

MECANICA DE VIGAS PRETORSIONADAS CON SECCIONES DE PAREDES DELGADAS, DEFORMABLES POR CORTE CONSTRUIDAS CON MATERIALES COMPUESTOS

Marcelo T. Piovan, Víctor H. Cortínez
Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos,

Universidad Tecnológica Nacional, F.R.B.B, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina.
e-mail: mpiovan@frbb.utn.edu.ar vcortine@frbb.utn.edu.ar

Raúl E. Rossi

Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253- 8000 Bahía Blanca, Argentina

RESUMEN

En este artículo se presenta una teoría de vigas pretorsionadas con secciones de paredes delgadas, construidas con materiales compuestos. La principal característica de esta teoría radica en la representación de las deformaciones por corte, las cuales se consideran en forma completa, es decir por corte flexional y corte por alabeo no uniforme. El modelo se aplica al análisis problemas de estática y de vibraciones libres y se enfoca a partir de la formulación de trabajos virtuales, para luego replantear el aporte energético de los términos de corte en la forma variacional de Reissner. Se emplea un elemento finito acorde con la teoría para efectuar un análisis paramétrico.

ABSTRACT

In this paper a theory of thin-walled pretwisted beams made of composite materials is presented. The principal aspects of this theory are based on the appropriate representation of the shear deformations, which are considered in complete form, i.e. shear due to flexure and shear due to non-uniform warping. The model is developed in order to be able for the analysis of statics and free vibration problems, and it is formulated with the principle of virtual works, but the work of the shear forces is refocused and posed according to the variational principle of Reissner. A finite element solution consistent with the theory is employed in order to do the parametrical analysis.

INTRODUCCION

El estudio estático y dinámico de vigas pretorsionadas es de importancia relevante principalmente para el análisis y diseño de alabes y hélices entre otras aplicaciones de turbo-maquinarias. Consecuentemente, una intensa actividad de investigación se ha llevado a cabo sobre este particular. Específicamente, Subrahmanyam et al. [1] aplicaron el método de Reissner para obtener frecuencias de vibración de vigas pretorsionadas. Por otro lado Downs [2] estudió las variaciones de rigidez flexionales y torsionales debidas a la presencia de pretorsión sobre vigas con secciones asimétricas. Subrahmanyam et al. [3] extendieron la teoría de Vlasov para análisis dinámico torsional de vigas pretorsionadas y de materiales isotropos. Aun así, las precedentes referencias no analizan la

deformabilidad de corte en general, misma que puede tener influencia crucial en determinadas circunstancias. Krenk y Gunneskov [4] elaboraron un modelo que considera solamente la deformabilidad de corte por alabeo torsional no uniforme, despreciando el efecto de la deformabilidad por corte inducida por la flexión. Por otro lado, Subrahmanyam et al.[5] analizan solo la deformabilidad de corte por flexión pero no por alabeo torsional no uniforme. Cortínez y Rossi [6] desarrollaron un modelo que contempla la deformabilidad por corte en forma completa - es decir corte por deformación flexional y corte por alabeo y su respectivo acoplamiento - en vigas con sección de paredes delgadas, siendo válida para los casos de secciones cerradas o bien abiertas. Los precedentes artículos analizan vigas isotrópicas. Aparentemente son escasos los estudios sobre la influencia de la deformabilidad por corte en vigas pretorsionadas de paredes delgadas construidas de materiales compuestos. Algunas investigaciones [7-8] sobre vigas pretorsionadas anisótropas, se han orientado hacia secciones llenas. Así pues, en el presente trabajo se desarrolla una teoría para vigas pretorsionadas que incluye el efecto de deformabilidad por corte en forma completa para materiales compuestos con laminación balanceada simétrica o laminación especialmente ortótropa. Se desarrolla un elemento finito con el cual se evalúan diversas características de laminación y pretorsión. El presente modelo contempla una extensión para incluir efectos de pretorsión en el caso estático de un trabajo previo de los autores [9].

DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA Y CONSTITUTIVA DEL MODELO

En la Figura 1a se describe el elemento estructural con el sistema de referencia dextrógiro en tanto que en la Figura 1b se describe una sección genérica con el sistema de referencia principal $\{C:x,y,z\}$ ubicado en el centroide geométrico de la sección y el sistema de referencia secundario $\{O:x,s,n\}$ solidario a la línea media de la pared de la sección. Cabe destacar que en esta investigación se opta por una referenciación de un polo, a diferencia de la formulación [6] basada en dos polos.

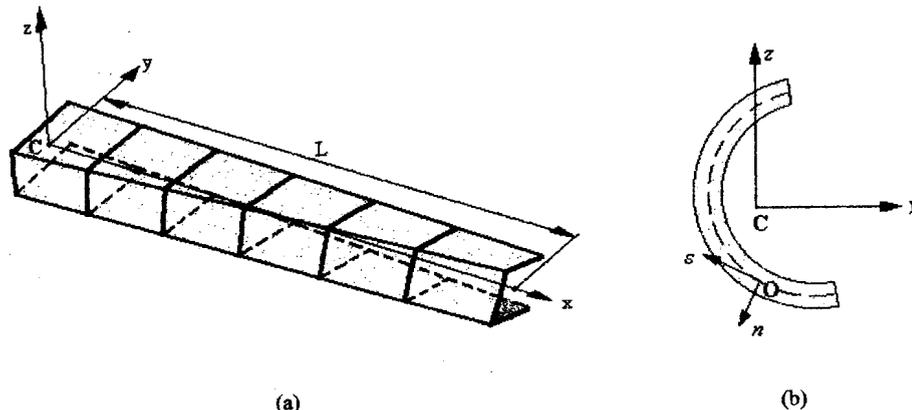


Figura 1. Descripción de la viga pretorsionada y de sus sistemas de referencia

En este modelo de vigas pretorsionadas de paredes delgadas, se efectúan las siguientes hipótesis

- H.1) La sección es indeformable en su plano.
- H.2) La sección se considera compuesta por una sucesión de placas.
- H.3) La función de alabeo se considera con alabeo primario y secundario.
- H.4) Se desprecia el aporte energético de momentos en el plano medio de la pared.
- H.5) Las componentes del tensor de deformaciones: $\varepsilon_{xx}, \gamma_{xs}$ son las más representativas.
- H.6) Se consideran solamente las siguientes componentes del tensor de tensiones σ_{xx}, σ_{xs} .
- H.7) Se supone que la densidad ρ es la misma para todas las láminas de la sección.
- H.8) Las vigas poseen pequeña pretorsión con centro de pretorsión en el centro de referencia C.
- H.9) Se supone que cada segmento de la sección consta del mismo laminado especialmente ortótropo

o bien de laminación simétrica y balanceada.

En estas circunstancias se puede definir el campo de desplazamiento de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_x^L(x, y, z, t) &= u_{xc}(x, t) - \theta_z(x, t) y(s) - \theta_y(x, t) z(s) - \theta_x(x, t) \omega(s, n) \\ u_y^L(x, y, z, t) &= u_{yc}(x, t) - \phi_x(x, t) z(s) \\ u_z^L(x, y, z, t) &= u_{zc}(x, t) + \phi_x(x, t) y(s) \end{aligned} \quad (1)$$

Donde $u_{xc}(x, t)$ es el desplazamiento axial, $\theta_z(x, t)$ y $\theta_y(x, t)$ son las rotaciones flexionales, $u_{yc}(x, t)$ y $u_{zc}(x, t)$ son los desplazamientos transversales de la sección, $\phi_x(x, t)$ es la rotación torsional y $\theta_x(x, t)$ es la variable de alabeo. La función de alabeo $\omega(s, n)$ está normalizada respecto del centro de referencia C y viene dada por la expresión (2):

$$\omega(y, z) = \omega(s, n) = \int_0^s [r(s) - \psi] ds - D_{NC} + nl(s) \quad (2)$$

las funciones $r(s)$, $l(s)$ y la constante D_{NC} se definen de la misma manera que [14]

Deformaciones

Para una viga pretorsionada las deformaciones se pueden representar aproximadamente como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u'_{xc} - \theta'_z y - \theta'_y z - \theta'_x \omega + \underline{\varepsilon_{xsp}} \\ \gamma_{xs} &= 2 \varepsilon_{xs} = (u'_{yc} - \theta_z) \frac{dY}{ds} + (u'_{zc} - \theta_y) \frac{dZ}{ds} + (\phi'_x - \theta_x) \frac{d\omega_p}{ds} + \phi'_x (\psi - 2n) \end{aligned} \quad (3)$$

En (3) el término subrayado define el aporte del efecto de pretorsión a la deformación longitudinal, cuya expresión aproximada es [4,6]:

$$\varepsilon_{xsp} = R_\beta \beta \phi'_x \quad (4)$$

Donde, la tasa de pretorsión se indica con β , mientras que R_β es una función que depende de las coordenadas de la sección transversal y de la ubicación del centro de pretorsión y cuya expresión para este caso se muestra en (5). Se debe tener presente que la deformación ε_{xx} corresponde a la deformación de un filamento helicoidal de la viga.

$$R_\beta = y^2 + z^2 \quad (5)$$

La expresión (5) es estrictamente válida para pequeña pretorsión, con centro de pretorsión ubicado en el centro de referencia C, tal como se estipula en H.8). La forma de (5) es sencilla debido a la selección del sistema de referenciación de un polo. En [6] se pueden obtener mayores detalles sobre la obtención de la función R_β en forma general para ubicaciones arbitrarias de los polos de referencia y del centro de pretorsión.

Relaciones Constitutivas

Las relaciones constitutivas básicas, atendiendo a las hipótesis H.5) y H.6) se pueden escribir en términos de resultantes de tensión en el espesor N_{xx} , N_{xs} , M_{xx} y M_{xs} como:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} & B_{11} & B_{16} \\ A_{16} & A_{66} & B_{16} & B_{66} \\ B_{11} & B_{16} & D_{11} & D_{16} \\ B_{16} & B_{66} & D_{16} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx0} \\ \gamma_{xs0} \\ \varepsilon_{xsp} \\ \gamma_{xsp} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

siendo ε_{xx0} , γ_{xs0} componentes de deformación membranales de (3) en tanto que ε_{xsp} , γ_{xsp} son las

componentes de deformación en el espesor de (3). Para obtener los coeficientes A_{ij} , B_{ij} y D_{ij} en (6) se ha supuesto que las resultantes $N_{SS} = M_{SS} = 0$ para obtener ϵ_{ss} y κ_{ss} en función de ϵ_{xx0} , γ_{xs0} y de ϵ_{xsp} , γ_{xsp} , para luego reinyectar tales expresiones en las restantes ecuaciones constitutivas. Téngase presente que en los casos de laminación tratados en este artículo, se verifica que $B_{ij} = 0$.

Se definen en (7) los siguientes esfuerzos en el área de la sección: *Esfuerzo Normal* (Q_x), los *Momentos Flexores* (M_x y M_y), el *Bimomento* (B), el *Momento Torsor de Saint Venant* (T_{SV}), el *Momento Flexotorsor* (T_W), el *Momento de Pretorsión* (T_β), el *Momento Torsor Total* (M_x), y los *Esfuerzos de Corte* (Q_y y Q_z).

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_S N_{xx} ds, \quad Q_y = \int_S \left(N_{xs} \frac{dy}{ds} \right) ds, \quad Q_z = \int_S \left(N_{xs} \frac{dz}{ds} \right) ds, \\ T_W &= \int_S \left(N_{xs} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) ds, \quad T_{SV} = \int_S (N_{xs} \psi - 2M_{xx}) ds, \quad T_\beta = \int_S (N_{xx} R_\beta \beta) ds, \quad M_x = T_W + T_{SV} + T_\beta \\ M_y &= \int_S (N_{xx} Z + M_{xx} \frac{dy}{ds}) ds, \quad M_z = \int_S (N_{xx} Y - M_{xx} \frac{dz}{ds}) ds, \quad B = \int_S (N_{xx} \omega_p + M_{xx} l(s)) ds \end{aligned} \quad (7)$$

De tal forma que las relaciones constitutivas pueden quedar representadas de la siguiente forma

$$\{N\} = [A]\{A\} = \left([A^{(0)}] + [A^{(2)}] \right) \{A\} \quad (8)$$

siendo por un lado

$$\begin{aligned} \{N\} &= \{Q_x, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_W, T_{SV}, T_\beta\}^T \\ \{A\} &= \{u'_{xc}, -\theta'_y, -\theta'_z, -\theta'_x, u'_{yc}, -\theta'_z, u'_{zc}, -\theta'_y, \phi'_x, -\theta'_x, \phi'_x, \phi'_x\} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [A^{(0)}] &\rightarrow [A_{ij}^{(0)kh}] = \int_S A_{kh} \bar{g}_i^{(a)} \bar{g}_j^{(a)} ds \\ [A^{(2)}] &\rightarrow [A_{ij}^{(2)kh}] = \int_S D_{kh} \bar{g}_i^{(c)} \bar{g}_j^{(c)} ds \end{aligned} \quad (10)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{g}^{(a)} &= \left\{ l, Z, Y, \omega_p, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}, r - \psi, \psi, R_\beta \beta \right\} \\ \bar{g}^{(c)} &= \left\{ 0, \frac{dY}{ds}, -\frac{dZ}{ds}, l(s), 0, 0, 1, -2, 0 \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Debido a que las vigas están construidas con un laminado especialmente ortótropo o uno simétrico balanceado para cada segmento de la sección, en las ecuaciones constitutivas (10) no se verificará acoplamiento entre los esfuerzos de corte y los esfuerzos normales, sin embargo debido a la pretorsión existirá acoplamiento entre los esfuerzos normales y los esfuerzos torsionales. Por otro lado se presenta también un acoplamiento entre los esfuerzos de corte (Q_y y Q_z) y el momento flexotorsor (T_W) debido exclusivamente a la formulación cinemática adoptada, tal como fuera explicado en [10], sin embargo si la sección es bisimétrica, no se manifestará acoplamiento constitutivo alguno entre los esfuerzos de corte y el momento flexotorsor.

FUNCIONAL ENERGETICO DEL MODELO

Las ecuaciones de movimiento de la viga pretorsionada se pueden obtener a partir de la expresión de trabajos virtuales como sigue:

$$\int \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int (\bar{X}_i - \rho \ddot{u}_i^t) \delta u_i^t dV = 0 \quad (12)$$

Así pues reemplazando en (14) las expresiones (1), (3), (4), teniendo en cuenta (7), a (11) se obtiene:

$$\int \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int \left(Q_x \delta u'_{xc} - M_y \delta \theta'_y - M_z \delta \theta'_z - B \delta \theta'_x + T_{sv} \delta \phi'_x + T_\beta \delta \phi'_z \right) dx + \int \left[Q_y \delta (u'_{yo} - \theta_z) + Q_z \delta (u'_{zo} - \theta_y) + T_w \delta (\phi'_x - \theta'_x) \right] dx \quad (13)$$

$$- \int \bar{X}_i \delta u'_i dV = - \int \left[q_x \delta u_{xc} + q_y \delta u_{yc} + q_z \delta u_{zc} + m_\phi \delta \phi_x \right] dx - \int \left[-m_z \delta \theta_z - m_y \delta \theta_y - m_\omega \delta \theta_x \right] dx \quad (14)$$

$$\int \rho \ddot{u}_i^L \delta u_i^L dV = \int \left[J_{11}^\rho (\ddot{u}_{yc} \delta u_{yc} + \ddot{u}_{zc} \delta u_{zc} + \ddot{u}_{xc} \delta u_{xc}) + J_{00}^\rho \ddot{\phi}_x \delta \phi_x \right] dx + \int \left[J_{22}^\rho \ddot{\theta}_y \delta \theta_y + J_{33}^\rho \ddot{\theta}_z \delta \theta_z + J_{23}^\rho (\ddot{\theta}_y \delta \theta_z + \ddot{\theta}_z \delta \theta_y) \right] dx \quad (15)$$

$$+ \int \left[J_{24}^\rho (\ddot{\theta}_y \delta \theta_x + \ddot{\theta}_x \delta \theta_y) + J_{34}^\rho (\ddot{\theta}_z \delta \theta_x + \ddot{\theta}_x \delta \theta_z) + J_{44}^\rho \ddot{\theta}_x \delta \theta_x \right] dx$$

En (15) se han definido las siguientes integrales:

$$J_{ij}^\rho = \int \rho \tilde{g}_i^{(a)} \tilde{g}_j^{(a)} dS, \quad J_{00}^\rho = \int \rho \left[\tilde{g}_2^{(a)} \tilde{g}_2^{(a)} + \tilde{g}_3^{(a)} \tilde{g}_3^{(a)} \right] dS \quad (16)$$

que representan la inercia de traslación axial y/o lateral (J_{11}^ρ), la inercia de rotación torsional (J_{00}^ρ), las inercias rotatorias flexionales (J_{22}^ρ y J_{33}^ρ) y la inercia rotatoria por alabeo torsional (J_{44}^ρ) respectivamente, mientras que el resto son inercias de acoplamiento. En (14) se han introducido las siguientes funciones de carga distribuidas en la longitud de la viga: carga axial $q_x(x,t)$, cargas flexionales en las direcciones y y z , $q_y(x,t)$ y $q_z(x,t)$, momento torsor $m_\phi(x,t)$, momentos flectores en las direcciones z e y $m_z(x,t)$ y $m_y(x,t)$ y bimomento distribuido $m_\omega(x,t)$. Es claro que las expresiones (13), (14) y (15) corresponden a los trabajos virtuales debidos a esfuerzos en el área, a fuerzas externas y fuerzas inerciales respectivamente. Las ecuaciones diferenciales de equilibrio y condiciones de borde se pueden obtener aplicando las reglas convencionales del cálculo de variaciones a la expresión (13).

ENFOQUE CONSTITUTIVO DE REISSNER PARA LOS ESFUERZOS DE CORTE

El funcional energético de Reissner [10], se puede descomponer en dos partes: una parte es coincidente con la expresión (12) del Principio de Trabajos Virtuales, la otra parte es una expresión variacional de las relaciones constitutivas. El principio variacional de Reissner al permitir la variación independiente de los desplazamientos y de las tensiones (representadas en términos de las resultantes de tensión en el espesor), posibilita una descripción más refinada de las ecuaciones constitutivas, especialmente en los esfuerzos de corte, tal como fue apuntado por Cortínez y Rossi [11] para vigas rectas isótropas y por Cortínez y Piovan [9] para vigas rectas ortótropas. De acuerdo con estos últimos artículos se pueden obtener los esfuerzos de corte a partir de la siguiente expresión constitutiva:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ T_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ A_{56} & A_{66} & A_{67} \\ A_{57} & A_{67} & A_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{yc} - \theta_z \\ u'_{zc} - \theta_y \\ \phi'_x - \theta_x \end{Bmatrix} = a_{66} \begin{bmatrix} \int_0^s \frac{e\lambda_3^2 ds}{J_{33}^2} & \int_0^s \frac{e\lambda_3 \lambda_2}{J_{33} J_{22}} ds & \int_0^s \frac{e\lambda_3 \lambda_4}{J_{33} J_{44}} ds \\ \int_0^s \frac{e\lambda_2 \lambda_3}{J_{33} J_{22}} ds & \int_0^s \frac{e\lambda_2^2}{J_{22}^2} ds & \int_0^s \frac{e\lambda_4 \lambda_2}{J_{22} J_{44}} ds \\ \int_0^s \frac{e\lambda_3 \lambda_4}{J_{33} J_{44}} ds & \int_0^s \frac{e\lambda_4 \lambda_2}{J_{22} J_{44}} ds & \int_0^s \frac{e\lambda_4^2}{J_{44}^2} ds \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u'_{yc} - \theta_z \\ u'_{zc} - \theta_y \\ \phi'_x - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (17)$$

siendo a_{66} el modulo de elasticidad transversal resultante del laminado y los J_{ij} y λ_i vienen dados por

$$J_{ij} = \int_A \tilde{g}_i^{(e)} \tilde{g}_j^{(e)} dA, \quad \text{con } \tilde{g}^{(e)} = \{l, z, y, \omega_p\} \quad (18)$$

$$\lambda_3(s) = \int Y(s) ds, \quad \lambda_2(s) = \int Z(s) ds, \quad \lambda_4(s) = \int \omega(s) ds$$

Las $\lambda_i(s)$ son claramente funciones momentos de primer orden de la sección. Se debe destacar que la incorporación de la expresión (17) es semejante a la utilización de factores de corte en la Teoría de vigas de Timoshenko. La utilización de ecuaciones constitutivas mejoradas (o aplicación de coeficientes de corte acordes al problema) reviste mayor importancia en vigas ortótropas y anisótropas que en el caso de vigas isótropas.

FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

Para resolver numéricamente las ecuaciones formuladas se ha utilizado el elemento previamente desarrollado por los autores para el análisis dinámico de vigas pretorsionadas isótropas [6]. El elemento consta de dos nodos con 7 grados de libertad en cada uno de ellos. Estos grados de libertad corresponden a los desplazamientos generalizados: $u_{xc}, u_{yc}, u_{zc}, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \phi_x$ los cuales se interpolan a lo largo del elemento con funciones de primer grado para u_{xc} , de segundo grado para $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ y de tercer grado para u_{yc}, u_{zc} y ϕ_x de acuerdo como se explica en [6].

EJEMPLOS NUMERICOS

Con el fin de mostrar la importancia de la flexibilidad por corte en la mecánica del tipo de elementos estructurales tratados en el artículo y de la eficiencia del elemento propuesto, se analiza el comportamiento de una viga de sección rectangular de altura $h = 0.3$ m., de ancho $b = 0.6$ m y espesor $e_A = 0.03$ m, la cual es construida de grafito-epoxy AS4/3501-6, de propiedades son $E_{11} = 141.96$ GPa, $E_{22} = 9.79$ GPa, $G_{12} = 6.00$ GPa, $G_{23} = 4.83$ GPa, $\nu_{12} = 0.24$ y $\nu_{23} = 0.5$.

Así pues en la Tabla I se muestra la convergencia del elemento finito para el caso de vibraciones libres de una viga pretorsionada de longitud $L = 6$ m., con un extremo empotrado y el otro libre, con un ángulo de pretorsión total de $\pi/6$ radianes y con una secuencia de laminación $\{0/0/0/0\}$ en cada uno de los segmentos de la sección.

Frecuencia Natural	Número de elementos			
	5	10	20	30
f_1	18.042	18.029	18.027	18.027
f_2	29.937	29.896	29.888	29.885
f_3	54.471	53.725	53.502	53.397
f_4	73.235	72.309	72.135	72.074
f_5	118.353	116.605	116.266	116.146

Tabla 1. Análisis de convergencia del elemento finito

En la Tabla 2 se muestran las primeras cinco frecuencias acopladas para una viga empotrada libre con una secuencia de laminación $\{0/90/90/0\}$ y $\{0/0/0/0\}$. Se analiza por un lado la influencia del efecto de corte, comparando los resultados obtenidos con la teoría que considera la flexibilidad por corte y los resultados de la teoría que desprecia tal efecto. Por otro lado se pondera la influencia del ángulo de pretorsión (βL) en la dinámica de estos miembros estructurales.

h/L	βL	Teoría	frecuencias [Hz]				
			f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
12	0	I	5,02327	8,46192	25,8703	28,0536	43,2323
		II	5,24176	8,84978	32,8506	55,4624	92,0031
	$\pi/6$	I	5,03483	8,40362	26,0716	26,7402	42,494
		II	5,25255	8,79521	33,143	54,6914	93,3559
6	0	I	17,9803	30,1456	56,3786	71,7817	118,971
		II	20,9671	35,3991	131,402	221,849	368,012
	$\pi/6$	I	18,0298	29,8958	53,7249	72,3094	116,605
		II	21,0102	35,1808	132,572	218,765	373,423
4	0	I	34,9709	58,3755	84,9628	121,298	200,326
		II	47,1759	79,648	295,655	499,16	637,025
	$\pi/6$	I	35,0785	57,8246	80,9525	122,289	195,851
		II	47,273	79,1568	298,286	492,221	637,025

Tabla 2. Influencia de la Flexibilidad por corte y el ángulo de pretorsión
[I] Teoría con Flexibilidad por Corte [II] Teoría sin Flexibilidad por Corte

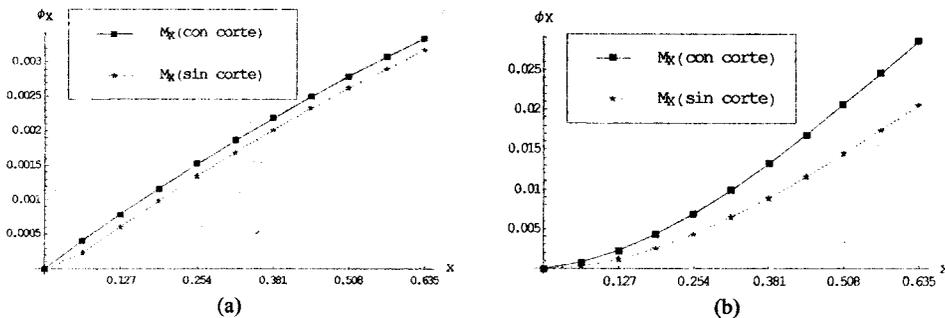


Figura 2. Influencia de la flexibilidad por corte en la pretorsión para secciones (a) cerradas (b) abiertas

En las Figura 2 a,b se muestran las rotaciones torsionales a lo largo de la viga, comparando las formulaciones con y sin flexibilidad por corte en cuanto a su influencia sobre la pretorsión. Se ha adoptado una viga cantilever construida con Grafito-Epoxy AS4/3501-6 y laminados de $\{0_2/\pm 15\}_s$, de longitud 0.635 m, con un ángulo de pretorsión de $\pi/9$, sometida bajo la carga de un par torsor de 200 N.m en el extremo libre. Así pues, en la Figura 2a se puede apreciar la diferencia entre ambas formulaciones para una sección rectangular de dimensiones $h = 0.063$ m, $b = 0.127$ m., $e_A = 5$ mm. La máxima diferencia generada entre ambas formulaciones es del orden de 4%. En cambio para secciones torsionalmente más flexibles como una sección H de dimensiones $h = 0.127$ m. $b = 0.127$ m. y $e_A = 5$ mm. la máxima diferencia entre ambas formulaciones es del orden 28%. Esto muestra la necesidad de incluir la flexibilidad por corte debida al alabeo torsional no uniforme en el análisis de vigas pretorsionadas con secciones abiertas.

CONCLUSIONES

Se ha presentado una teoría nueva para el análisis dinámico y estático de vigas pretorsionadas con secciones de paredes delgadas contruidas con materiales compuestos, la cual considera en forma completa el efecto de flexibilidad por corte. Del estudio se desprende que la flexibilidad por corte afecta grandemente la respuesta dinámica de estos miembros estructurales, la que produce diferencias mayores al 30 % en las frecuencias superiores. Por otro lado se ha mostrado la influencia de la flexibilidad por corte debida al alabeo torsional no uniforme en la mecánica de la vigas pretorsionadas. El modelo matemático aquí presentado corresponde a una extensión al ámbito de materiales compuestos de la teoría desarrollada previamente en [6], así mismo contiene como caso particular al modelo desarrollado en [13] cuando no existe pretorsión.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaria de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y del CONICET.

REFERENCIAS

- [1] **K.B.Subrahmanyam, S.V.Kulkarni y J.S.Rao**, *Coupled bending-torsion vibrations of rotating blades of asymmetric aerofoil cross section with allowance for shear deflection and rotary inertia by use of the Reissner Method*, Journal of Sound and Vibration 75, 1981 pp.17-36.
- [2] **B.Downs**, *The effect of substantial pretwist on the stiffness properties of thin beams of cambered section*, Journal of Applied Mechanics, 46, 1979 pp.341-344.
- [3] **K.B. Subrahmanyam y K.R.Kaza**, *Finite difference analysis of torsional vibration of pretwisted, rotating cantilever beams with effects of warping*, Jou. of Sound and Vibration 99,1985 pp.213-234.
- [4] **S.Krenk y O.Gunneskov**, *Statics of thin walled pretwisted beams*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 17, 1981 pp.1407-1426.
- [5] **K.B.Subrahmanyam, S.V.Kulkarni y J.S.Rao**, *Application of the Reissner method to derive the coupled bending-torsion equation of dynamic motion of rotating pretwisted cantilever blading with allowance for shear deflection, rotary inertia, warping and thermal effects*, Journal of Sound and Vibration 84, 1982. pp. 223-240.
- [6] **V.H. Cortínez y R.E. Rossi**, "Vibrations of pretwisted thin-walled beams with allowance for shear deformability", *Proceedings IV World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires (1998)*.
- [7] **Yildirim V.** *Governing Equations of Initially Twisted Elastic Space Rods Made of Laminated Composite-Materials*. International Journal Engineering Sciences, Vol 37(8), 1999. pp 1007-1035.
- [8] **Armarios E.A, Makeev, A. y Hooke D.** *Finite displacement analysis of laminated composite strips with extension-twist coupling*. Jou. Aerospace Engineering (ASCE) Vol.9(3) 1996. pp.80-91
- [9] **V.H. Cortínez y M.T.Piovan**, *Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability, enviada para su publicación 2000*.
- [10] **Fung, Y.C.** *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, New Delhi. 1968.
- [11] **Cortínez, V.H. y Rossi, R.E.** *Dinámica de Vigas con Secciones Abiertas de Paredes Delgadas deformables por corte sujetas a un estado inicial de tensiones*. Revista Internacional de Métodos Numericos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería Vol.14(3) 1998. pp.293-316.
- [12] **Cortínez, V.H., M.T.Piovan y Rossi, R.E.** *Análisis estático de vigas rectas de paredes delgadas construidas con materiales ortótropos*. MECOM 99. Mendoza 6-10 septiembre 1999
- [13] **M.T.Piovan, Cortínez, V.H. y Rossi, R.E.** *Estática y dinámica de vigas anisótropas de paredes delgadas deformables por corte*. ENIEF 2001. Córdoba, Noviembre 2001.