

UN METODO COMPUTACIONAL PARA CALCULOS FRACTOMECANICOS EN TRES DIMENSIONES

Adrián Pablo Cisilino y Enrique Pardo

División Soldadura y Fractura INTEMA. Fac. de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata
Av. Juan B. Justo 4302, 7600 Mar del Plata, Argentina
e-mail: cisilino@fi.mdp.edu.ar

RESUMEN

El cálculo de parámetros fractomecánicos en problemas tridimensionales utilizando metodologías computacionales como el FEM y el BEM puede realizarse mediante diversas técnicas tales como la extensión virtual de fisura, la extrapolación de desplazamientos o tensiones o la integral J . Esta última ha sido considerada por diversos autores, habiéndose propuesto metodologías que recurren a la evaluación de integrales de volumen o la combinación de integrales de área y camino. La deficiencia de las integrales de volumen es que el valor calculado resulta ser el promedio del parámetro fractomecánico sobre una cierta porción del frente. Por otro lado la utilización simultánea de integrales de camino y superficie resulta compleja de implementar.

Se propone en este trabajo una metodología para el cálculo de J basada solamente en la evaluación de una integral de área. La misma es una extensión del concepto utilizado en la integral de dominio equivalente (EDI) que hace uso de una función auxiliar q que se asocia a la extensión virtual del frente de fisura. La metodología propuesta es implementada utilizando el Método de los Elementos de Contorno (BEM). El BEM resulta especialmente apto para este tipo de cálculos ya que la magnitudes de los desplazamientos y tensiones así como sus derivadas pueden ser calculados en forma directa y precisa a partir de su representación integral sobre el contorno.

ABSTRACT

The solution to three-dimensional crack problems can be obtained by such techniques as the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM). When the basic assumption of linear elastic fracture mechanics is adopted, the stress intensity factors can be evaluated by a variety of techniques, such as the extrapolation of displacements or stresses, the virtual crack extension method, the subtraction of singularity technique, and the J -integral methods. The J -integral methods have been addressed by a number of authors, and different schemes based on the evaluation of either a domain integral or the combination of path and area integrals have been proposed. Volume integrals exhibit the drawback that the computed value corresponds to an average of the fracture parameter over certain portion of the crack front. On the other hand, the combined use of path and surface integrals results cumbersome to implement.

It is presented in this work a new methodology for the computation of the J -integral that involves the evaluation of an area integral only. The methodology is an extension of the Energy Domain Integral (EDI) approach, which makes use of an auxiliary function q that can be regarded as a virtual crack extension. The proposed methodology is implemented using the BEM, since the required stresses, strains and derivatives of displacements at internal points can be directly obtained from their boundary integral representations.

FORMULACION DE LA INTEGRAL J DE AREA

Una de las principales ventajas las metodologías de cálculo para la evaluación de parámetros fractomecánicos basados en la integral J es que las mismas no requieren de la representación precisa del comportamiento de los campos de tensiones y desplazamientos en el vértice de fisura. Dado que estas metodologías están basadas en principios energéticos y que los contornos o recintos de integración se encuentran definidos sobre una porción importante del modelo, la representación precisa del comportamiento del vértice de fisura no resulta relevante dado que la contribución de esta zona del modelo a la energía total no es significativa. Al mismo tiempo, la integral J como fuera definida por Rice [1] caracteriza la fuerza impulsora para la propagación de fisuras en problemas bidimensionales, por lo que para casos generales se requiere que la misma sea extendida a tres dimensiones.

Sea Γ_δ una superficie anular de radio δ y espesor t que rodea al frente de fisura en cierto punto como se ilustra en la Figura 1a. La tasa local de relajación de energía por unidad de avance de fisura está dada por

$$J = \lim_{\delta, t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \iint_{\Gamma_\delta} \Sigma_{ij} n_j ds \quad \text{con} \quad \Sigma_{ij} = \omega \delta_{ij} - \sigma_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (1)$$

donde Σ el tensor energía-momento, n es el versor normal, ω es la densidad de energía, σ el tensor de tensiones y u el desplazamiento.

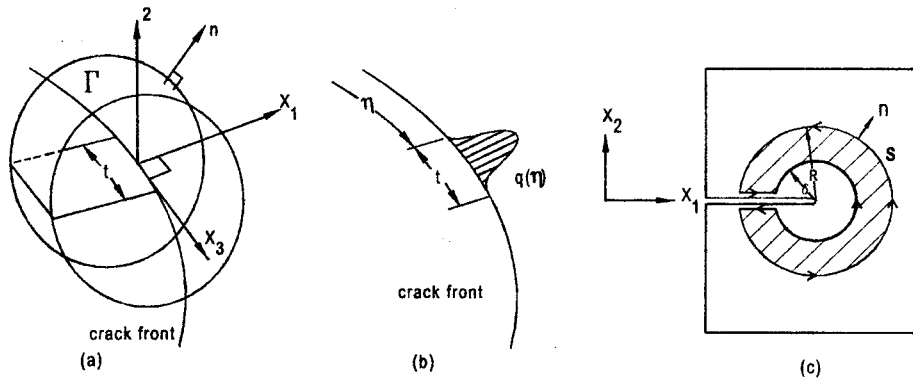


Figura 1: (a) Superficie anular que rodea al frente de fisura, (b) Extensión virtual de fisura, (c) Superficie cilíndrica que rodea al frente de fisura.

En una forma más general, se puede asumir que el avance local del frente de fisura sigue una curva suave $q(\eta)$ (ver Figura 1b). La tasa de relajación de energía puede ser redefinida entonces como:

$$J = \lim_{\delta, t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\iint \Sigma_{ij} n_j \cdot q ds}{\int_0^t q(\eta) d\eta} \quad (2)$$

El límite de la expresión (2) puede ser transformado en una integral de superficie. Asumamos para esto que S representa la superficie de un cilindro hueco de longitud t , de radio interno δ y radio externo R (ver Figura 1c). Si la función q es extendida en el espacio con la condición $q=0$ sobre toda

la superficie S excepto el anillo interior $I'_{(0)}$, la ecuación (2) puede ser reescrita como

$$J = \lim_{\delta, \epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\int_0^t q_{(n)} d\eta} \iint_S \Sigma_{1j} \cdot n_j \cdot q \cdot ds \tag{3}$$

La expresión (3) puede ser transformada en una integral de volumen utilizando el teorema de la divergencia. De esta forma, tomando el límite $\delta \rightarrow 0$ se obtiene:

$$J = \frac{\iiint_{V(S)} \frac{\partial(\Sigma_{1j} \cdot q)}{\partial x_j} \cdot dV}{\int_0^t q_{(n)} d\eta} = \frac{\iiint_{V(S)} \left\{ \frac{\partial \Sigma_{1j}}{\partial x_j} \cdot q + \Sigma_{1j} \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j} \right\} \cdot dV}{\int_0^t q_{(n)} d\eta} \tag{4}$$

Considerando que el tensor energía-momento tiene divergencia nula, el primer término de (4) se cancela. De esta forma

$$J = \frac{\iiint_{V(S)} \Sigma_{1j} \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j} \cdot dV}{\int_0^t q_{(n)} d\eta} \tag{5}$$

La integral de volumen de la ecuación (5) fue propuesta por Shih y colaboradores [2] y es la base del metodología muy efectiva para el cálculo de parámetros fractomecánicos conocida como la Energy Domain Integral (EDI). Saliba y colaboradores [3] proponen una expresión equivalente a (5) a partir de un análisis de sensibilidad de forma de la fisura. En este caso la función q es interpretada como un campo de velocidad virtual que acompaña a la propagación de la fisura.

A pesar de sus ventajas, la implementación numérica de la expresión (5) de presenta algunas dificultades en su implementación numérica. Al utilizar elementos finitos (FEM) la discretización del modelo debe realizarse previendo los volúmenes de integración de la expresión (7). Esto puede resultar inconveniente en el caso de frentes de fisura curvos. Por otro lado al utilizar elementos de contorno (BEM), la evaluación de una integral de volumen conlleva un proceso de postprocesamiento computacionalmente costoso. En vista de lo antes expuesto se propone transformar la integral de volumen de la expresión (5) en una integral de área más sencilla de evaluar. Con este propósito se considera un sistema de coordenadas cartesiano local, con el eje x_3 paralelo al frente de fisura y el eje x_1 paralelo a la boca de la fisura como se ilustra en la Figura 1. Dado que la función q es arbitraria, la misma puede ser definida como el producto entre dos funciones q^a y q^b :

$$q_{(x,y,z)} = q^a_{(r)} \cdot q^b_{(z)} \quad \text{con} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

donde la función q^a es una función suave que depende solo del radio con valores extremos $q^a_{(r=0)}=1$ y $q^a_{(r=R)}=0$, donde R es el radio de un volumen cilíndrico. La otra función, q^b , es la función unidimensional $q(\eta)$ antes definida. Con estas funciones, la integral de volumen en (5) puede ser separada en dos integrales independientes:

$$J = \frac{\iint_{A=rR^2} dx_1 dx_2 \int_0^t dx_3 \left[\Sigma_{11} \cdot \frac{\partial q^a}{\partial x_1} \cdot q^b + \Sigma_{12} \cdot \frac{\partial q^a}{\partial x_2} \cdot q^b + \Sigma_{13} \cdot q^a \cdot \frac{\partial q^b}{\partial x_3} \right]}{\int_0^t q_{(n)} d\eta} \tag{6}$$

Los dos primeros términos de (6), la integral de q^b se simplifica con el denominador y sólo la integral de área se conserva

$$J = \iint_{A=\pi R^2} dx_1 dx_2 \left[\Sigma_{11} \cdot \frac{\partial q^a}{\partial x_1} + \Sigma_{12} \cdot \frac{\partial q^a}{\partial x_2} \right] + \frac{\iint_{A=\pi R^2} \left[\int_0^t dx_3 \Sigma_{13} \cdot q^a \frac{\partial q^b}{\partial x_3} \right] dx_1 dx_2}{\int_0^t q_{(\eta)} d\eta} \quad (7)$$

El ultimo término en (7) puede transformarse también en una integral bidimensional tomando el límite de $t \rightarrow 0$. Por simplicidad y pérdida de generalidad asumimos que q^b varía en forma lineal en el intervalo $[0, t]$, adoptando los valores $q^b = 0$ en los extremos y $q^b = 2$ en el centro del intervalo. De esta forma el denominador de (7) toma el valor uno. Se tiene entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_0^t \Sigma_{13} \cdot q^a \frac{\partial q^b}{\partial x_3} dx_3 \right] = \frac{\partial \Sigma_{13}}{\partial x_3} \cdot q^a$$

y el resultado final es

$$J = \iint_{A=\pi R^2} \left[\Sigma_{11} \cdot \frac{\partial q^a}{\partial x_1} + \Sigma_{12} \cdot \frac{\partial q^a}{\partial x_2} + \frac{\partial \Sigma_{13}}{\partial x_3} q^a \right] dx_1 dx_2 \quad (8)$$

El que incluye la evaluación de una integral de área solamente.

IMPLEMENTACIÓN CON ELEMENTOS DE CONTORNO

El BEM resulta un método especialmente apto para evaluar en forma numérica la expresión dada en (8), dado que las tensiones, deformaciones y sus derivadas en puntos internos pueden ser obtenidas en forma directa a partir de sus representaciones integrales sobre el contorno. Esto hace que los resultados de BEM para este tipo de problemas resulten más precisos que los obtenidos a partir de otras técnicas numéricas. Se utilizó en este trabajo la formulación dual de los elementos de contorno (DBEM). La misma incorpora dos ecuaciones integrales de contorno independientes, la ecuación de desplazamientos para colocar sobre una de las caras de la fisura y la ecuación de tracciones sobre la cara opuesta. Esta estrategia permite modelar problemas con fisuras utilizando una única zona. Los detalles de la implementación pueden encontrarse en la referencia [4].

El cálculo de J requiere de acuerdo a la expresión (8) requiere conocer los desplazamientos, las tensiones y sus derivadas en puntos x en el interior del dominio del problema. Los mismos son calculados durante el postproceso de resultados utilizando sus expresiones integrales de contorno. De esta forma:

$$u_i(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}^* u_j d\Gamma \quad (9)$$

$$u_{i,m}(x) = \int_{\Gamma} U_{ij,m}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij,m}^* u_j d\Gamma \quad (10)$$

$$u_{i,31}(x) = \int_{\Gamma} U_{ij,31}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij,31}^* u_j d\Gamma \quad (11)$$

$$\sigma_{ij}(x) = \int_{\Gamma} D_{kij}^* t_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij}^* u_k d\Gamma \quad (12)$$

$$\sigma_{3j,3}(x) = \int_{\Gamma} D_{k3j,3}^* t_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{3k,3}^* u_k d\Gamma \quad (13)$$

donde los términos indicados con * corresponden a las soluciones fundamentales y sus derivadas. Sus expresiones pueden encontrarse en las referencias [4] y [5].

La evaluación de la expresión en (8) se realiza utilizando un esquema de puntos de puntos de Gauss sobre áreas circulares centradas en el vértice de fisura. Las áreas de integración se encuentran definidas por "elementos" isoparamétricos de 9 nodos como se ilustra en la Figura 2b. En cuanto a la función q la misma fue definida según se sugiere en [3], lo que combinado con lo expuesto en la sección anterior resulta

$$q(x) = \frac{w^p |x|^{-\beta}}{w^p |x|^{-\beta} + \sum_{i=1}^N w_i^{np} |x - x_i|^{-\beta}} \quad (14)$$

donde w^p , w^{np} y β son parámetros a ser seleccionados y x_i representa las coordenadas de los puntos con valores nulos de q (es decir, aquellos ubicados en la periferia de las áreas de integración).

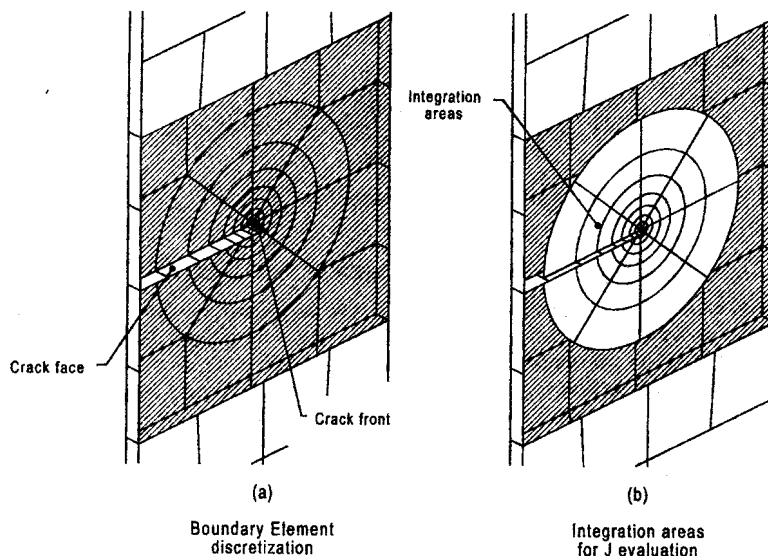


Figura 2: Discretización en elementos de contorno y áreas de integración para el cálculo de J

EJEMPLOS

Placa fina con fisura central

Como primera prueba se seleccionó un ejemplo con características bidimensionales. El mismo consiste en una placa con una fisura central en estado de deformación plana sometido a una tensión remota uniforme $\sigma=100$ MPa (ver Figura 3). La discretización del modelo se ilustra en la Figura 2. Los desplazamientos normales de las caras laterales fueron restringidos para lograr el estado plano de deformaciones. La longitud de la fisura es $a=10$ mm y el ancho de la placa $b=2a$. Las propiedades del material son $E=100.000$ MPa, y $\nu=0,3$. La discretización del modelo se realizó con 140 elementos de contorno y 661 nodos. Fueron consideradas siete superficies para la evaluación de J , con radios comprendidos entre el 5% y el 75% de la longitud de fisura.

Los resultados obtenidos para el plano central de la probeta están listados en la Tabla 1 para funciones q lineales, parabólicas y con distintos valores de los parámetros w^p , w^{np} y β . Se incluye además el valor de J de referencia [6] y resultados obtenidos con la EDI en [4].

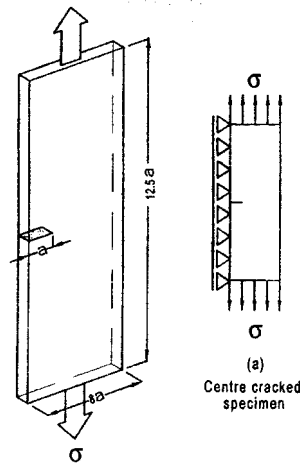


Figura 3: Placa fina con fisura central

Tabla I: resultados de J para la placa fina con fisura central

		r/a							Promedio	Ref [6]
		0.05	0.09	0.15	0.225	0.338	0.50	0.75		
EDI [4]	J	3.951	3.951	4.011	4.022	4.028	4.268	4.268	4.071	4.00
	$\Delta\%$	-1.26	+1.26	0.28	0.55	0.70	6.70	6.70	1.76	-
q lineal	J	3.683	3.805	3.872	3.907	3.931	3.945	3.951	3.87	4.00
	$\Delta\%$	-7.93	-4.86	-3.20	-2.33	-1.73	-1.38	-1.23	-3.24	
q parabólico	J	3.860	3.925	3.954	3.966	3.971	3.971	3.965	3.945	4.00
	$\Delta\%$	-3.50	-1.88	-1.15	-0.85	-0.73	-0.73	-0.88	-1.38	
$\beta=6$ $w^p=9$ $w^{np}=1$	J	3.942	3.936	3.960	3.973	3.978	3.979	3.976	3.963	4.00
	$\Delta\%$	-1.45	-1.60	-1.00	-0.68	-0.55	-0.53	-0.60	-0.91	
$\beta=6$ $w^p=20$ $w^{np}=1$	J	3.959	3.952	3.968	3.971	3.977	3.977	3.973	3.968	4.00
	$\Delta\%$	-1.03	-1.20	-0.80	-0.73	-0.57	-0.57	-0.67	-0.80	
$\beta=20$ $w^p=9$ $w^{np}=1$	J	3.996	3.915	3.947	3.933	3.982	3.985	3.981	3.962	4.00
	$\Delta\%$	-0.10	-2.12	-1.32	-1.67	-0.45	-0.37	-0.47	-0.95	

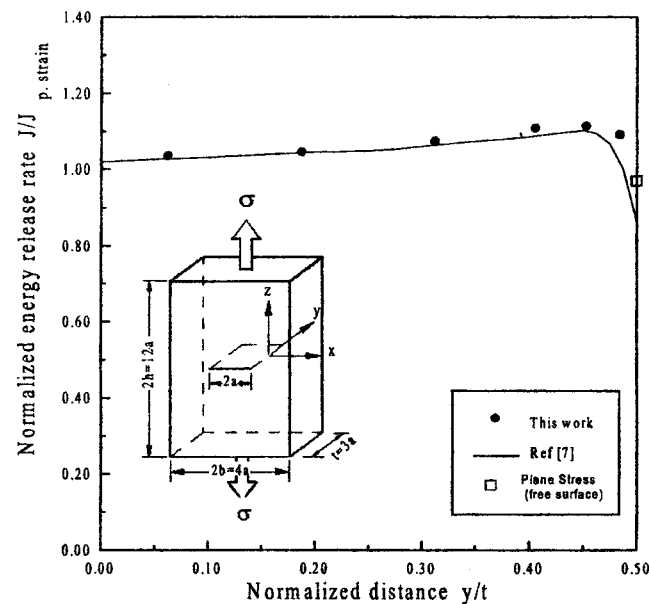
Placa gruesa con fisura central

Se estudia en este ejemplo la variación del valor de J a lo largo del frente de fisura. La configuración del problema es la misma que en el ejemplo anterior con la sola diferencia que el espesor $t=3a$. La discretización de modelo consta de 193 elementos y 1040 nodos. Se definieron cuatro recintos de integración con radios $r/a=0.2, 0.35, 0.5$ y 0.75 .

Los resultados obtenidos son presentados en la Tabla 2 y graficados en la Figura 4, donde el origen de la coordenada y/t corresponde al plano central de la probeta. Los valores de referencia son los de Raju y Newman reportados en forma polinómica por Aliabadi[7]. En todos los casos los resultados están normalizados con respecto al de J en deformación plana, $J_{p, strain}$. Para la posición de la superficie libre se incluye también el valor de referencia correspondiente al estado de tensión plana, al ser esta la condición que prevalece en esta zona de la probeta. Puede observarse que existe un excelente acuerdo entre los resultados calculados y los de la referencia.

Tabla II: resultados de J para la placa gruesa con fisura central ($\beta=6$ $w^p=9$ $w^{np}=1$)

y/t	r/a				Promedio	Ref [7]	$\Delta\%$
	0.2	0.35	0.50	0.75			
0.625	1.041	1.043	1.046	1.052	1.035	1.026	0.877
0.187	1.044	1.056	1.058	1.064	1.045	1.043	0.192
0.312	1.073	1.086	1.089	1.092	1.074	1.064	0.940
0.406	1.121	1.123	1.122	1.115	1.109	1.088	1.930
0.453	1.135	1.132	1.124	1.11	1.114	1.102	1.089
0.484	1.116	1.1	1.1	1.095	1.092	1.021/1.122	6.953/2.673

Figura 4: Variación de J sobre el frente de fisura para la placa gruesa con fisura central

CONCLUSIONES

Se presentó en este trabajo una formulación de la integral J para problemas tridimensionales. La misma consta de una integral de área solamente, ofreciendo ventajas de implementación respecto a otras formulaciones que involucran la evaluación de integrales de volumen o integrales de área y camino. La formulación propuesta fue implementada utilizando el Método de los Elementos de Contorno, lo que permite obtener las tensiones, deformaciones y sus derivadas en puntos internos con precisión a partir de sus representaciones integrales sobre el contorno. Los resultados obtenidos son precisos y muestran excelente concordancia con los reportados en la literatura.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo a sido financiado por el PICT 12-04586 de la Agencia Nacional de Promoción Científica de la República Argentina.

REFERENCIAS

1. **Rice J.R.**, "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *J. Appl. Mechanics, Transactions of the ASME*, pp.379-386, (1968)
2. **Moran B. y Shih C.F.**, "A general treatment of crack tip contour integrals", *Int. J. Fracture*, 295-310, (1987)
3. **Saliba R., Venere M.J., Padra C., Taroco E, y Feijoo R.A.**, "Shape Senticivity Análisis and Energy Release rate of Planar Cracks Embedded in Three-Dimensional Bodies", *Computer Methods in Applied Mechanics en Engineering*, 188, 649-664, (2000)
4. **Cisilino A.P., Aliabadi M.H., y Otegui J.L.**, "Energy domain integral applied to solve center and double-edge crack prolems in three-dimensions", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 29, 181-194 (1998)
5. **Rigby R.H. y Aliabadi M.H.**, "Mixed-mode J-integral method for analysis of 3D fracture problems using BEM", *Engng. Anal. Boundary Elements*, 239-256, (1993)
6. **Tada H., Paris P.C. y Irwin G.R.**, *Handbook for Stress Analysis of Cracks*, Del Research, (1985)
7. **Aliabadi M.H.**, "Database of Stress Intensity Factors", *Computational Mechanics Publications*, Southampton, UK, (1996)