

CONSIDERACION DE LAS DEFORMACIONES POR CORTE E INERCIA ROTACIONAL EN EL ANALISIS DINAMICO DE PORTICOS Y TABIQUES.

Pablo J. Sanchez, Victorio E. Sonzogni
CIMEC (INTEC), UNL-Conicet, Güemes 3450, 3000 Santa Fe.
GIADE,UTN, FRSF, Lavaisse 610 - (3000) Santa Fe
e-mail: psanchez@intec.unl.edu.ar, sonzogni@intec.unl.edu.ar

RESUMEN

El análisis de pórticos planos con elementos de gran rigidez para edificios en altura, requiere, por lo general, la consideración de factores comúnmente despreciados al momento de formular las matrices a nivel elemental.

Se describe aquí el desarrollo de un programa de análisis de respuesta estática y dinámica, basado en el modelo de viga de Timoshenko en el plano, en el cual se consideran deformaciones por flexión, corte y esfuerzo normal, planteando una matriz de masa consistente que incluye los efectos de la inercia de rotación de la sección transversal. Además es posible definir tramos rígidos de longitud finita en los extremos del elemento para el modelado de sistemas pórtico-tabique. Posee un entorno gráfico amigable y puede ser utilizado como herramienta didáctica permitiendo incluir modificaciones al modelo original. Se discute la influencia de los factores mencionados, en el análisis estático, vibraciones libres no amortiguadas y respuesta dinámica transitoria determinística, comparando con soluciones obtenidas mediante el empleo de modelos en estado plano de tensión.

ABSTRACT

The analysis of plane frames with elements of great rigidity for tall buildings requires, in general, to take into account some factors which are usually disregarded when computing the element matrices.

In this work, a computer code for the static and dynamic analysis of the building response is described. The model is based on Timoshenko beam, including axial, flexural and shear deformations, with a consistent mass matrix including the effects of rotational inertia of the cross section. Rigid portions, as well as hinges, may be included at the element ends. The element is able to model frame structures uncluding shear walls. The code provides a user friendly interface and may be used for eduactional purposes allowing to include new capabilities. The influence of factors affecting the response of frames with shear walls in static and dynamic response, as well as in free vibrations, is discussed. Results with finer finite element models are used for comparison purposes.

INTRODUCCION

En el presente trabajo se describe brevemente la implementación de un programa matricial cuya finalidad es el análisis de respuesta estática y dinámica determinística para una tipología estructural muy común en el ámbito de la ingeniería civil: "las estructuras de barras en el plano". El mismo se encuentra en una etapa intermedia, de verificación, siendo el objetivo final la incorporación de modelos no lineales que ofrecen resultados más satisfactorios ante situaciones extremas como sismos severos o destructivos.

Se ha desarrollado íntegramente en Matlab, posee un entorno interactivo amigable y un numeroso conjunto de herramientas de post-procesamiento para obtener resultados gráficos en tensiones y desplazamientos interiores al elemento.

Puede ser utilizado también como herramienta didáctica en diversas cátedras de análisis estructural ya que posibilita acceder fácilmente a las rutinas de cálculo, modificar el modelo original, agregar nuevos módulos de análisis o bien incluir factores no considerados inicialmente.

Básicamente está compuesto por tres módulos de cálculo:

- Módulo de respuesta estática.
- Módulo de análisis modal.
- Módulo de análisis de respuesta dinámica determinística.

La respuesta transiente puede obtenerse por dos métodos clásicos:

- Integración directa de las ecuaciones de movimiento dinámico mediante el algoritmo de Bossak-Newmark.
- Superposición modal, en donde cada ecuación escalar desacoplada se resuelve numéricamente utilizando el mismo algoritmo anterior.

DISCRETIZACION ESPACIAL

Para la solución numérica vía elementos finitos, es necesario formular el problema en términos de un número finito de grados de libertad.

La discretización puede realizarse a diferentes niveles, adoptándose aquí un nivel intermedio en donde cada elemento de la estructura (viga, columna, tabique) se representa con un elemento finito en el modelo numérico. De esta forma es posible analizar estructuras de tamaño moderado con un costo y precisión razonable.

El concepto básico del MEF consiste en reemplazar la función solución en desplazamientos $u(x,t)$ del problema dinámico continuo por una solución aproximada obtenida como combinación lineal de funciones de forma conocidas y parámetros incógnitas que varían en el tiempo, tal función puede expresarse:

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{i=1}^n f_{i(x)} a_{i(t)} = \mathbf{f}^T(x) \mathbf{a}(t) \tag{1}$$

en donde $\mathbf{f}^T(x)$ es un vector columna conteniendo n funciones conocidas, y $\mathbf{a}(t)$ es un vector columna que contiene n coeficientes incógnitas.

Según la teoría clásica de Bernoulli-Navier, las ecuaciones diferenciales de equilibrio dinámico para un elemento de viga toman la siguiente forma [1]:

- para desplazamientos transversales:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q \tag{2}$$

- para desplazamientos longitudinales:

$$AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p \tag{3}$$

El procedimiento habitual en elementos finitos indica sustituir la función aproximada propuesta en las ecuaciones diferenciales, el residuo originado se integra en el dominio del elemento ponderándolo con adecuadas funciones de peso. Igualando tal expresión a cero, considerando que las propiedades físicas y mecánicas son constantes en el interior del elemento e integrando por partes para obtener la forma débil de la ecuación diferencial se llega a la ecuación de movimiento semidiscreta:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_L^E \underline{\underline{\mathbf{U}}}_L^E + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_L^E \ddot{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}_L^E = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{EQ}^E \tag{4}$$

Los puntos indican ordenes de diferenciación con respecto al tiempo.

Cada término a nivel elemental está expresado en coordenadas locales y tiene el siguiente significado:

- vector desplazamiento del elemento:

$$\underline{U}_L^E = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T \quad (5)$$

- matriz de rigidez del elemento (desplazamientos transversales):

$$\underline{K}_L^E = EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \underline{f}_F^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \underline{f}_F}{\partial x^2} \right) dx \quad (6)$$

- matriz de rigidez del elemento (desplazamientos longitudinales):

$$\underline{K}_L^E = AE \int_0^L \left(\frac{\partial \underline{f}_A^T}{\partial x} \frac{\partial \underline{f}_A}{\partial x} \right) dx \quad (7)$$

- matriz de masa consistente elemental:

$$\underline{M}_L^E = \rho A \int_0^L (\underline{f} \underline{f}^T) dx \quad (8)$$

- vector de cargas nodales equivalentes del elemento:

$$\underline{F}_{EQ}^E = \int_0^L (\underline{f} p) dx \quad (9)$$

El vector \underline{f} está compuesto por \underline{f}_F y \underline{f}_A (vectores de funciones de forma para desplazamientos por flexión y por sollicitación axial respectivamente).

FUNCIONES DE FORMA

En elementos de pórtico plano, si se desprecian las deformaciones por corte, se utilizan por lo general funciones polinómicas de tercer grado (denominadas polinomios de Hermite) para interpolar los desplazamientos transversales. Dichas funciones corresponden a la deformación real de un elemento prismático con propiedades constantes en toda su longitud, sin cargas en el interior y para problemas estáticos lineales. Si se tienen en cuenta las distorsiones por esfuerzo cortante, tales polinomios admiten una corrección incorporando un término adicional dependiente del factor de forma de la sección transversal.

En dinámica, con propiedades inerciales distribuidas en toda la longitud del elemento, generalmente no es posible expresar los desplazamientos internos en función de los desplazamientos nodales mediante funciones espaciales exclusivamente. Sin embargo, como la masa de los elementos no estructurales (supuestas concentradas) es relativamente mayor que la masa del propio pórtico, las funciones espaciales pueden utilizarse para el análisis de respuesta dinámica con un nivel de precisión razonable.

En la matriz de masa se propone también considerar la inercia de rotación que induce el giro de una sección cualquiera del elemento. Para ello deben agregarse un conjunto de funciones que contemplen la deformación en dirección longitudinal asociada a la flexión.

A continuación se indican las funciones de interpolación utilizadas para los desplazamientos transversales y longitudinales, obtenidas de [2]:

$$\underline{f}_F = [\underline{f}_R \quad \underline{f}_T] \quad (11)$$

en donde \underline{f}_R y \underline{f}_T son vectores que contienen las funciones de forma para incluir la rotación de la sección y los desplazamientos normales de la misma con respecto al eje neutro respectivamente. Sus expresiones analíticas se indican a continuación:

$$\mathbf{f}_R = \frac{1}{1+\phi} \begin{bmatrix} 6 \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) \eta \\ \left[-1 + 4 \frac{x}{L} - 3 \frac{x^2}{L^2} - \left(1 - \frac{x}{L} \right) \phi \right] L \eta \\ 6 \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right) \eta \\ \left(2 \frac{x}{L} - 3 \frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \phi \right) L \eta \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{f}_T = \frac{1}{1+\phi} \begin{bmatrix} -6 \frac{x}{L^2} + 6 \frac{x^2}{L^3} + \frac{1}{L} \phi \\ \left[\frac{1}{L} - 4 \frac{x}{L^2} + 3 \frac{x^2}{L^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} - 2 \frac{x}{L^2} \right) \phi \right] L \\ 6 \frac{x}{L^2} - 6 \frac{x^2}{L^3} + \frac{1}{L} \phi \\ \left[-2 \frac{x}{L^2} + 3 \frac{x^2}{L^3} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} - 2 \frac{x}{L^2} \right) \phi \right] L \end{bmatrix} \quad (13)$$

además se ha definido:

$$\phi = \frac{12EI}{GAL^2} \chi \quad (14)$$

$$\eta = \frac{y}{L} \quad (15)$$

χ : factor de forma de la sección
 y : distancia al eje neutro de la sección

Con respecto a los desplazamientos en la dirección del eje del elemento son suficientes, en la mayoría de los casos, funciones de variación lineal:

$$\mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Definidas las expresiones analíticas de las funciones de interpolación es posible evaluar las ecuaciones (6), (7), (8) y (9) a nivel elemental.

A su vez, éstas ecuaciones admiten correcciones adicionales que posibilitan la definición de extremos rígidos y rótulas perfectas en los extremos del elemento, para poder modelar sistemas pórtico-tabique y estructuras articuladas.

CARACTERÍSTICAS DEL ELEMENTO

La formulación básica parte de la teoría clásica de vigas, sin embargo mediante una adecuada selección de las funciones de forma fue posible incluir los efectos de la inercia de rotación y las deformaciones por corte, es decir, el modelo de viga de Timoshenko en el plano.

Los segmentos AC y DB (figura 1) son infinitamente rígidos con el objeto de representar conexiones de dimensión finita.

El tramo central CD es rectilíneo, con propiedades mecánicas y físicas constantes, admite un comportamiento elástico capaz de deformarse debido a flexión, corte y esfuerzo normal.

Existe la posibilidad de definir dispositivos de discontinuidad de solicitaciones en los extremos (rótulas).

Con respecto a las propiedades inerciales, la masa del elemento se puede tener en cuenta mediante la formulación de una matriz de masa consistente, o bien una matriz diagonal a partir de la matriz consistente. Es posible agregar masa no estructural concentrándola en cualquier grado de libertad. El elemento admite cargas estáticas y dinámicas de variación lineal en sentido normal y/o tangencial a su eje, en toda o una fracción del tramo flexible.

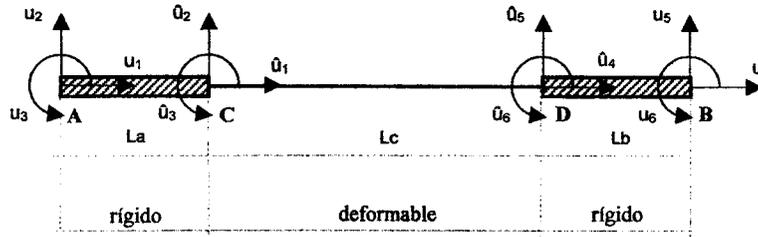


Figura 1: modelo mecánico del elemento

PROPIEDADES DISIPATIVAS

Se asume un mecanismo de disipación de energía homogéneo en toda la estructura y que existe proporcionalidad entre las fuerzas no conservativas y la velocidad (amortiguamiento viscoso equivalente).

La matriz de amortiguamiento se formula a nivel global de forma tal que verifique condiciones de ortogonalidad respecto a la matriz modal (amortiguamiento proporcional) mediante dos procedimientos alternativos [3]:

- amortiguamiento generalizado de Rayleigh (series numéricas de Caughey)
- evaluación modal directa (método de Wilson y Penzien)

MODULOS IMPLEMENTADOS

Sumando las contribuciones de rigidez, masa y carga que aporta cada elemento en cada grado de libertad global, se obtiene así la ecuación matricial que gobierna el movimiento de la estructura completa:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{P}} \quad (17)$$

que representa la expresión fundamental a partir de la cual pueden obtenerse las ecuaciones básicas para cada módulo de análisis implementado.

Módulo de análisis estático

Supone que no existe variación temporal sensible de las cargas actuantes y en consecuencia no se inducen fuerzas inerciales ni viscosas.

Se resuelve un sistema algebraico lineal del tipo:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{P}} \quad (18)$$

Módulo de análisis modal

Representa la solución al problema de vibraciones libres no amortiguadas del sistema dinámico. Básicamente consiste en encontrar un número determinado de formas modales no triviales asociadas al sistema homogéneo:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{0}} \quad (19)$$

que matemáticamente representa un problema de autovalores y autovectores.

Módulo de análisis transitorio

Obtiene la historia de respuesta de la estructura resolviendo numéricamente la ecuación completa. Como se mencionó, se proponen dos procedimientos: integración directa de las ecuaciones de movimiento dinámico (esquema implícito) y superposición modal.

Post-procesamiento

A partir del patrón de desplazamientos calculado por cualquiera de los módulos es posible conocer otras variables que definen el estado mecánico de la estructura analizada, como por ejemplo tensiones y desplazamientos en extremos o en el interior de los elementos, utilizando expresiones de la estática clásica [4]. Para tal fin se ha desarrollado un gran número de rutinas de post-procesamiento.

CASOS DE PRUEBA

Primeramente se analiza la influencia sobre la rigidez global al considerar las deformaciones por esfuerzos cortantes y definición de tramos rígidos. Para ello se calculan los desplazamientos nodales de la estructura indicada en la figura 2-a, sometida a cargas estáticas, comparándolos con aquellos obtenidos modelando la misma con elementos en estado plano de tensión EPT (figura 2-c) utilizando el sistema Samcef [5]. Cada elemento de viga se modela en correspondencia con el eje geométrico de la estructura.

A continuación se indican las características de la estructura y propiedades elásticas de cada elemento:

Tabla I: propiedades físicas y mecánicas de los elementos

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
Area [m ²]	0.30	0.30	0.30	0.08	0.08	0.08	0.30	0.30	0.30
Inercia [m ⁴]	0.05625	0.05625	0.05625	1.066e-3	1.066e-3	1.066e-3	0.05625	0.05625	0.05625
Factor γ	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20
E [N/m ²]	3e10	3e10	3e10	3e10	3e10	3e10	3e10	3e10	3e10
G [N/m ²]	1.25e10	1.25e10	1.25e10	1.25e10	1.25e10	1.25e10	1.25e10	1.25e10	1.25e10
ρ [kg/m ³]	2400	2400	2400	2400	2400	2400	2400	2400	2400

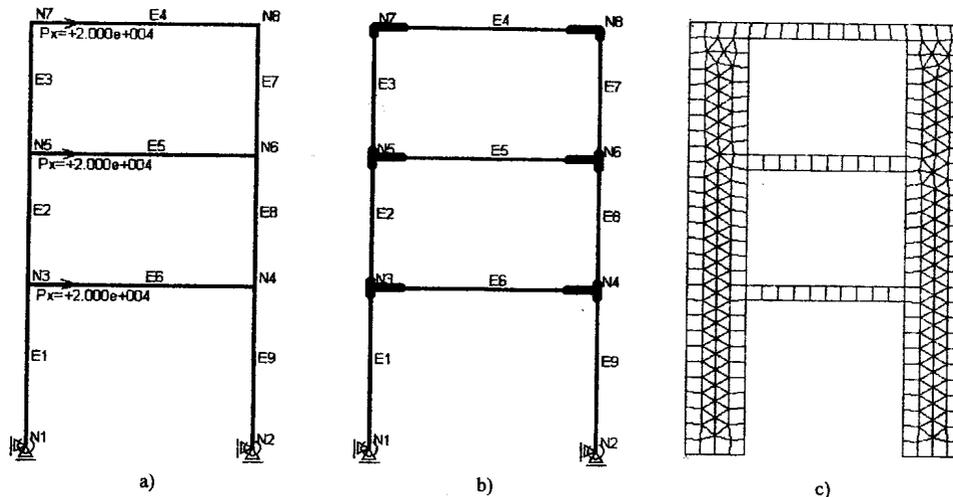


Figura 2: a) modelo con elementos de viga, b) definición de tramos rígidos, c) elementos en EPT

Se obtuvieron tres soluciones distintas para el análisis estático que incorporan secuencialmente los factores en estudio:

Solución "a": modelo clásico de vigas esbeltas de Bernoulli-Navier.

Solución "b": idem solución "a" agregando deformaciones por corte.

Solución "c": idem solución "b" agregando definición de tramos rígidos en los elementos (figura 2-b).

Tabla II: resultados análisis estático

Número Nodo	EPT	Solución a		Solución b		Solución c	
	[m]	[m]	$\xi_{r(EPT)}$ [%]	[m]	$\xi_{r(EPT)}$ [%]	[m]	$\xi_{r(EPT)}$ [%]
4	5.744E-4	7.617E-4	32.6	8.038E-4	39.9	6.448E-4	12.3
6	1.406E-3	2.007E-3	42.7	2.076E-3	47.7	1.556E-3	10.7
8	2.193E-3	3.385E-3	54.4	3.470E-3	58.2	2.493E-3	13.7

A continuación se muestran resultados obtenidos tras realizar un análisis de vibraciones libres. Se ha agregado masa no estructural concentrada en los nodos en ambos modelos, para representar una situación más realista. Los valores a comparar corresponden a las cinco frecuencias naturales más bajas de la estructura. Nuevamente se plantearon varias alternativas:

Solución "a": modelo clásico de vigas esbeltas de Bernouilli-Navier.

Solución "b": idem solución "a" agregando deformaciones por corte.

Solución "c": idem solución "b" agregando inercia de rotación de la sección transversal.

Solución "d": idem solución "c" agregando definición de tramos rígidos en los elementos (figura 2-b).

Tabla III: resultados análisis modal

Número Modo	EPT	Solución a		Solución b		Solución c		Solución d	
	[1/seg]	[1/seg]	$\xi_{r(EPT)}$ [%]						
1	4.455	3.677	17.5	3.625	18.6	3.623	18.7	4.231	5.0
2	19.602	19.219	2.0	18.064	7.8	17.997	8.2	19.936	1.7
3	36.225	37.585	3.8	37.582	3.7	37.581	3.7	38.972	7.6
4	38.565	38.409	0.4	38.409	0.4	38.407	0.4	40.085	3.9
5	44.353	47.657	7.4	42.750	3.6	42.535	4.1	48.674	9.7

Por último se realizó un análisis transitorio no amortiguado de la estructura sometida al acelerograma que se muestra en la figura 3.

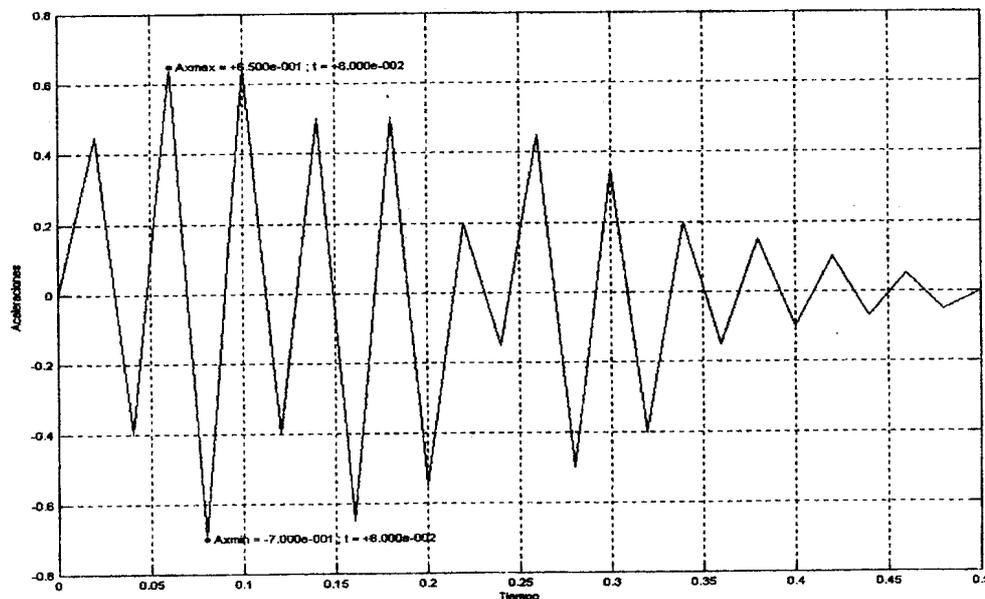


Figura 3: acelerograma impuesto.

La respuesta dinámica se obtuvo mediante integración directa (método Bossak-Newmark) en Samcef y también utilizando el código implementado. En la figura 4 se compara la historia en desplazamientos horizontales del nodo número 8 con la solución obtenida con elementos en ETP.

Parámetros del algoritmo: $\beta = 0.25$; $\gamma = 0.50$; $\alpha = 0$; $n_p = 600$; $\Delta t = 0.005$ [segundos].

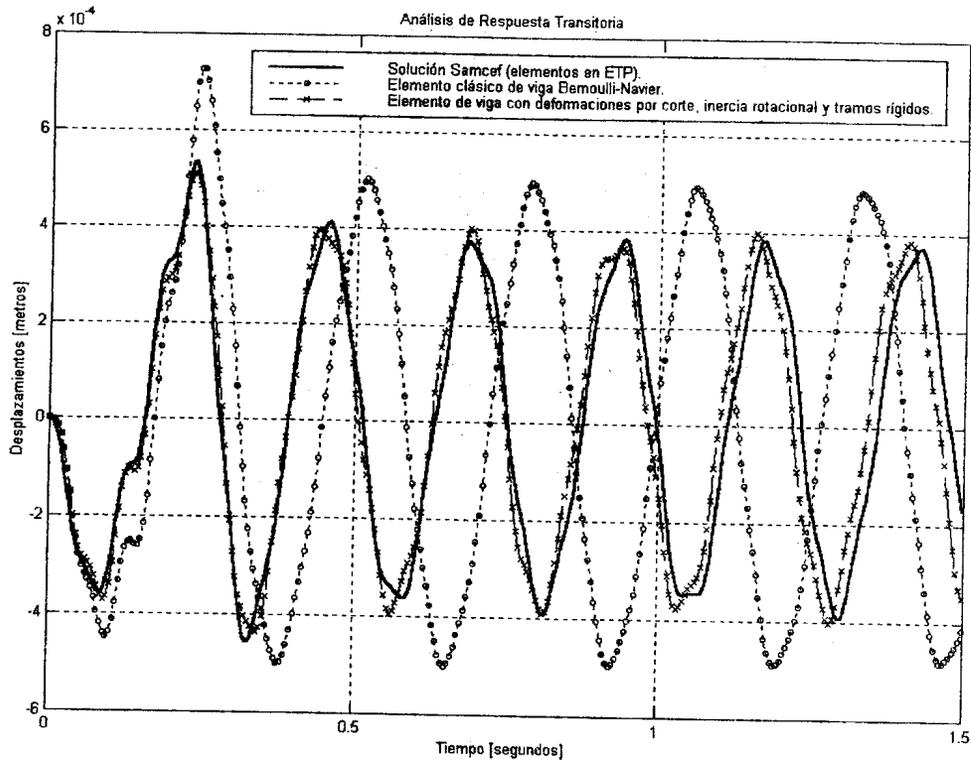


Figura 4: desplazamiento horizontales nodo 8

CONCLUSIONES

Las soluciones obtenidas con el elemento de viga formulado se han comparado con modelos de elementos finitos bajo la hipótesis de estado plano de tensión, para respuesta estática, modal y dinámica, en un pórtico simple con elementos de gran rigidez.

Para el ejemplo en estudio el modelo con elementos de viga resulta ser más flexible que el modelo en EPT, por esta razón los resultados, en los tres casos, mejoran notablemente al definir tramos rígidos en extremos de elementos. Las deformaciones por corte y los efectos de la inercia de rotación son factores que aportan mayor precisión en el análisis con poco esfuerzo extra de cálculo.

En síntesis puede decirse que el programa desarrollado resulta útil para el modelar estructuras aporticadas, sistemas pórtico-tabique o estructuras articuladas en el plano, de tamaño moderado y sometidas a cargas determinísticas siempre y cuando se verifique el régimen elástico. Tal situación es muy común y deseable para solicitaciones de servicio. Para situaciones extremas, como por ejemplo cargas próximas a las de rotura, sismos moderados o destructivos, un análisis no lineal ofrece una respuesta más satisfactoria y realista. Por esta razón los pasos futuros estarán destinados al estudio e implementación de modelos con posibilidad de comportamiento no lineal.

REFERENCIAS

- [1] CLOUGH, R. W. & PENZIEN, J., *Dinamics of structures.*, Mcgraw-Hill, 1975.
- [2] PRZEMIENIECKI J. S., *Theory of matrix structural analysis.*, Mcgraw-Hill, 1968.
- [3] CANET, J. M. & BARBAT, A. H., *Estructuras sometidas a acciones sísmicas. Cálculo por ordenador.*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1988.
- [4] ROARK, R. J., *Formulas for stress and strain.*, Mcgraw-Hill, 1938.
- [5] SAMCEF USER MANUALS 6.1, Samtech S.A., Liège, Bélgica, 1996.