

## ANÁLISIS TÉRMICO EN SOLDADURA POR FRICCIÓN

Diego Santiago <sup>a</sup>, Guillermo Lombera <sup>a</sup>, Anibal Cassanelli <sup>b</sup>,  
Santiago Urquiza <sup>b</sup> y Luis A. de Vedia <sup>c</sup>

<sup>a</sup> Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata-CONICET  
J. B. Justo 4302 (7600), Mar del Plata, Argentina  
e-mail: [dsantiago@fi.mdp.edu.ar](mailto:dsantiago@fi.mdp.edu.ar)

<sup>b</sup> Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata  
J. B. Justo 4302 (7600), Mar del Plata, Argentina  
e-mail: [santiagourquiza@fi.mdp.edu.ar](mailto:santiagourquiza@fi.mdp.edu.ar)

<sup>c</sup> ITPJAS, Universidad Nacional de San Martín-CNEA, CIC  
San Martín, Buenos Aires, Argentina  
e-mail: [ldevedia@cnea.gov.ar](mailto:ldevedia@cnea.gov.ar)

**Key words:** Friction stir welding (FSW), modelado tridimensional, flujo, temperatura, soldaduras de aluminio a tope.

**Abstract.** *El proceso de soldadura por fricción o “Friction Stir Welding” (FSW) es un método de soldadura desarrollado por el (TWI) “The Welding Institute” de Inglaterra en 1991<sup>1</sup>. Es un nuevo concepto en soldadura en fase sólida por fricción especialmente apto para la soldadura del aluminio y sus aleaciones y ofrece aspectos interesantes pudiendo en muchos casos reemplazar con ventaja a los procesos usuales por arco.*

*El equipo de soldadura consta de una herramienta que gira y se desplaza sobre la unión de dos chapas restringidas<sup>2</sup>. La unión se produce por el calentamiento por fricción que experimentan las mismas produciendo un comportamiento pastoso/viscoso del material y el correspondiente flujo entre las chapas a unir*

*El modelado numérico del proceso, permite predecir comportamientos sin necesidad de ensayos específicos, pudiendo acelerar los procesos de diseño, bajando los costos y optimizando las variables tecnológicas a utilizar<sup>3,4</sup>.*

*En este trabajo se modela el proceso de soldadura por fricción, mediante la utilización de un programa de elementos finitos de propósito general, reproduciendo el mapa térmico y la distribución del flujo del material. Se presentan desarrollos experimentales con mediciones de la distribución de temperaturas obtenidas por termografía y su análisis comparativo con los resultados numéricos.*

## INTRODUCCION

La soldadura de mezclado por fricción (Stir-Welding o Friction Stir Welding –FSW-) es una técnica para unir dos láminas o placas gruesas por medios mecánicos. En la figura 1 se muestra una representación esquemática del proceso de FSW, la herramienta consiste de un apoyo normal al eje de rotación de la herramienta, y un perno de diámetro pequeño conectado a dicho apoyo. El apoyo de la herramienta, cuyo diámetro es relativamente grande respecto del perno, actúa como un respaldo superior para prevenir que el material salga expulsado de las piezas a soldar. Esto minimiza la formación de huecos en la zona soldada. Usualmente el perno es “roscado” para proveer una mayor área de calentamiento por fricción y un mayor efecto de mezclado del material.

Una vez que las láminas o placas se colocan a tope en un eje común, el perno rotativo se hunde dentro de las piezas a soldar hasta que el apoyo de la herramienta está en contacto íntimo con la superficie de trabajo. Después que el perno se inserta, este se mueve en la dirección de soldadura. A medida que la herramienta se mueve a lo largo de la costura, el material calentado y ablandado fluye alrededor del perno hacia su parte posterior donde se consolida para crear la soldadura. El resultado es una soldadura de estado sólido y alta calidad. Nótese que el eje de la herramienta típicamente está inclinado unos grados ( $2^\circ$  o  $3^\circ$ ) respecto de la vertical, para facilitar la consolidación de la soldadura.

Se han escrito varios trabajos sobre el tema de FSW entre los cuales vale la pena destacar los de Flores et al.<sup>5</sup>, Murr et al.<sup>6</sup> y Liu et al.<sup>7</sup> sobre los aspectos microestructurales de las aleaciones de aluminio soldadas, y también los trabajos de Dawes y Thomas<sup>8,9</sup> quienes describieron el proceso de FSW resumiendo sus ventajas y desventajas. Existen diversos trabajos de simulación numérica sobre este proceso. Gould et al.<sup>10</sup> desarrolló un modelo analítico de flujo de calor para FSW. El modelo se basa en la bien conocida ecuación de Rosenthal<sup>11</sup>, que describe un campo de temperaturas quasi-estacionario en una placa semi-infinita debido a una fuente de calor móvil. Kovacevic et al.<sup>12,13</sup> realizó análisis térmicos y termomecánicos aplicando elementos finitos. Estos análisis se basan en un modelo de fuente de calor, sin contemplar el acoplamiento termomecánico provocado por el flujo plástico. Es de destacar que por las características del problema, donde las deformaciones plásticas son dominantes, pueden lograrse buenos resultados empleando modelos de flujo viscoplástico termomecánicamente acoplados<sup>4,14</sup>. Por otra parte, en virtud de las características geométricas y cinemáticas, el problema es netamente tridimensional, lo que conjuntamente con la existencia de fuertes gradientes en las velocidades de deformación en las inmediaciones del perno, imponen una alta exigencia computacional. Recientemente, Colegrove et al.<sup>14</sup> abordó este tipo de modelado utilizando “CDF package FLUENT”, donde resolvió un modelo viscoplástico termomecánicamente acoplado, obteniendo buenos resultados en las distribuciones de flujo de material.

En este trabajo se modeló la distribución del flujo de material y del campo de temperaturas en forma acoplada, para un problema estacionario. Para el cálculo de la temperatura se tuvo en cuenta todas las condiciones de borde, como la pérdida de calor por convección y la transmisión de calor a través de la herramienta y la placa base. Se consideró la generación de

calor por disipación viscosa. Los resultados obtenidos se contrastaron con datos experimentales, tanto para el flujo del material como para las temperaturas.

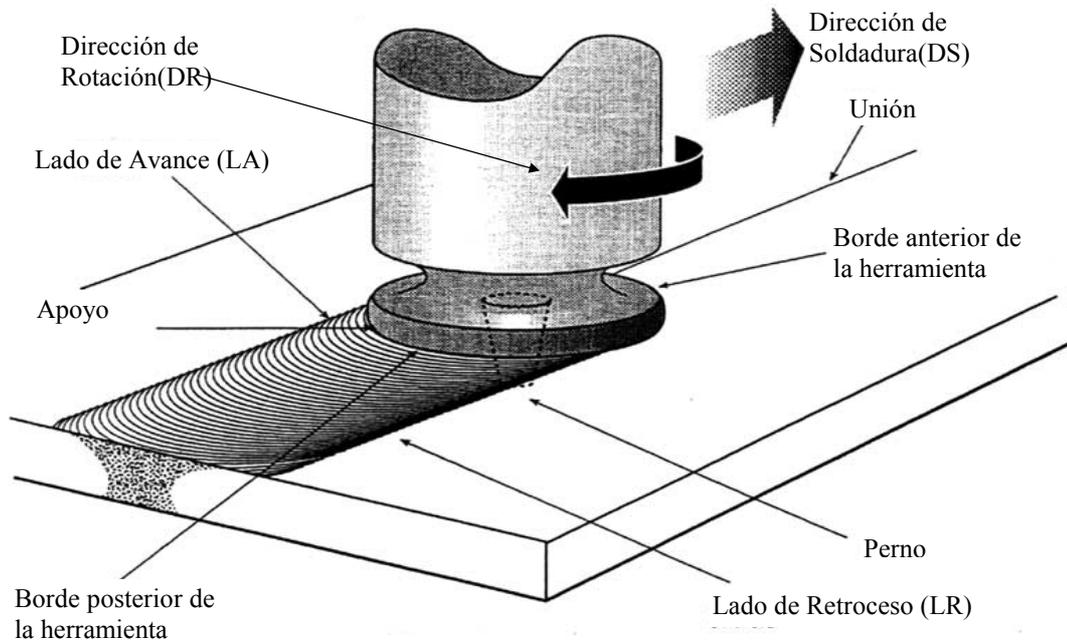


Figura 1: Esquema del proceso de Friction Stir Welding(FSW).

## ECUACIONES GOBERNANTES

### Modelo mecánico

Despreciando las fuerzas inerciales y de volumen, las ecuaciones de equilibrio en un volumen de material  $\Omega$  con una frontera  $\partial\Omega$  se pueden escribir de la siguiente manera<sup>15</sup>:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

donde  $\sigma$  es el tensor de tensiones de Cauchy. Las tracciones  $T_i^o$  se pueden describir en una porción de la frontera  $\partial\Omega_t$  (condiciones de Neumann), mientras los componentes de la velocidad  $u_i^o$  se puede especificar en el resto de la superficie  $\partial\Omega_u$  (condiciones de Dirichlet). Esto se puede expresar como:

$$\begin{aligned} (\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_i &= T_i^o \quad \text{en } \partial\Omega_t, i = 1, \dots, NDim \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i &= u_i^o \quad \text{en } \partial\Omega_u, i = 1, \dots, NDim \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\partial\Omega = \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u$  y  $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = \emptyset$ ,  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria externa en el contorno  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{e}_i$  es el vector unitario en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional y  $\mathbf{u}$  el vector

velocidad. El vector de velocidad de deformación está relacionado con la parte simétrica del gradiente del campo de velocidades de acuerdo a:

$$\mathbf{D} = \frac{(\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})}{2} \quad (3)$$

Suponiendo que el material es incompresible, luego la ecuación de continuidad que sigue se debe cumplir en todo el dominio  $\Omega$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

Si se adopta una formulación de flujo para modelar las grandes deformaciones plásticas involucradas en el proceso de stir-welding, el tensor desviador de tensiones  $\mathbf{S}$  se puede relacionar al tensor de velocidades de deformación  $\mathbf{D}$  –que es en realidad un desviador en virtud de la hipótesis de incompresibilidad- por la siguiente relación:

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D}, \quad \mathbf{S} = \sigma - p\mathbf{I} \quad (5)$$

$$\mu = \frac{\sigma_e}{3\varepsilon_e}$$

donde  $\mu$  es la viscosidad efectiva del material y  $p$  la presión hidrostática. Además,  $\sigma_e$  es la tensión efectiva o el segundo invariante de la tensión y  $\varepsilon_e$  es la velocidad de deformación efectiva o el segundo invariante de la velocidad de deformación. Estos se pueden escribir como:

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} \quad (6)$$

$$\varepsilon_e^2 = \frac{2}{3} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$$

En este trabajo se asumió un material viscoplástico y rígido donde la tensión de flujo depende de la velocidad de deformación y de la temperatura. Esto se representa por la siguiente relación<sup>16</sup>:

$$\sigma_e = \frac{1}{\alpha} \arg Sh \left[ \left( \frac{Z}{A} \right)^{1/n} \right], \quad \text{con } Z = \varepsilon_e \exp \left( \frac{Q}{RT} \right) \quad (7)$$

donde  $\alpha$ ,  $Q$ ,  $A$  y  $n$  son constantes del material,  $R$  es la constante de los gases y  $T$  la temperatura absoluta. Las constantes del material se pueden determinar usando ensayos de compresión estándar. El modelo mecánico se completa luego de describir las condiciones de contorno apropiadas.

### Modelo térmico

La distribución de temperaturas se obtiene resolviendo la ecuación de balance de calor<sup>15</sup>

$$\rho C_p \frac{D\theta}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla \theta) + \gamma \quad (8)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $C_p$  la capacidad calorífica,  $k$  la conductividad térmica,  $\theta$  la temperatura y  $\gamma$  la tasa de generación de calor interna por disipación de la potencia viscoplástica. Se asume que alrededor del 90% de la potencia plástica se convierte en calor<sup>17</sup>. El término de tasa de generación de calor por trabajado mecánico se puede expresar como el producto contraído de la tensión con la velocidad de deformación, como sigue:

$$\gamma = \eta \mathbf{S} : \mathbf{D} \quad (9)$$

con  $\eta$  fracción de potencia que no es absorbida en defectos microestructurales.

Además se adoptaron las propiedades del aluminio puro, tanto para los parámetros mecánicos como para la conductividad y el calor específico dependientes de la temperatura. Los flujos  $q^\circ$  se pueden prescribir en una porción del contorno  $\partial\Omega_q$ , mientras que la temperatura  $\theta^\circ$  se puede especificar en el resto de la superficie  $\partial\Omega_\theta$ . Esto se puede expresar como:

$$k \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = q^\circ \text{ en } \partial\Omega_q, \quad \theta = \theta^\circ \text{ en } \partial\Omega_\theta, \quad (10)$$

donde  $\partial\Omega = \partial\Omega_q + \partial\Omega_\theta$  y  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria externa en el contorno  $\partial\Omega$ . La contribución de  $q^\circ$  se debe al enfriamiento de la superficie por convección y a la transmisión de calor por contacto en las interfaces “placas-herramienta” y “placas-base”.

## MODELO GEOMÉTRICO

En el presente estudio se asume un marco de referencia fijado a la herramienta de soldado, de tal manera que la placa se mueve hacia ella con una velocidad ( $V_w=2.0\text{mm/seg}$ ) y temperaturas ( $25^\circ\text{C}$ ) impuestas en la superficie de entrada a la zona de estudio.

La superficie del perno de la herramienta está mecanizada en forma de espiral. El efecto de flujo ascendente producido por dicho espiral se simula imponiendo una componente de velocidad ascendente en la superficie del perno. Esta velocidad es función del paso del espiral ( $1.5 \text{ mm/vuelta}$ ) y la velocidad de rotación de la herramienta ( $\omega=22.5 \text{ vueltas/seg}$ ).

Los datos del material y otros parámetros del modelo figuran en la tabla 1 y 2.

Propiedades	$\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	$C_p$ [J/Kg °C]	$k$ [W/m °C]
Aluminio	$2.7 \cdot 10^3$	$1.05 \cdot 10^3$	207.0
Acero	$7.0 \cdot 10^3$	$1.05 \cdot 10^3$	40.0

Tabla 1: Propiedades térmicas de la herramienta (acero), la base (acero) y las placas de aluminio

Material	A	$\alpha$ [mm <sup>2</sup> N <sup>-1</sup> ]	N	H [J mol <sup>-1</sup> ]
Alloys 1S	$0.224 \cdot 10^{13}$	0.052	4.54	177876.4

Tabla 2: Parámetros de la ley de viscosidad

En este trabajo se considera que el material en contacto con la herramienta tiene un deslizamiento relativo del 50%. Esta suposición, aunque no es muy realista, simplifica en gran medida la implementación del problema.

En la figura 2 se muestra una perspectiva de la geometría del problema y se detallan las dimensiones utilizadas. Las dimensiones se basaron en el trabajo de Cabot et al<sup>2</sup>.

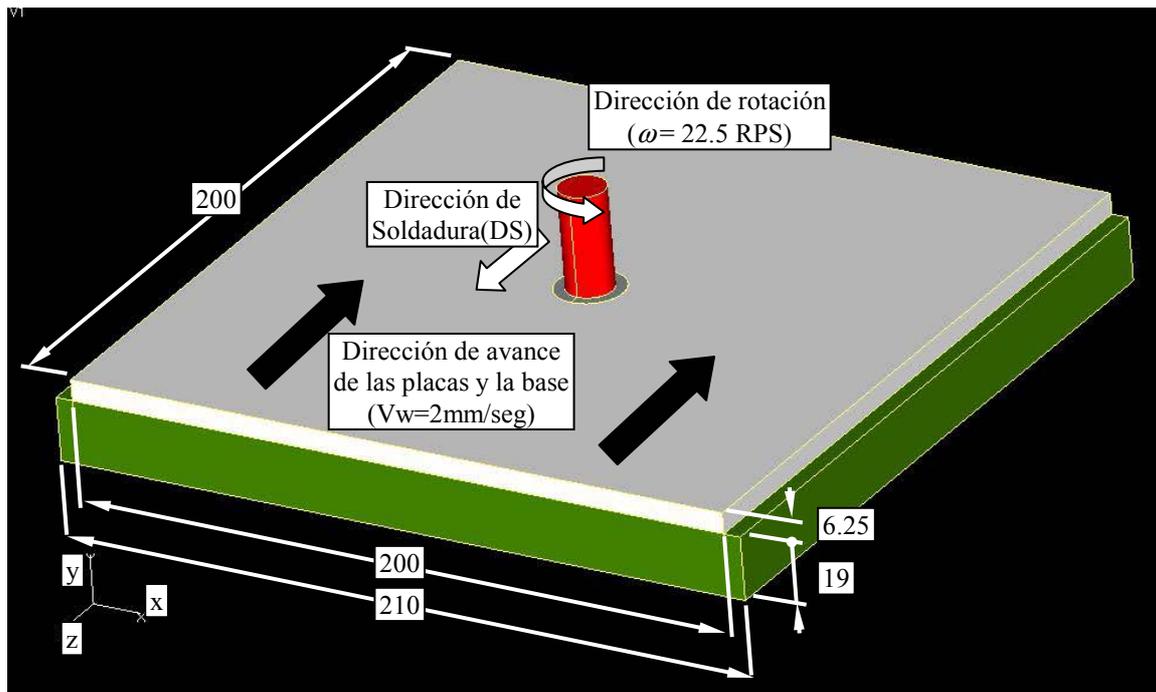


Figura 2: Dimensiones utilizadas(en mm).

En la figura 3.a y 3.b se muestran por separado las diferentes zonas del problema. La zona 1 representa la base de acero donde se apoyan las placas a soldar y la zona 4 corresponde a la herramienta. Las zonas 2 y 3 representan las placas a soldar, las cuales se mallaron con baja y alta concentración de elementos, respectivamente. En la figura 4.a y 4.b se muestra la geometría con su ubicación real.

En las figuras 4.c y 4.d se muestran detalles de la malla densificada en las zonas 2 y 3.

## MODELADO NUMÉRICO

Se modeló la placa base con una malla de elementos finitos tetraédricos del tipo Taylor-Hood<sup>15</sup>, es decir, tetraedros P2-P1, con interpolaciones cuadráticas para las velocidades y lineales para las presiones, en orden a lograr estabilidad de las interpolaciones de presión por la condición de divergencia nula conjuntamente con una adecuada captura de los gradientes de tensión en las capas límites. La malla implementada resultó tener aproximadamente 85000 elementos con 107000 nodos de velocidad (Fig. 4).

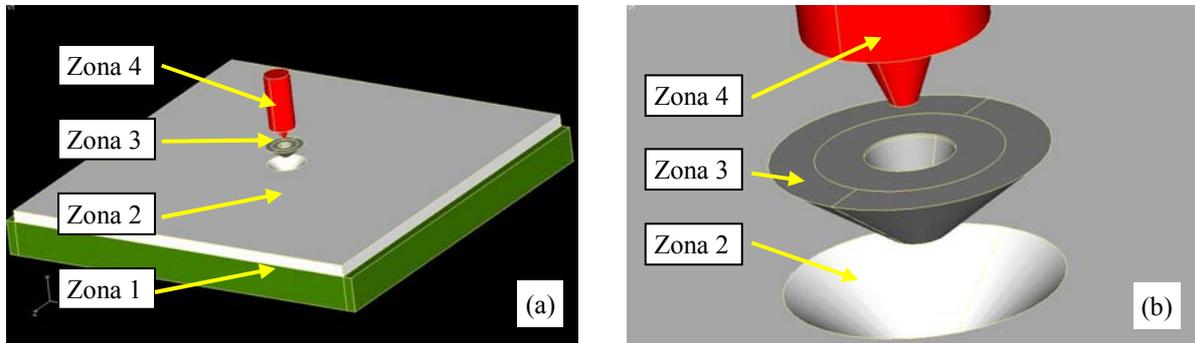


Figura 3: Zonas en las que se divide la geometría.

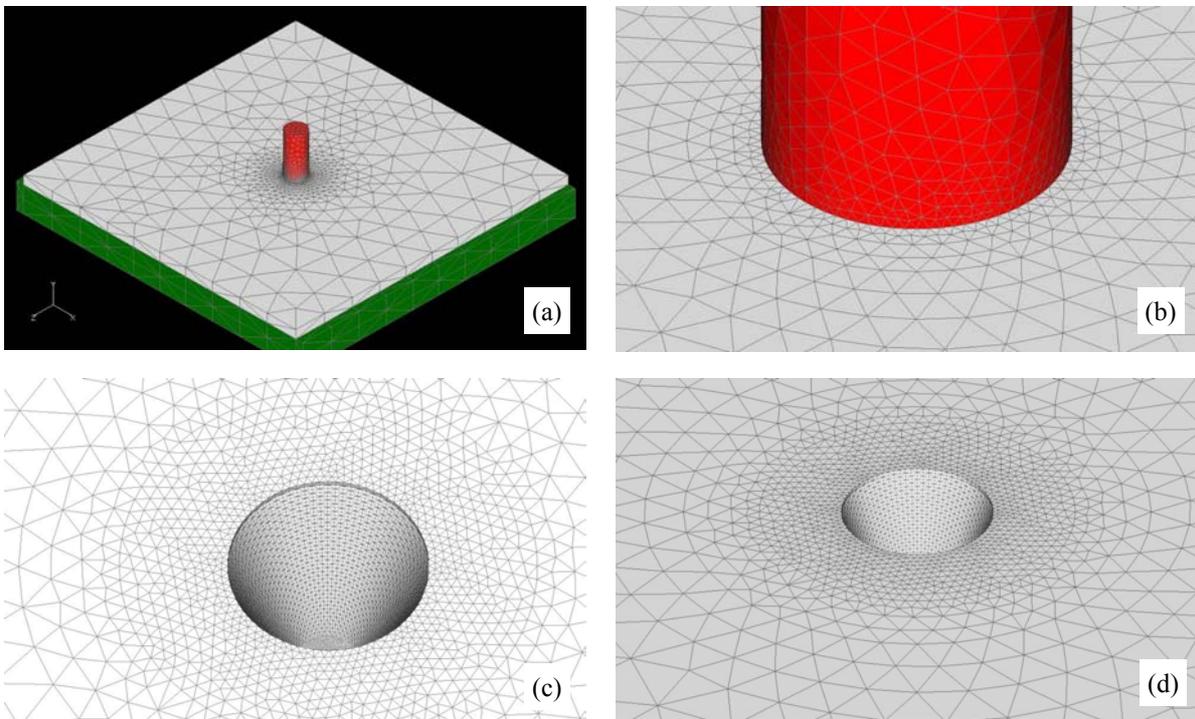


Figura 4: Perspectiva de la malla del modelo (a) y detalles de las zonas densificadas (b, c y d).

El algoritmo de resolución consiste en dos subpasos: en el primero de ellos se obtiene el campo de velocidades asumiendo fijo el campo de temperaturas. Se itera por reemplazos sucesivos para adaptar no-linealmente los valores de viscosidad de acuerdo a las velocidades de deformación obtenidas en la iteración anterior. Las ecuaciones discretas son obtenidas a partir de la formulación clásica del problema de Stokes para flujos totalmente viscosos incompresibles y de acuerdo a las interpolaciones antes mencionadas, con el agregado de pseudo-compresibilidad artificial del tipo de Chorin<sup>18</sup>. El sistema de ecuaciones lineales para cada iteración es resuelto por el método de gradientes conjugados cuadrados con un preconditionador de factorización incompleta de tipo LU de acuerdo al esquema propuesto

por Y. Saad en SparseKit<sup>19</sup>. En el segundo sub-paso se resuelve el campo de temperaturas con interpolación cuadrática como un problema de convección difusión, asumiendo el campo de velocidades resultante en el primer sub-paso. El método de resolución numérica es el mismo que en el primero.

Aunque se requiere la solución estacionaria, se implementó un esquema de avance en el tiempo totalmente implícito, usado fundamentalmente como preconditionador del sistema de ecuaciones.

## RESULTADOS

### Campo de temperaturas

Los valores de temperaturas conseguidos en el modelado se contrastaron con datos experimentales obtenidos por termografía en la figura 5. En la figura 5.c, se muestra un detalle de la vista en perspectiva del modelado. En esta imagen se indican, dentro de los recuadros, los valores de temperaturas obtenidos experimentalmente en diferentes puntos de la superficie de las placas. Se puede observar que en los puntos más alejados a la herramienta, los valores de temperaturas obtenidos en el modelado son notablemente inferiores a los observados experimentalmente. Esto se puede deber a que en la confección de las soldaduras, se utiliza un tiempo de precalentamiento en el cual la herramienta está en contacto con las placas sin velocidad de avance. Esto produce un incremento general de la temperatura de las placas.

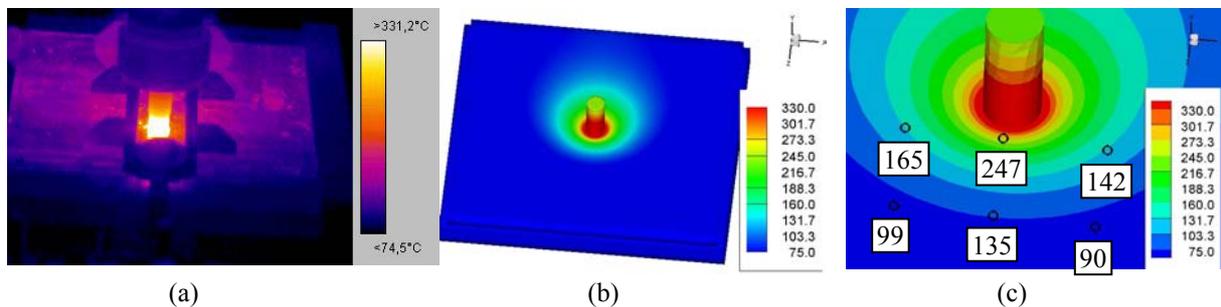


Figura 5: Comparación entre una termografía de la soldadura (a) y los datos obtenidos de la simulación (b y c).

En las figuras 6.a y 6.b se muestran las distribuciones de temperatura en los planos XY e YZ, respectivamente, ubicados en el centro de rotación de la herramienta (ver fig 2). En el plano XY se observa que en el área de contacto entre la herramienta y las placas, la temperatura es algo mayor del lado de avance (LA) respecto al lado de retroceso (LR). Esto se debe a una mayor velocidad de corte en el lado de avance, ya que de este lado la dirección de la velocidad tangencial en la herramienta es contraria a la dirección de la velocidad de soldadura. En el plano YZ se observa el efecto de arrastre convectivo sobre el campo de temperaturas producido por la velocidad de soldadura.

Como se observa en las figuras 5 y 6, la distribución de temperaturas en la herramienta es prácticamente lineal en la dirección de su eje de rotación. Por lo tanto, se podría haber

reemplazado la misma por una condición de Newmann en la zona de contacto Herramienta-Placas, reduciendo el costo computacional del problema.

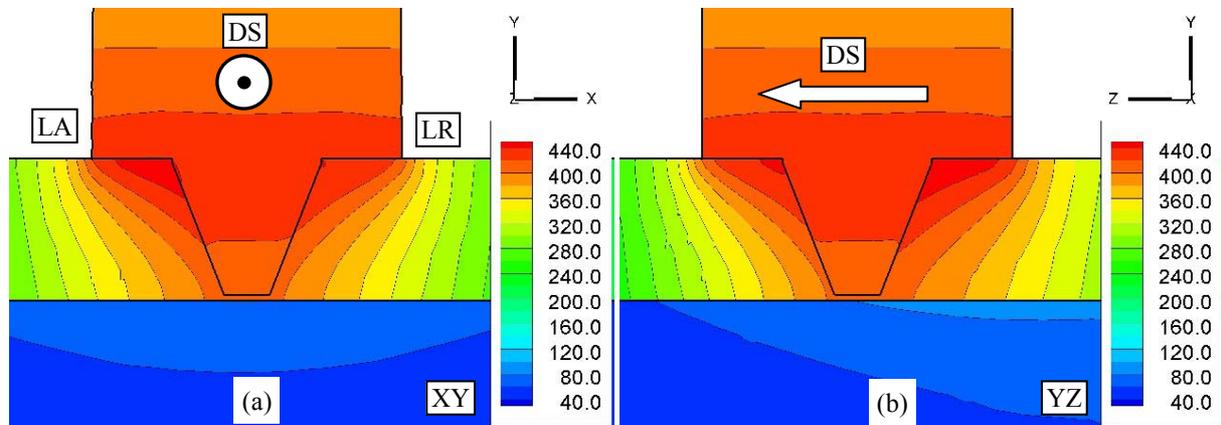


Figura 6: Corte del campo de temperaturas en los planos XY(a) e YZ(b) en el centro de la herramienta.

### Campos de velocidades

En la figura 7 se muestran iso-superficies del modulo de la velocidad correspondientes a 3 mm/seg(Fig 7.a) , 5 mm/seg(Fig 7.b) y 20 mm/seg(Fig 7.c). En dicha figura se observa que el flujo de material para las velocidades mas próximas a las velocidades de soldadura ( $V_w=2\text{mm/seg}$ ) es mayor del lado de retroceso respecto al lado de avance (Fig 7.a y 7.b). En la figura 7.c la velocidad es diez veces mayor a la velocidad de soldadura y la zona que delimita es prácticamente simétrica. Por lo tanto, podría considerarse que representa aproximadamente el límite entre la zona termomecánicamente afectada y la zona central sometida a plastificación y agitación<sup>20</sup>. Esto se corresponde con los trabajos experimentales realizados por Murr<sup>21</sup>, donde reporta una zona termomecánicamente afectada alrededor del perno que tiene al menos el doble de tamaño del lado de retroceso respecto al lado de avance.

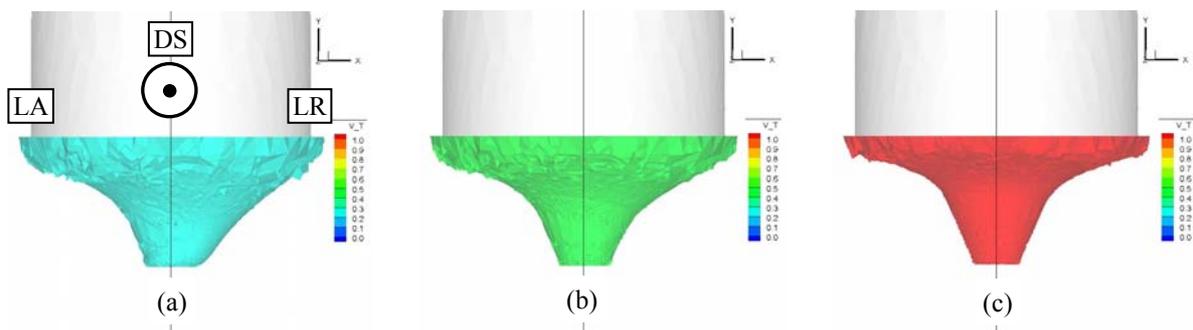


Figura 7: iso-superficies de velocidades correspondientes a 3 mm/seg(a) , 5 mm/seg(b) y 20 mm/seg(c).

En la figura 8 se muestra el recorrido de las líneas de flujo alrededor de la herramienta. La línea de flujo de la figura 8.a muestra claramente el efecto ascendente que produce el estriado

de la superficie. También se puede ver como el material se mantiene cerca de la superficie del perno de la herramienta durante varias vueltas de la misma antes de seguir su curso (contrario a la dirección de soldadura). En la figura 8.b se muestra como algunas líneas de flujo ingresan a la zona de alta plastificación, mientras que otras solo se desvían y luego siguen su curso.

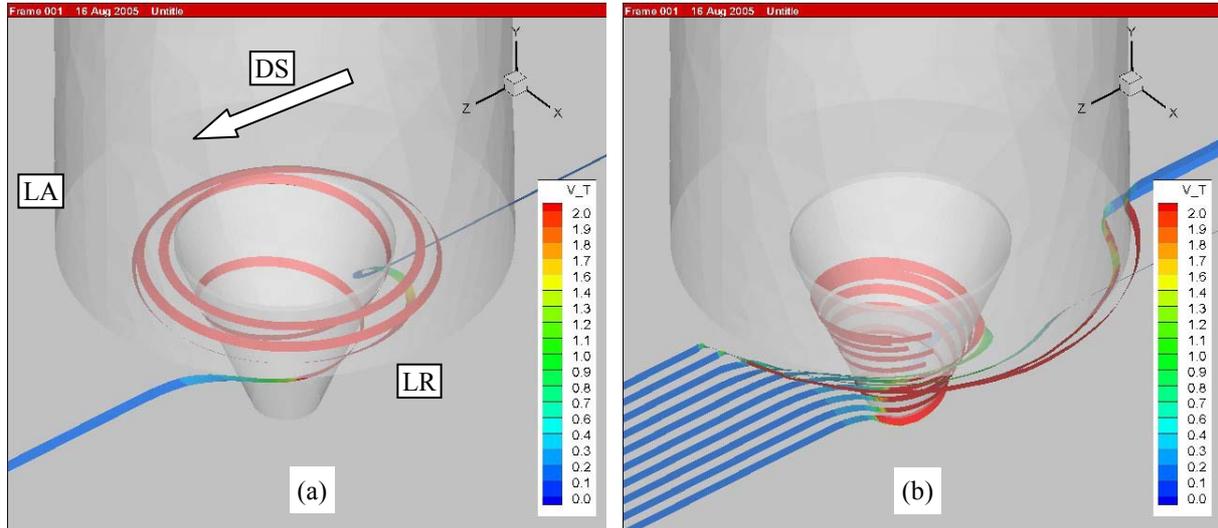


Figura 8: Líneas de flujo alrededor de la herramienta

Para contrastar el flujo de material obtenido en el modelado, se observaron las deformaciones producidas en el material ubicado delante de la herramienta. En esta zona el material comienza a deformarse sin que las placas lleguen a unirse.

En la figura 9 se contrastan las fotos del material ubicado delante de la herramienta y las superficies generadas por líneas de flujo del material que se obtuvieron en el modelado. Se observa que la zona deformada plásticamente obtenida por el modelado (fig 9.d) es más grande que la obtenida experimentalmente (fig 9.c), principalmente en la zona cercana al apoyo de la herramienta. Esta diferencia se puede atribuir al hecho de aplicar una condición de deslizamiento relativa uniforme a toda la superficie de la herramienta. Por lo tanto, se puede inferir que las velocidades impuestas al apoyo de la herramienta en este modelo son superiores a las que se presentan en forma experimental, generando una zona de deformación mayor.

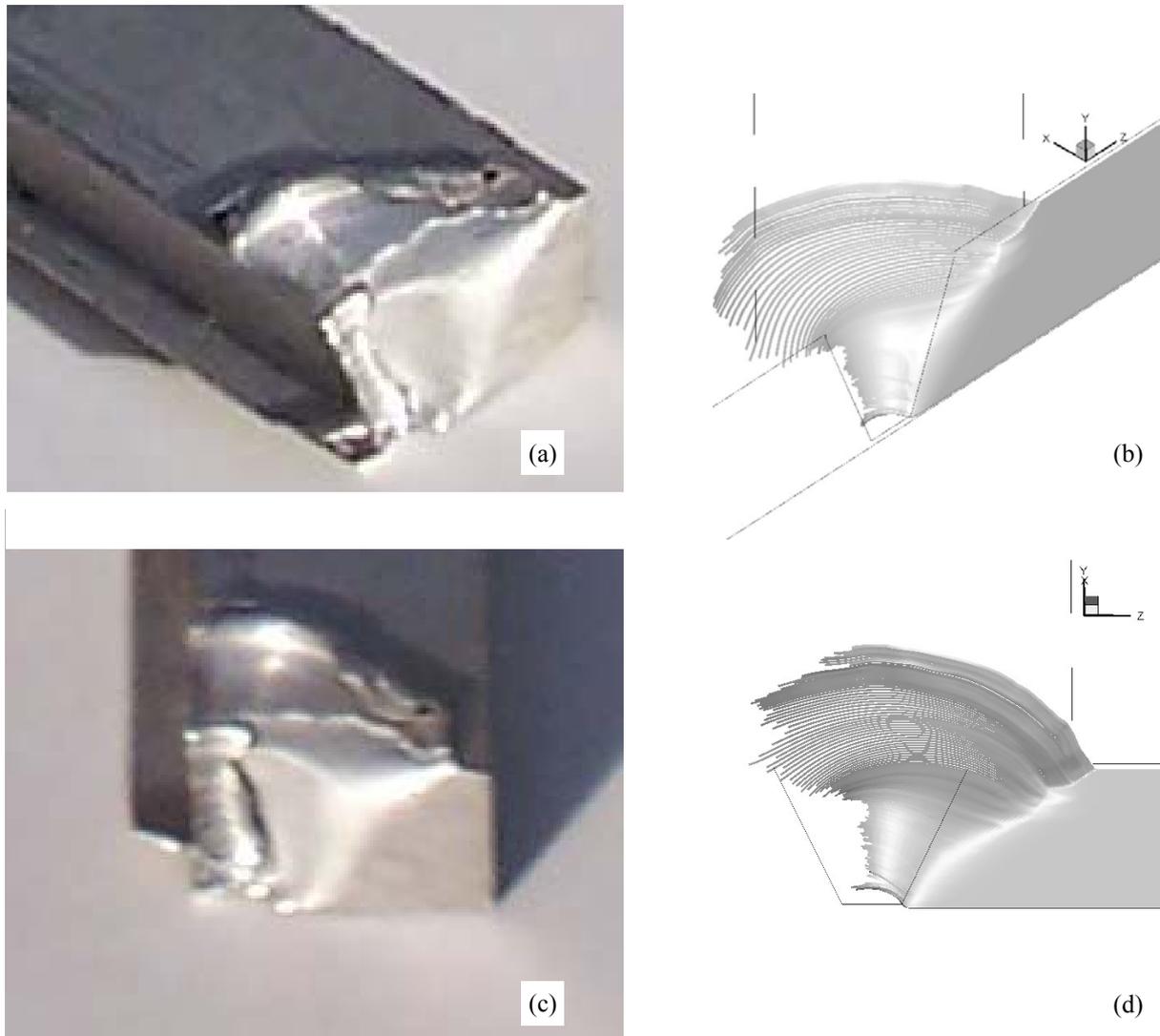


Figura 9: fotos del material ubicado delante de la herramienta (a y c) y líneas de flujo en perspectivas similares a las fotos(b y d).

## CONCLUSIONES

Se presentó un modelo computacional tridimensional por Elementos Finitos del proceso de FSW. Los resultados obtenidos son congruentes con los observados experimentalmente. Se destaca la presencia de una zona con muy fuertes gradientes en el campo de velocidades en las adyacencias del perno de soldadura, y otra externa a ésta donde las velocidades del flujo son mucho menores. Estas observaciones son congruentes con las reseñadas en la literatura.

Por otro lado, se reconoció la necesidad de aplicar condiciones de deslizamiento mas sofisticadas en la interface Herramienta-Placas con el fin de captar mejor los fenómenos de

flujo de material alrededor del perno. También hizo referencia a modificaciones en el modelo térmico para reducir el costo computacional del problema.

## REFERENCIAS

- [1] M.W. Thomas, J. Nicholas, J.C. Needham, M.G. Murch, P. Tem-plesmith, C.J. Dawes, *Friction Stir Butt welding*, GB Patent Application No.9125978.8 Dec 1991. US Patent No.5460317, Oct. (1995).
- [2] P. Cabot, A. Moglioni, E. Carella, “Soldadura por fricción agitación (FSW) de AA 6061 T6”, *Materia*, **8**, 187-195 (2003).
- [3] D. Santiago, G. Lombera, S. Urquiza, A. Cassanelli, L. A. de Vedia, “*Numerical modeling of joints welded by “friction stir welding” process*”, *Materials Research*, **7**, (2004).
- [4] P. Ulysse, “*Three-dimensional modeling of the friction stir-welding process*”, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **42**, 1549-1557 (2002).
- [5] O.V. Flores, C. Kennedy, L.E. Murr, D. Brown, S. Pappu, B.M. Nowak, J. McClure, “*Microstructural issues in a friction-stir welded aluminum alloy*”, *Scr. Mater.* , **38**, 703 (1998).
- [6] L.E. Murr, G. Liu, J.C. McClure, “*A TEM study of precipitation and related microstructures in friction-stir-welded 6061 aluminum*”, *J. Mater. Sci.*, **33**, 1243 (1998).
- [7] G. Liu, L.E. Murr, C.S. Niou, J.C. McClure, F.R. Vega, “*Micro- structural aspects of the friction-stir welding of 6061-T6 aluminum alloy*”, *Scr. Mater.*, **37**, 335 (1997).
- [8] C.J. Dawes, W.M. Thomas, “*Friction stir process for aluminum alloys*”, *Welding Journal*, **75**, 41 (1996).
- [9] C.J. Dawes, “*An introduction to friction stir welding butt welding and its developments*”, *Welding and Fabrication Jan* (1995).
- [10] J.E. Gould, Z. Feng, “*Heat flow model for friction stir welding of aluminum alloys*”, *Journal of Material Processing and Manufacturing Science*, **7**, (1998)
- [11] D. Rosenthal, R. Schemerber, “*Thermal study of arc welding*”, *Welding Journal*, **17**, 208 (1938).
- [12] C. M. Chen, R. Kovacevic, “*Finite element modeling of friction stir welding – thermal and thermomechanical analysis*”, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **43**, 1319-1326 (2003).
- [13] M. Song, R. Kovacevic, “*Thermal modeling of friction stir welding in a moving coordinate system and its validation*”, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **43**, 605-615 (2003).
- [14] P.A. Colegrove, H. R. Sherclif, “*3-Dimensional CDF modelling of flow round a threaded friction stir welding tool profile*”, *Journal of Material Processing Technology*, artículo en prensa (2005).
- [15] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, “*The finite element method*”, McGraw Hill, Vol. I., 1989, Vol. II, (1991).

- [16] T. Sheppard, D. S. Wright, “*Determination of flow stress: Part 1 constitutive equation for aluminum alloys at elevated temperatures*”, Metals Technology, June, 215 (1979).
- [17] W Johnson, H. K. Kudo (Eds), The mechanics of Extrusion, Manchester University Pres, UK, 40 (1962).
- [18] A.J. Chorin , Math. Comp, **22**, 745-762 (1968).
- [19] Y. Saad, “*SPARSEKIT: a basic tool kit for sparse matrix computation (version2)*”, University of Illinois, <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/software/SPARSKIT/sparskit.html>, (1994).
- [20] S. Kallee, D. Nichols, Friction Stir Welding – Superior Weld Quality, CONNET TWI, May, 1-2 (1998).
- [21] M. Guerra, C. Schimdt, J. C. McClure, L.E. Murr , A.C. Nunes, “Flow patterns during friction stir welding”, Materials Characterizations, **49**, 95-101 (2003).