \dots, Q-1 \quad (4)$$

siendo

$$w_n(x_q, y_q) = \nabla w(x_q, y_q) \cdot \bar{n}$$

y $\bar{n} = (n_x, n_y)$ es el versor normal al borde empotrado. Luego por cada empotramiento parcial será necesario agregar al funcional los términos que lo pongan en evidencia. Esto es, una expresión de la forma:

$$\sum_{q=0}^{Q-1} \eta_q w_n(x_q, y_q) = 0 \quad (5)$$

Funcional Ampliado

Conocidos ya el funcional gobernante del problema, la secuencia a utilizar y las expresiones que ponen en evidencia los apoyos y empotramientos parciales, introducidas mediante el uso de multiplicadores de Lagrange, el funcional ampliado para una placa rectangular con condiciones de bordes arbitrarias, y apoyos y empotramientos parciales, es:

$$\mathfrak{F}[w] = \mathfrak{F}^*[w] - \sum_{h=1}^{N_x} \sum_{p=0}^{P-1} \mu_p^{(h)} w(x_p^{(h)}, y_p^{(h)}) - \sum_{k=1}^{N_y} \sum_{q=0}^{Q-1} \eta_q^{(k)} w_n(x_q^{(k)}, y_q^{(k)}) \quad (6)$$

en donde h es el número de soportes intermedios y k el número de empotramientos sobre los bordes. Reemplazando w por la expansión w_{MN} , resolviendo los productos internos y aplicando la condición de estacionariedad del funcional ($\delta \mathfrak{F}[w_{MN}] = 0$), se llega al sistema de ecuaciones lineales a partir del cual se encuentran los parámetros de frecuencias buscados, y posteriormente pueden hallarse las formas modales.

EJEMPLOS

Seguidamente se muestra en detalle el procedimiento para el caso de placas sin bordes libres, siendo análogo para placas con bordes libres, excepto por la complejidad algebraica debido a que se debe trabajar con la expresión completa de w_{MN} y del funcional energético.

Placas Sin Bordes Libres

Para el caso particular de una placa rectangular con sus bordes apoyados y/o empotrados, la expresión del desplazamiento transversal w dada por la ecuación (2), una vez impuestas las condiciones de borde:

$$w(x, 0) = w(0, y) = w(x, 1) = w(1, y) = 0 \quad , \quad w'(x, 0) = w'(x, 1) = \bar{w}(0, y) = \bar{w}(1, y) = 0$$

se reduce a:

$$w_{MN} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} S_i S_j \quad (7)$$

y en el funcional energético (6) se anula el segundo término correspondiente a la curvatura de Gauss. Luego, sean N_s y N_e el número de soportes intermedios y empotramientos respectivamente, en donde cada apoyo es discretizado en P puntos y cada empotramiento en Q puntos, el funcional ampliado será:

$$\mathfrak{J}(w) = \|w^r + \lambda^2 \bar{w}\|^2 - \Omega^2 \|w\|^2 - \sum_{h=1}^{N_s} \sum_{p=0}^{P-1} \mu_p^{(h)} w(x_p^{(h)}, y_p^{(h)}) - \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{q=0}^{Q-1} \eta_q^{(k)} w(x_q^{(k)}, y_q^{(k)}) \quad (8)$$

Reemplazando w por la expansión w_{MN} , integrando, e imponiendo la condición de variación primera nula se llega al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \frac{A_{ij} \Delta_{ij}}{4} - \sum_{h=1}^{N_s} \sum_{p=0}^{P-1} \mu_p^{(h)} K_{pij}^{(h)} - \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{q=0}^{Q-1} \eta_q^{(k)} L_{qij}^{(k)} = 0 & \begin{cases} i = 1, 2, \dots, M \\ j = 1, 2, \dots, N \end{cases} & (a) \\ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} K_{pij}^{(h)} = 0 & \begin{cases} p = 0, 1, 2, \dots, P-1 \\ h = 1, 2, \dots, N_s \end{cases} & (b) \\ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} L_{qij}^{(k)} = 0 & \begin{cases} q = 0, 1, 2, \dots, Q-1 \\ k = 1, 2, \dots, N_e \end{cases} & (c) \end{cases} \quad (9)$$

siendo

$$K_{pij}^{(h)} = \alpha_x \cos(\alpha_x x_p^{(h)}) \sin(\alpha_y y_p^{(h)}) \sin(\alpha_j y_p^{(h)})$$

$$L_{qij}^{(k)} = n_x^{(k)} \alpha_x \cos(\alpha_x x_q^{(k)}) \sin(\alpha_j y_q^{(k)}) + n_y^{(k)} \alpha_y \sin(\alpha_x x_q^{(k)}) \cos(\alpha_j y_q^{(k)})$$

Despejando A_{ij} de la (9)(a) y reemplazándolo en las ecuaciones (9)(b) y (c) se llega finalmente al sistema de donde se obtienen las frecuencias buscadas.

$$\begin{cases} \sum_{h=1}^{N_s} \sum_{p=0}^{P-1} \mu_p^{(h)} KK_{pr}^{(h,l)} + \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{q=0}^{Q-1} \eta_q^{(k)} LK_{qr}^{(k,l)} = 0 & \begin{cases} r = 0, 1, 2, \dots, P-1 \\ l = 1, 2, \dots, N_s \end{cases} \\ \sum_{h=1}^{N_s} \sum_{p=0}^{P-1} \mu_p^{(h)} KL_{pr}^{(h,l)} + \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{q=0}^{Q-1} \eta_q^{(k)} LL_{qr}^{(k,l)} = 0 & \begin{cases} r = 0, 1, 2, \dots, Q-1 \\ l = 1, 2, \dots, N_e \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

donde

$$KK_{pr}^{(h,l)} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N K_{pij}^{(h)} K_{rj}^{(l)} \quad LK_{qr}^{(k,l)} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N L_{qij}^{(k)} K_{rj}^{(l)}$$

$$KL_{pr}^{(h,l)} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N K_{pij}^{(h)} L_{rj}^{(l)} \quad LL_{qr}^{(k,l)} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N L_{qij}^{(k)} L_{rj}^{(l)}$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

En las Tablas I, II y III, se muestran los resultados numéricos obtenidos con la metodología propuesta para tres casos que se toman a modo de ejemplo. En primer lugar, la Tabla I, contiene las frecuencias naturales de una placa cuadrada con un apoyo intermedio completo diagonal y diferentes condiciones

de borde. Los resultados son comparados con los obtenidos mediante el Método de los Elementos Finitos utilizando el software comercial ALGOR® y con los hallados por Kim [10] mediante el Método de Rayleigh-Ritz utilizando un conjunto de polinomios ortogonales como funciones de prueba.

MODELO	METODO	AUTOVALORES		
		Ω_1	Ω_2	Ω_3
a) 	MEC	49.34	65.79	98.69
	KIM [10]	49.34	65.80	98.69
	MEF	49.36	69.85	98.74
b) 	MEC	60.53	78.95	114.55
	KIM [10]	60.54	79.03	114.60
	MEF	60.57	78.98	114.62
c) 	MEC	26.41	55.38	65.76
	KIM [10]	26.43	55.41	65.86
	MEF	26.40	55.39	65.71

Tabla I: Frecuencias naturales de placas cuadradas con un apoyo intermedio lineal a lo largo de su diagonal y diferentes condiciones de borde. MEC: $M = N = 300$, $P = 30$, $Q = 90$, $\nu = 0.3$. MEF (ALGOR): malla de 1600 elementos.

La convergencia hacia el autovalor buscado se logra adoptando primeramente un valor fijo de P , es decir se adopta un modelo de apoyo discreto de P puntos equidistantes. Para este modelo se aumenta M y N hasta lograr la exactitud deseada, en dígitos significativos. Este valor, será una cota inferior del autovalor buscado. Luego se aumenta P , con lo que se tiene un nuevo modelo más rígido, y se repite el procedimiento hasta lograr la precisión requerida.

En Tabla II, se muestra el caso de una placa cuadrada con un apoyo intermedio parcial y diferentes condiciones de borde. Los resultados son comparados únicamente con los hallados mediante el MEF (ALGOR®), por cuanto a conocimiento de los autores, no existen antecedentes en la literatura abierta, estudios de soportes intermedios parciales y/o empotramientos parciales con otras metodologías. El caso de un borde parcialmente apoyado, es modelado, considerando ese borde libre al imponer las condiciones de borde a la secuencia extremante, y luego se pone en evidencia el apoyo parcial coincidente con el borde, mediante multiplicadores de Lagrange, en forma análoga a los apoyos intermedios. Cabe destacar que siempre que existan bordes total o parcialmente libres el funcional utilizado incluye los términos correspondientes a la curvatura de Gauss. Por último en Tabla III, se muestra el caso de una placa cuadrada simplemente apoyada en sus cuatro bordes y un apoyo intermedio parcial curvo. Es analizado el caso de un apoyo intermedio parcial curvo de forma de arco de circunferencia. Por el tipo de planteo que se hizo, es muy simple [21-22] considerar cualquier otro tipo de forma para el apoyo intermedio, e incluso combinar apoyos intermedios lineales de diferentes formas (por ejemplo, apoyos rectos con curvos).

CONCLUSIONES

Se mostró una metodología para determinar frecuencias naturales de placas rectangulares delgadas, con precisión (exactitud) arbitraria, mediante el Método del Elemento Completo. La generación de las secuencias utilizadas es sistemática aunque no obvia de hallar [15]. Se destaca del modelo propuesto la generalidad del caso planteado, el cual es muy difícil o imposible de abordar por otras metodologías analíticas. El algoritmo fue desarrollado en una forma general, tal que permite condiciones de bordes

arbitrarias (simplemente apoyados, empotrados o libres, total o parcialmente, y combinaciones), así como apoyos intermedios (rectos o curvos, totales o parciales, o combinaciones). Otra ventaja es que se garantiza la exactitud de los resultados con la precisión deseada.

MODELO	METODO	AUTOVALORES		
		Ω_1	Ω_2	Ω_3
	MEC	30.926	55.620	76.751
	MEF	30.931	55.627	76.745
	MEC	32.72	60.33	78.52
	MEF	32.74	60.37	78.71
	MEC	14.29	42.46	44.62
	MEF	14.31	42.46	44.63

Tabla II: Frecuencias naturales de placas cuadradas con un apoyo intermedio parcial y diferentes condiciones de borde. MEC: $M = N = 300$, $P = 30$, $Q = 15$, $\nu = 0.3$. MEF(ALGOR): malla de 1600 elementos

MODELO	ARCO DE APOYO	MEC (2)			
		Modelo	1	2	3
a) 	$P_0 = (0.50, 0.75)$ $P_1 = (0.25, 0.50)$	MEC	37.05	67.00	84.64
		MEF	37.04	67.06	84.75
b) 	$P_0 = (0.75, 0.50)$ $P_1 = (0.25, 0.50)$	MEC	52.88	87.62	98.75
		MEF	53.00	87.94	99.18
c) 	$P_0 = (0.50, 0.25)$ $P_1 = (0.25, 0.50)$	MEC	95.39	98.89	126.49
		MEF	96.18	99.50	126.72
d) 		MEC	98.898	126.507	132.489
		YOUNG[11]	98.913	126.61	132.64

Tabla III: Frecuencias naturales de placas cuadradas simplemente apoyada en sus bordes y un arco circunferencial de apoyo intermedio. MEC: $M = N = 400$, a) $P = 20$, b) $P = 30$, c) $P = 35$, $P = 40$. MEF (ALGOR) Malla de 1600 elementos. $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$. Radio del arco $r = 0.25$.

REFERENCIAS

- [1] Leissa, A. W. *Vibration of plates*. NASA SP-160. Washington, D.C.: Office of Technology Utilization, NASA. 1969
- [2] Leissa, A. W. *Plate vibration research, 1976-1980: classical theory*. The Shock and Vibration

- Digest, Vol. 13(9), 1981, págs. 11-22.
- [3] **Leissa, A. W.** *Recent studies in plate vibrations 1981-1985 part I : classical theory.* The Shock and Vibration Digest, 1987, Vol. 19(2), Págs. 11-18.
- [4] **Veletsos, A. S. and Newmark N. M.** *Determination of natural frequencies of continuous plates hinged along two opposite edges.* Journal of Applied Mechanics, 1956, Vol. 23, Págs. 97-102.
- [5] **Elishakoff, I. and Sternberg, A.** *Eigenfrequencies of continuous plates with arbitrary number of equal spans.* Journal of Applied Mechanics, 1979, Vol. 46, Págs. 656-662.
- [6] **Wu, C. I. and Cheung, Y. K.** *Frequency Analysis of rectangular plates continuous in one or two directions.* Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1974, Vol. 3, Págs. 3-14.
- [7] **Gorman, D. J.** *Solutions of the Lévy type for the free vibration analysis of diagonally supported rectangular plates.* Journal of Sound and Vibration, 1979, Vol. 66, Págs. 239-246.
- [8] **Li, N. and Gorman, D. J.** *Free vibration analysis of rectangular plates with free edges and line support along diagonals.* American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1992, Vol. 30, Págs. 2351-2353.
- [9] **Takahashi, K and Chishaki, T.** *Free vibrations of a rectangular plate on oblique supports.* Journal of Sound and Vibration, 1979, Vol. 60, Págs. 299-304.
- [10] **Kim, C. S.** *Free vibration of rectangular plates with an arbitrary straight line support.* Journal of Sound and Vibration, 1995, Vol. 180, Págs. 769-784.
- [11] **Young, P. G. and Dickinson, S. M.** *On the free flexural vibration of rectangular plates with straight or curved internal line supports.* Journal of Sound and Vibration, 1993, Vol. 162(1), Págs. 123-135.
- [12] **Rosales, M. B.** *Un método variacional no clásico y sus aplicaciones a estática y dinámica de elementos estructurales.* Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, Argentina, 1997.
- [13] **Filipich, C. P., Rosales, M. B. and Bellés, P. M.** *Natural vibration of rectangular plates considered as tridimensional solids.* Journal of Sound and Vibration, 1998, Vol. 212, Págs. 599-610.
- [14] **Rosales M. B., Filipich C. P. y Escalante M. R.** *Frecuencias arbitrariamente precisas de placas apoyada en sus vértices.* Proceedings del 6^o Congreso Argentino de Mecánica Computacional, CDROM, Mendoza, Argentina, 1999.
- [15] **Filipich, C. P. and Rosales, M. B.** *Arbitrary precision frequencies of a free rectangular thin plate.* Journal of Sound and Vibration, 1999, Vol. 230, Págs. 521-539.
- [16] **Filipich, C. P., Rosales, M. B. And Palma, E. D.** *A one-dimensional advection-diffusion equation solved via an arbitrary precision generalized solution.* Proceedings of the 20th. Iberian Latin-American Congress On Comp. Methods In Eng. (XX CILAMCE), CDROM, San Pablo, Brasil, 1999.
- [17] **Filipich, C. P. and Rosales, M. B.** *A variational solution for an initial conditions problem.* Applied Mechanics Review, 1997, Vol. 50, Págs. S50-S55.
- [18] **Rosales, M. B. and Filipich, C. P.** *Vibraciones de membranas de forma arbitraria a través de una solución generalizada.* Proceedings of the XI Congress on Numerical Methods and their Applications, ENIEF 2000, Bariloche, Argentina, 2000.
- [19] **Filipich, C. P. and Rosales, M. B.** *Dynamic behavior of a uniform linear beam supported with non-linear rotational springs.* Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics (WCCM), Buenos Aires, Argentina. CD-ROM 16 pp. 1999.
- [20] **Rosales, M. B., Filipich, C. P. y Escalante, M. R.** *Comportamiento dinámico de losas rectangulares con apoyos internos.* Proceedings del Congreso de Ingeniería 2000, CDROM, Buenos Aires, Argentina, 2000.
- [21] **Rosales, M. B., Filipich, C. P. y Escalante, M. R.** *Análisis dinámico de placas rectangulares con apoyos lineales intermedios parciales rectos o curvos.* Proceedings of the XI Congress on Numerical Methods and their Applications, pag. 5, ENIEF 2000, Bariloche, Argentina, 2000.
- [22] **Escalante, Mario R.** *Frecuencias naturales de placas rectangulares delgadas con apoyos no convencionales utilizando una solución generalizada.* Tesis de Magister en Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Argentina (en evaluación), 2001.
- [23] **ALGOR Software.** Versión 12.04 WIN 1999. Pittsburg, USA: Algor Inc.