

## **FUNCIONES DE FORMA EN POLIEDROS**

Nestor A. Calvo, Facundo Del Pin y Sergio R. Idelsohn  
CIMEC – CONICET  
Güemes 3450, (3000) Santa Fe, Argentina  
e-mail: cimec@ceride.gov.ar URL: <http://venus.ceride.gov.ar/CIMEC>

### **RESUMEN**

El presente trabajo trata sobre la implementación de una teselación en poliedros del dominio (dado por un conjunto de nodos fijos) y de la definición y cálculo de funciones de forma no-Sibsonianas cuyo alcance compacto será el conjunto de poliedros que comparten un dado nodo.

### **ABSTRACT**

This work deals with the implementation of a polyhedral tessellation of the domain (given by means of a set of fixed nodes) and with the definition and calculus of non-Sibsonian shape functions, whose compact support will be the set of polyhedra sharing a given node.

### **INTRODUCCIÓN**

El problema de la generación de mallas sería mucho más sencillo si se pudiese dividir el dominio en poliedros sin limitarse a utilizar tetraedros o hexaedros. La dificultad surge a la hora de calcular las funciones de forma. El procedimiento estándar consiste en transformar cada elemento en un elemento estándar para facilitar la definición y el cálculo de las funciones de forma. Esta transformación impone el primer criterio de calidad del elemento por la necesidad de mantener acotado el Jacobiano.

Nos preguntábamos si era posible encontrar funciones de forma que cumplan con los requerimientos estándar para el MEF y se puedan utilizar en cualquier polígono/poliedro. La respuesta es positiva.

Las funciones de forma no-Sibsonianas[1] han sido utilizadas con éxito en un método sin mallas[2]. El soporte de la función de forma de un nodo es allí el entorno natural de dicho nodo. Con una ligera modificación, que por otro lado las simplifica, podemos utilizarlas en poliedros.

La característica distintiva de los poliedros que generamos es que son casi esféricos, sus nodos no están muy alejados de la esfera que lo circunscribe. La esfericidad del poliedro se requiere en tanto pretendamos que las funciones de forma sean positivas en los puntos de Gauss utilizados para la integración numérica.

Los poliedros se forman por unión de elementos de una clásica triangulación Delaunay, pero heredan la continuidad de la teselación de Voronoï. Además, al unir poliedros dentro de una esfera se aumenta la relación de volumen del poliedro a volumen de la esfera con lo que se mejora la calidad pues no aparecen los grandes gradientes de las funciones de forma que se presentan en los slivers u otros elementos estándar muy deformados.

En cuanto a las funciones de forma tienen todas las características deseables para el MEF: son sencillamente calculadas directamente en el elemento y en forma analítica; poseen un soporte compacto que es el conjunto de poliedros que comparten el nodo; solo dependen de los nodos del

elemento o contorno al cual pertenecen; tienen continuidad  $C^0$  entre elementos y además reproducen con exactitud cualquier función lineal.

A diferencia de cualquier método de generación de mallas, aquí la posición de los nodos no importa demasiado; por lo que podemos partir de cualquier distribución de nodos interiores que represente bien la geometría y nos provea la precisión de cálculo requerida. Esto hace que el mismo proceso pueda ser utilizado en métodos Lagrangianos o para definir las conectividades entre nodos que requiere un método sin malla.

En el presente trabajo discutiremos algunos detalles de la teselación, el método utilizado para definir la frontera, la unión de poliedros y el cálculo de las funciones de forma y sus derivadas.

### ESFERAS DE VORONOÏ

Dado un conjunto de nodos en  $d$  dimensiones, las esferas de Voronoï son las esferas definidas por  $d+1$  nodos y que no contengan ningún nodo en su interior. El conjunto de simples formados con los nodos que definen cada esfera es la triangulación Delaunay del conjunto de nodos.

Los poliedros de Voronoï se forman al unir los centros de esferas vecinas que comparten  $d$  nodos que serán las caras de los poliedros. El poliedro de Voronoï asociado a un nodo es el lugar geométrico de los puntos que están más cerca de ese nodo que de cualquier otro.

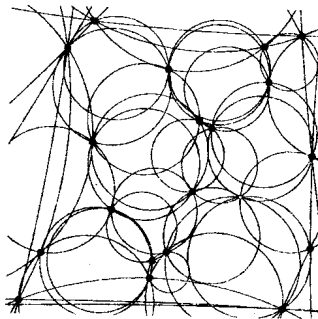


Figura 1: Nodos en posición aleatoria (dentro de un cuadrado unitario) y círculos de Voronoï.

El entorno natural de un punto se define como la unión de las esferas que contienen al punto en su interior o en su superficie. Los vecinos naturales de un punto (o de un nodo) son los nodos que definen esas esferas.

El método que implementamos consiste en un algoritmo estándar de inserción aleatoria de los nodos que encuentra el conjunto de esferas de  $n$  nodos en  $d$  dimensiones en un tiempo de orden  $n^{1+1/d}$ .

Con la precisión finita de una computadora, la probabilidad de encontrar más de  $d+1$  puntos por esfera no es nula y debe esperarse que tal cosa suceda. Para tratar con tales situaciones consideramos que un nodo es interior a una esfera de radio  $r$  si es interior a una esfera un poco mayor, de radio  $r+\varepsilon$ , con un  $\varepsilon$  del orden de la precisión numérica<sup>1</sup>. El error que se comete consiste en que se eliminarán algunas esferas demás y al reconstruir la triangulación los tetraedros resultantes no serán estrictamente los de Delaunay; pero la diferencia es inapreciable para cualquier cuestión práctica.

### FRONTERA

Si no sabemos a priori cuales nodos son de frontera, hay que definir un criterio para encontrarlos. El más común es el criterio del dominio convexo que nos dará aquellos nodos que forman parte del "convex hull" o envoltorio convexo del dominio. En nuestro caso, pretendemos trabajar tanto con dominios cóncavos como convexos y aún con dominios desconexos, por lo tanto hemos adoptado otro criterio.

<sup>1</sup> En realidad los radios y las distancias se calculan, comparan y almacenan al cuadrado.

En la Figura 1 se ve que los círculos exteriores tienden a ser grandes, podemos entonces considerar frontera a los nodos que pertenecen a una esfera de radio mayor que un cierto límite  $\alpha$  arbitrario<sup>2</sup>. Se puede ver que si  $\alpha$  no es suficientemente grande, algunas esferas internas serán tomadas como exteriores, lo cual no es ningún problema dado que en nuestro caso pretendemos reconocer "burbujas" o huecos del dominio. El valor del radio límite  $\alpha$  se fijará de acuerdo a la geometría y a la física del problema.

### POLIEDROS

La posible existencia de más de  $d+1$  puntos coesféricos hace que la triangulación Delaunay no sea función continua y ni siquiera unívoca de la posición de los nodos. En cambio, la teselación de Voronoi sí es continua y siempre está bien definida.

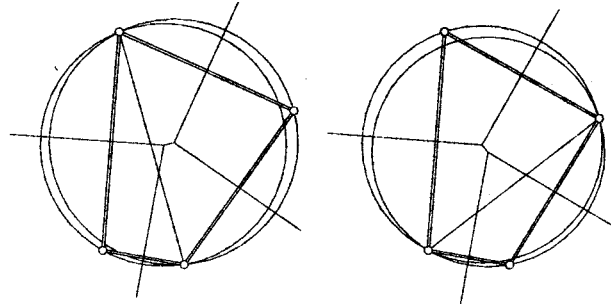


Figura 2: Voronoi, Delaunay y círculos de cuatro puntos cerca de la degeneración.

Cuando las esferas son muy similares<sup>3</sup>, aparecen aristas muy pequeñas uniendo sus centros en la teselación de Voronoi. Un pequeño cambio en la posición de un nodo puede provocar un cambio abrupto en la triangulación ("swapping" de diagonales). En el límite, cuando las esferas son iguales, la arista de Voronoi se anula y la triangulación queda indefinida.

Cuando hay esferas parecidas en el conjunto, consideramos que sus nodos forman un poliedro. En el caso de la Figura 2, en lugar de dos triángulos consideramos un cuadrilátero formado con los cuatro nodos.

La medida de comparación de las esferas es la distancia entre sus centros referida al radio, unificamos dos esferas si la distancia entre sus centros es menor que un cierto límite:  $\|c_1 - c_2\| < \delta r_{rms}$ , donde  $\delta$  es un valor adimensional arbitrario y  $r_{rms}$  es el radio medio cuadrático. La comparación se realiza entre todos los miembros de dos familias de esferas iguales.

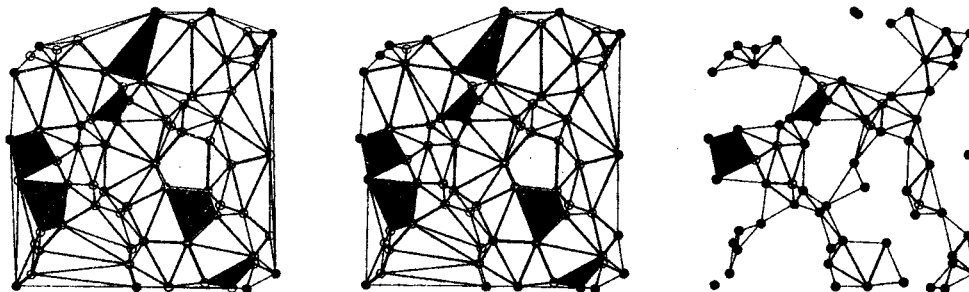


Figura 3: Poliedros obtenidos con  $\delta = 0.1$  y  $\alpha = 10, 1$  y  $0.1$ .

<sup>2</sup> Las denominadas  $\alpha$ -shapes son los distintos contornos (dependiendo de  $\alpha$ ) formados por aquellos puntos de la nube por los que se puede trazar una esfera vacía de radio  $\alpha$ .

<sup>3</sup> Si los centros son próximos, los radios son similares. Dos esferas de Voronoi son similares si y solo si sus centros son próximos.

En principio, el valor de  $\delta$  se podría tomar igual al  $\varepsilon$  anteriormente utilizado para analizar la pertenencia de un punto a una esfera, pero dado que los efectos de la unificación de esferas han demostrado ser muy positivos, decidimos probar con valores mas bien grandes y hemos utilizado valores del orden de  $10^{-1}$  sin complicaciones.

Además de la identificación de esferas próximas, un poliedro absorbe a otro cuando contiene a todos sus nodos. El caso más frecuente es el de cuatro puntos bien distanciados y casi coplanares que forman un tetraedro aplastado por aristas opuestas o "sliver".

En la Figura 4 se pueden ver algunos slivers formados en una disposición cúbica perturbada de los nodos. Se observa que tanto las caras del cubo como las diagonales paralelas de caras opuestas pueden formar tetraedros aplastados, todos los cuales serán capturados por el poliedro cúbico o uno vecino.

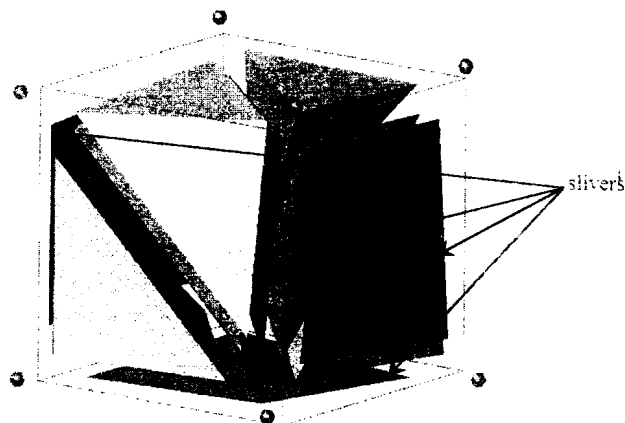


Figura 4: Tetraedros normales y slivers en una disposición casi cúbica de los puntos

### FUNCIONES DE FORMA NO-SIBSONIANAS DE UN PUNTO EN UN POLIEDRO

Una vez definido el conjunto de esferas vacías que contienen a los nodos en su superficie, se pueden calcular las funciones de forma de cada nodo de un poliedro  $P$  en cualquier punto  $x$  en el interior del poliedro.

Se construyen nuevas esferas vacías con el punto y cada cara<sup>4</sup> de  $P$ . Los centros de las esferas son vértices de otro poliedro  $V$ , que contiene a  $x$  y es el poliedro de Voronoí asociado al punto  $x$  en el conjunto formado solo con  $P$  y  $x$ .

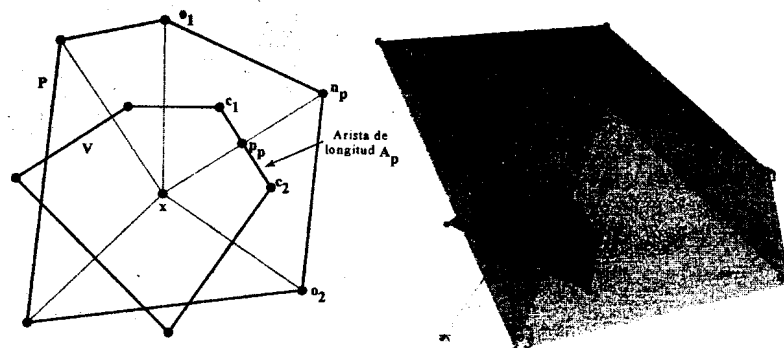


Figura 5: Elementos para la definición de función de forma en 2 y 3 dimensiones.

<sup>4</sup> En tres dimensiones, aún cuando haya mas de tres nodos coplanares las esferas se definen entre el punto y los triángulos que provienen de los tetraedros de Delaunay.

Por cada nodo  $n_p$  de  $P$  hay una cara de  $V$  perpendicular al segmento que une  $x$  con  $n_p$  y cuyo plano corta por la mitad al segmento<sup>5</sup>. Dicha cara está formada por los centros de las  $m$  esferas definidas por  $x$ ,  $n_p$  y otro par de nodos<sup>6</sup>. El conjunto  $O$  de esos "otros" nodos se puede poner en secuencia circular pues cada arista de la cara se corresponde con uno de dichos puntos, al nodo  $o_q \in O$  le corresponde el par de esferas  $\{x, n_p, o_{q \oplus (m-1)}, o_q\}$ <sup>7</sup> y  $\{x, n_p, o_q, o_{q \oplus 1}\}$ , cuyos centros ( $c_q$  y  $c_{q \oplus 1}$ ) definen la arista.

Definimos dentro del poliedro las funciones  $\phi'_p(x)$  que resultan de dividir el área  $A_p$  de la cara<sup>8</sup> de  $V$  correspondiente al nodo  $n_p$  por la distancia entre el punto y el nodo:

$$\phi'_p(x) = A_p / \|n_p - x\|. \quad (1)$$

Para garantizar suma uno, la función de forma no-Sibsoniana del nodo  $n_p$  en el punto  $x$  se define como el cociente entre la función  $\phi'$  en el nodo y la suma de las mismas para todos los nodos del poliedro:

$$\phi_p = \phi'_p / \sum_q \phi'_q. \quad (2)$$

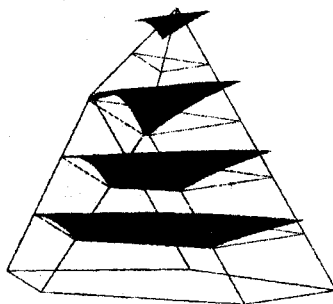


Figura 6: Función de forma del nodo superior en distintos cortes de un poliedro esférico.

Se puede demostrar que la función de forma  $d$  dimensional de un punto  $x$  que se acerca a una cara tiende a la función de forma  $d-1$  dimensional en la cara. Por lo tanto la función resultará continua al pasar de un poliedro a otro. Como puede verse en las figuras, en una cara o en una arista sólo depende de los nodos que la definen.

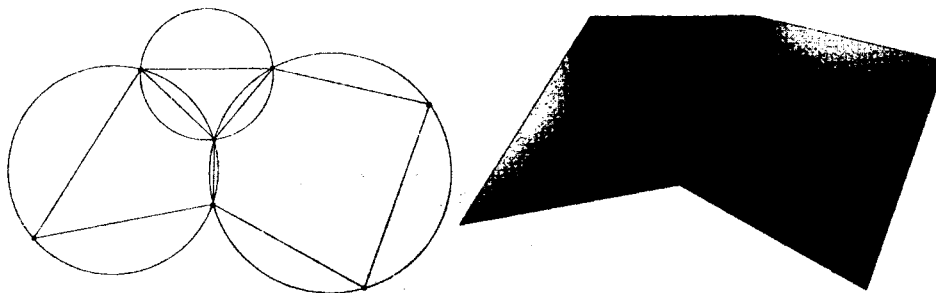


Figura 7: Continuidad de la función de forma del nodo común a un triángulo, un cuadrado y un pentágono.

<sup>5</sup> El poliedro de Voronoi asociado a  $x$  es el lugar geométrico de todos los puntos que están más cerca de  $x$  que de otro punto de  $P$ , por lo tanto sus caras son perpendiculares a los segmentos que unen  $x$  con los nodos de  $P$  y los dividen por la mitad.

<sup>6</sup> El nodo  $n_p$  es vértice común de  $m$  caras en el poliedro  $P$ .  $V$  es el dual de  $P$ , las caras de cada uno se corresponden con las "vertex figures" del otro.

<sup>7</sup> Las sumas ( $\oplus$ ) en los índices son módulo la cantidad  $m$  de vértices de la cara, de modo que  $o_{q \oplus 1}$  es el vértice posterior a  $o_q$  y  $o_{q \oplus (m-1)}$  es el anterior en el orden circular antes mencionado.

<sup>8</sup> En cualquier dimensión es la medida de Lebesgue (longitud, área, volumen, ...) de la cara.

Por su definición, las funciones de forma de un nodo pueden calcularse en cualquier punto del entorno natural del nodo (la unión de las esferas del nodo), pero nosotros limitamos su alcance a la unión de los poliedros del nodo. Es decir que la función de forma de un nodo en un poliedro sólo estará definida dentro del poliedro.

Si  $P$  no es un poliedro exactamente inscripto en una esfera ("poliedro esférico") puede que un punto interior  $\mathbf{x}$  no esté en el entorno natural de alguno de sus vértices<sup>9</sup>, pero para todo punto que esté dentro de la intersección de todas las esferas unificadas, las funciones de forma de cualquier nodo resultarán positivas. Con valores de  $\delta$  razonables, es fácil conseguir que los puntos de cálculo (puntos de Gauss) estén en el interior de dicha intersección.

Por el teorema de Green, la integral de la normal a cualquier superficie orientable cerrada debe ser nula. El poliedro de Voronoï no es una superficie suave pero el teorema se cumple igualmente. Podemos subdividir la integral de modo que la parte correspondiente a una cara (de normal constante) será igual al área de la cara por dicha normal. Aprovechando el hecho de que la cara es perpendicular al vector  $(\mathbf{n}_p - \mathbf{x})$ :

$$\mathbf{0} = \sum_p A_p (\mathbf{n}_p - \mathbf{x}) / \|\mathbf{n}_p - \mathbf{x}\| = \sum_p A_p \mathbf{n}_p / \|\mathbf{n}_p - \mathbf{x}\| - \sum_p A_p \mathbf{x} / \|\mathbf{n}_p - \mathbf{x}\|, \quad (3)$$

$$\mathbf{x} = \sum_p [(A_p / \|\mathbf{n}_p - \mathbf{x}\|) / (\sum_q A_q / \|\mathbf{n}_q - \mathbf{x}\|)] \mathbf{n}_p = \sum_p \phi_p \mathbf{n}_p. \quad (4)$$

Es decir que las funciones de forma definidas interpolan al punto  $\mathbf{x}$  y en tal caso se dice que tienen la propiedad de ser coordenadas locales.

Por ser coordenadas locales y por tener suma uno, interpolarán con exactitud cualquier función lineal, si  $T$  es cualquier tensor y  $\mathbf{t}$  cualquier vector, ambos constantes,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = T \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} = T \cdot (\sum_p \phi_p \mathbf{n}_p) + \mathbf{t} = \sum_p \phi_p (T \cdot \mathbf{n}_p + \mathbf{t}) = \sum_p \phi_p \mathbf{f}(\mathbf{n}_p). \quad (5)$$

### Implementación y Derivadas

A partir de aquí, consideraremos el origen en  $\mathbf{x}$ , para evitar arrastrarlo en las ecuaciones.

Cada cara de  $V$  se corresponde con un nodo  $\mathbf{n}_p$  y es un polígono formado con la sucesión circular de centros  $\{\mathbf{c}_q\}$  de las esferas definidas por  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{n}_p$  y otro par de nodos del poliedro. La superficie  $A_p$  de la cara de  $V$  correspondiente al nodo  $\mathbf{n}_p$  puede ser calculada subdividiéndola en triángulos de área  $A_{pq}$  definidos por cada arista  $(\mathbf{c}_q, \mathbf{c}_{q\oplus 1})$  y el pie de la perpendicular  $\mathbf{p}_p$  que es a su vez el punto medio del segmento  $(\mathbf{x}, \mathbf{n}_p)$ :

$$\mathbf{p}_p = \mathbf{n}_p / 2. \quad (6)$$

$$A_p = \sum_q A_{pq}. \quad (7)$$

De la misma forma subdividimos

$$\phi'_p = \sum_q \phi'_{pq}. \quad (8)$$

Cada uno de esos triángulos puede ser visto como una cara de un tetraedro de volumen  $V_{pq}$  definido por los puntos  $\{\mathbf{x}, \mathbf{p}_p, \mathbf{c}_q, \mathbf{c}_{q\oplus 1}\}$ . Aprovechando la perpendicularidad entre el segmento  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}_p)$  y el triángulo  $(\mathbf{p}_p, \mathbf{c}_q, \mathbf{c}_{q\oplus 1})$  podemos poner:

$$A_{pq} = 3 V_{pq} / (\|\mathbf{n}_p\| / 2) = (\mathbf{c}_q, \mathbf{c}_{q\oplus 1}, \mathbf{p}_p) / \|\mathbf{n}_p\| = (\mathbf{c}_q, \mathbf{c}_{q\oplus 1}, \mathbf{n}_p) / (2 \|\mathbf{n}_p\|) \quad (9)$$

Omitiendo el factor 2 constante que se eliminará entre el numerador y el denominador, nos queda la función:

$$\phi'_{pq} = (\mathbf{c}_q, \mathbf{c}_{q\oplus 1}, \mathbf{n}_p) / n_p^2 \quad (10)$$

<sup>9</sup> Se puede ver en la Figura 2 que un punto en la medialuna izquierda no genera círculos vacíos con el nodo de la derecha pero también se ve que la intersección de las medialunas con el polígono es muy pequeña.

Derivando respecto de  $\mathbf{x}^{10}$ :

$$\begin{aligned} \partial_i(\mathbf{c}_q, \mathbf{c}_{q\Theta 1}, \mathbf{n}_p) &= \varepsilon_{jkl} (\partial_i c_q^j c_{q\Theta 1}^k \mathbf{n}_p^l + c_q^j \partial_i c_{q\Theta 1}^k \mathbf{n}_p^l - c_q^j c_{q\Theta 1}^k \delta_i^l) \\ &= (\partial_i \mathbf{c}_q \times \mathbf{c}_{q\Theta 1} + \mathbf{c}_q \times \partial_i \mathbf{c}_{q\Theta 1}) \cdot \mathbf{n}_p - (\mathbf{c}_q, \mathbf{c}_{q\Theta 1}, \mathbf{e}_i) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\partial_i \mathbf{n}_p^2 = -2 \mathbf{n}_p^j \delta_i^j = -2 \mathbf{n}_p^i \quad (12)$$

$$\partial_i \phi'_{pq} = [(\partial_i \mathbf{c}_q \times \mathbf{c}_{q\Theta 1} + \mathbf{c}_q \times \partial_i \mathbf{c}_{q\Theta 1}) \cdot \mathbf{n}_p - (\mathbf{c}_q, \mathbf{c}_{q\Theta 1}, \mathbf{e}_i)] / \mathbf{n}_p^2 + 2 (\mathbf{c}_q, \mathbf{c}_{q\Theta 1}, \mathbf{n}_p) \mathbf{n}_p^i / \mathbf{n}_p^4 \quad (13)$$

$$\partial_i \phi'_p = \sum_q \partial_i \phi'_{pq} \quad (14)$$

$$\partial_i \phi_p = (\sum_q \partial_i \phi'_{pq} \sum_r \sum_s \phi'_{rs} - \sum_q \phi'_{pq} \sum_r \sum_s \partial_i \phi'_{rs}) / (\sum_r \sum_s \phi'_{rs})^2 \quad (15)$$

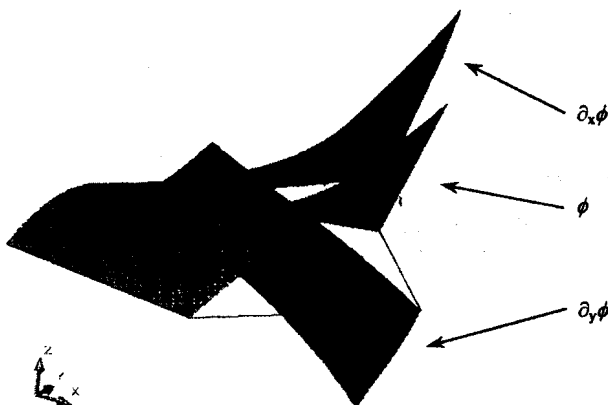


Figura 8: Función de forma y derivadas en un pentágono regular.

#### APÉNDICE: DERIVADAS DEL CENTRO DE UN CÍRCULO Y DE UNA ESFERA RESPECTO A UNO DE SUS PUNTOS DE DEFINICIÓN.

##### Circunferencia

El centro de la circunferencia por los puntos  $\{\mathbf{x}, \mathbf{n}_0^*, \mathbf{n}_1^*\}$  es:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{n}_0^\perp \mathbf{n}_1^2 - \mathbf{n}_1^\perp \mathbf{n}_0^2) / 2(\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_1). \quad (16)$$

Los vectores  $\mathbf{n}$  son  $\mathbf{n}^* - \mathbf{x}$ , y el signo  $^\perp$  representa el vector girado  $90^\circ$  en sentido positivo:

$$\mathbf{n}_p^\perp{}^j = \varepsilon_{ij} \mathbf{n}_p^i \quad (17)$$

Derivemos  $\mathbf{c}$  respecto de  $\mathbf{x}$ :

$$\partial_i \mathbf{n}_p^j = -\delta_i^j \quad (18)$$

$$\partial_i \mathbf{n}_p^2 = -2 \mathbf{n}_p^j \delta_i^j = -2 \mathbf{n}_p^i \quad (19)$$

$$\partial_i \mathbf{n}_p^\perp{}^j = -\varepsilon_{kj} \delta_i^k = -\varepsilon_{ij} \quad (20)$$

$$\partial_i (\mathbf{n}_0^\perp{}^j \mathbf{n}_1^2 - \mathbf{n}_1^\perp{}^j \mathbf{n}_0^2) = 2 (\mathbf{n}_1^\perp{}^j \mathbf{n}_0^i - \mathbf{n}_0^\perp{}^j \mathbf{n}_1^i) + \varepsilon_{ij} (\mathbf{n}_0^2 - \mathbf{n}_1^2) \quad (21)$$

$$\partial_i (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_1) = \varepsilon_{jk} (-\delta_i^j \mathbf{n}_1^k - \mathbf{n}_0^j \delta_i^k) = \varepsilon_{ij} (\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_1)^j = (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_0)^\perp{}^i \quad (22)$$

<sup>10</sup> En el Apéndice 1 se desarrollan las derivadas  $(\partial_i \mathbf{c})$  de los centros de esfera respecto a uno de sus puntos de definición.

$$\begin{aligned} \partial_i c^j &= \{ [2 (n_1^{lj} n_0^i - n_0^{lj} n_1^i) + \varepsilon_{ij} (n_0^2 - n_1^2)] 2 (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_1) - \\ &\quad (n_0^{lj} n_1^2 - n_1^{lj} n_0^2) 2 (n_1 - n_0)^{lk} \} / 4 (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_1)^2 = \\ &= [n_1^{lj} n_0^i - n_0^{lj} n_1^i + \varepsilon_{ij} (n_0^2 - n_1^2) / 2 + c^j (n_0 - n_1)^{li}] / (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_1) \end{aligned} \quad (23)$$

### Esfera

El centro de la esfera por los puntos  $\{\mathbf{x}, \mathbf{n}_0^*, \mathbf{n}_1^*, \mathbf{n}_2^*\}$  es:

$$\mathbf{c} = (\Sigma_p n_p^2 \mathbf{n}_{p\oplus 1} \times \mathbf{n}_{p\oplus 2}) / 2(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2). \quad (24)$$

Los vectores  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^* - \mathbf{x}$ , y el signo  $\oplus$  representa suma modulo tres.

Derivemos  $\mathbf{c}$  respecto de  $\mathbf{x}$ :

$$\partial_i n_p^j = -\delta_i^j \quad (25)$$

$$\partial_i n_p^2 = -2 n_p^j \delta_i^j = -2 n_p^i \quad (26)$$

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{n}_{p\oplus 1} \times \mathbf{n}_{p\oplus 2} \quad (27)$$

$$\partial_i v_p^j = \Delta_{pi}^j = \varepsilon_{jkl} (-\delta_i^k n_{p\oplus 2}^l - n_{p\oplus 1}^k \delta_i^l) = [(\mathbf{n}_{p\oplus 2} - \mathbf{n}_{p\oplus 1}) \times \mathbf{e}_i]^j \quad (28)$$

$$\partial_i \Sigma_p n_p^2 v_p^j = [\Sigma_p (n_p^2 \Delta_{pi}^j - 2 n_p^i v_p^j)] \quad (29)$$

$$\partial_i (\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = -\varepsilon_{jkl} (\delta_i^j n_1^k n_2^l + n_1^j \delta_i^k n_2^l + n_1^j n_2^k \delta_i^l) = -\Sigma_p (\mathbf{n}_{p\oplus 1} \times \mathbf{n}_{p\oplus 2})^i = -\Sigma_p v_p^i \quad (30)$$

$$\partial_i c^j = \{ [\Sigma_p (n_p^2 \Delta_{pi}^j - 2 n_p^i v_p^j)] (\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + (\Sigma_p n_p^2 v_p^j) (\Sigma_q v_q^i) \} / 2(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)^2 \quad (31)$$

$$\partial_i \mathbf{c} = [\Sigma_p (n_p^2 \Delta_{pi} / 2 - n_p^i v_p) + \mathbf{c} (\Sigma_q v_q^i)] / (\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \quad (32)$$

### REFERENCIAS

- [1] Belikov, V. And Semenov A. "Non-Sibsonian interpolation on arbitrary system of points in Euclidean space and adaptive generating isolines algorithm." Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation, Proc. of the 6<sup>th</sup> Intl. Conf. Greenwich Univ., July 1998.
- [2] Sukumar, N., Moran B., Semenov, A. And Belikov, V. "Natural Neighbor Galerkin Methods" accepted for publication in Int. J. Num. Meth. Engng. 50 pp. 1 (2001)