

## UN METODO DE COLOCACION USANDO UNA FORMULA DE INTERPOLACION OPTIMAL LOCAL

Carlos Zuppa

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de San Luis  
5700, San Luis, Argentina  
e-mail: [zuppa@unsl.edu.ar](mailto:zuppa@unsl.edu.ar)

### RESUMEN

En este trabajo se usa una fórmula de Interpolación Optimal en Puntos Localizada (LOPI) en métodos de colocación. LOPI es un interpolador que reproduce polinomios y tiene funciones bases localmente soportadas construidas a partir de esquemas de Interpolación Optimal en Puntos localizados con una partición de la unidad. El esquema resultante no depende de grillas estructuradas y produce resultados de buena calidad en la solución de problemas elípticos de contorno.

### ABSTRACT

The use of a Local Optimal Point Interpolating Formula (LOPI) in solving PDEs with a collocation method is introduced in this paper. LOPI is an interpolating formula that reproduces polynomials and has compactly supported basis, constructed by localization of Optimal Point Interpolation formulas by a partition of unity. The scheme is a meshless method that produce high quality results and accurate solutions in elliptic boundary problems.

### INTRODUCCION

El concepto de resolver problemas elípticos mediante el uso de funciones bases radiales (RBF) fue introducido por Kansa en 1990 [1,2] usando funciones radiales multicuadráticas propuestas por Hardy [3]. El método MQ de Kansa es un esquema de colocación sin grilla estructurada que conduce a problemas de dimensión finita con matrices completamente llenas. En [4], Lancaster y Salkauskas modifican el método de interpolación de Hardy con una suma booleana de operadores de interpolación de manera que la fórmula de interpolación resultante sea *p-reproductiva* (reproduce exactamente  $p$ -polinomios). Este esquema de interpolación también es global, esto es, usa todos los nodos en el dominio.

En [5], hemos localizado la fórmula de Lancaster y Salkauskas mediante una partición de la unidad, produciendo un esquema de interpolación (LOPI) que tiene funciones bases localmente soportadas y produce matrices ralas en el esquema de Kansa para resolver PDEs. El principal objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento de LOPI en este método de colocación para resolver PDEs. Varios experimentos numéricos muestran que este esquema puede producir soluciones con alto grado de precisión.

### INTERPOLACION OPTIMAL LOCALIZADA

En el espacio  $n$ -dimensional  $R^n$ ,  $\| \cdot \|$  denota la norma euclidiana y  $B(y;r)$  es la bola abierta  $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : \|x - y\| < r\}$  con centro  $y$  y radio  $r$ . Usaremos la notación de multi-

índices standard. En particular, dado un multi-índice  $k = (k_1, \dots, k_n) \in N^n$ ,  $|k|$  denota la suma  $k_1 + \dots + k_n$ .

Sean  $f = (f_\beta)$ ,  $\beta = 1, \dots, K$ , valores en los distintos puntos de  $S = \{x_1, \dots, x_K\}$ , y  $g$  la función radial definida por:

$$g(x) := \sqrt{1 + c_q \|x\|^2} \quad (1)$$

Un interpolador exacto del dato  $f$  como combinación lineal  $T_S[f](x) = \sum_{i=1}^K a_i g(x - x_i)$  de trasladadas de la función  $g$  puede ser construido con ayuda del Vandermoniano  $V$  de  $g$ . Cuando  $V$  es inversible, los coeficientes  $a = (a_i)$  están dados por  $a = V^{-1}f$ . El operador  $T_S$  no es  $p$ -reproductivo. Para aumentar  $T_S$  por medio de una suma booleana de operadores de manera de volverlo  $p$ -reproductivo, efectuamos el proceso siguiente:

Sea  $\{b_0, \dots, b_l\} = \{x^k\}_{0 \leq |k| \leq p}$  la base canónica del espacio  $P_p$  de polinomios de grado menor o igual a  $p$  y  $B$  la matriz de evaluación de la base  $\{b_0, \dots, b_l\}$  en los nodos  $\{x_1, \dots, x_K\}$  como es habitual en los métodos de mínimos cuadrados.

Si  $Q_S := (B^T V^{-1} B)^{-1} B^T V^{-1}$ , el polinomio  $\sum_{0 \leq |k| \leq p} c_k b_k(x)$ , donde  $c = (c_k)$  esta definido por  $c = Q_S f$ , es el polinomio de grado  $p$  que mejor aproxima al dato  $f$  en el sentido de mínimos cuadrados. Ahora aplicamos el operador  $T_S$  para corregir la deficiencia en esta aproximación. Esto es, si definimos una matriz  $P_S$  y funciones vectoriales  $v$  y  $b$  mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} P_S &= V^{-1}(I - BQ_S) \\ v(x) &= (g(x - x_1), \dots, g(x - x_K)) \\ b(x) &= (b_0(x), \dots, b_l(x)) \end{aligned} \quad (2)$$

el operador de interpolación  $p$ -reproductivo está definido por

$$I_S(f)(x) = \langle v(x), P_S f \rangle + \langle b(x), Q_S f \rangle, \quad x \in R^n \quad (3)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar standard de vectores. Esta es la fórmula de interpolación global de Lancaster y Salkauskas llamada Interpolación Óptima en Puntos ([4], 11.5), aunque no es óptima en ningún sentido.

La fórmula (3) luce formidable y computacionalmente costosa en la fase de preproceso, especialmente en el cálculo de  $V^{-1}$  que requiere a priori  $O(K^3)$  operaciones. Sin embargo, se puede recurrir a algoritmos que reducen este costo a  $O(K \log(K))$ , y algunas veces  $O(K)$ , operaciones. Ver por ejemplo [6].

Procederemos ahora a la definición de nuestra fórmula de interpolación localizada. Sea  $\Omega$  un dominio abierto acotado en  $R^n$ ,  $G^N$  un conjunto arbitrario de  $N$  nodos  $x_\alpha \in \overline{\Omega}$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ ,

y  $\{(\omega_\alpha, W_\alpha)\}$  una partición de la unidad asociada a los *nodos*. Existen muchas maneras de construir una partición de la unidad, sin embargo, por simplicidad y porque será el esquema utilizado en nuestros experimentos numéricos, construiremos una partición de la unidad de la manera siguiente.

Para  $\alpha = 1, \dots, N$ , el abierto  $\omega_\alpha$  es una bola abierta  $B(x_\alpha; r_\alpha)$ ,  $r_\alpha > 0$ , tal que  $\bar{\Omega} \subset \cup B(x_\alpha; r_\alpha)$  y  $\phi_\alpha$  es la función definida por

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(x) &:= \exp\left(\frac{\lambda_{p^m}}{\|x\|^2 - r_\alpha^2}\right), \quad \text{si } \|x\| < r_\alpha \\ \phi_\alpha(x) &:= 0, \quad \text{si } \|x\| \geq r_\alpha \end{aligned} \quad (4)$$

Como es habitual, las funciones de la partición de la unidad son ahora definidas por

$$W_\alpha := \frac{\phi_\alpha}{\sum_{\beta=1}^N \phi_\beta}$$

Definimos también para  $\alpha = 1, \dots, N$ , los conjuntos  $S_\alpha := \{x_\beta \in G^N : x_\beta \in \omega_\alpha\}$ . Esto es,  $S_\alpha$  es la estrella de *nodos* que rodean al *nodo*  $x_\alpha$ .

Si  $R^N$  es el conjunto de posibles valores de funciones en los nodos de  $G^N$ , definimos un operador de interpolación  $LO : R^N \rightarrow C^\infty(R^n)$  mediante la fórmula

$$LO(f)(x) := \sum_{\alpha=1}^N I_{N_\alpha}(f|S_\alpha)(x) \cdot W_\alpha(x), \quad f \in R^N \quad \text{y } x \in R^n \quad (5)$$

Es claro que la función interpoladora  $LO(f)$  tiene la misma clase de diferenciabilidad que las funciones de la partición de la unidad, en nuestro caso,  $C^\infty$ . No es difícil mostrar que  $LO$  es un operador lineal, es *p-reproductivo*, y satisface la propiedad *delta-kronecker*. Además, si  $(e_\alpha)_{\alpha=1, \dots, N}$  es la base canónica de  $R^N$ , las funciones  $(\varphi_\alpha)_{\alpha=1, \dots, N}$  definidas por  $\varphi_\alpha := LO(e_\alpha)$  forman una base del operador de interpolación en el sentido de que es válido, por linealidad, la siguiente fórmula más usual para un operador de interpolación:

$$LO(f) = \sum_{\alpha=1}^N f_\alpha \cdot \varphi_\alpha, \quad f \in R^N \quad (6)$$

y en [5] mostramos que la clase de funciones  $\{\varphi_\alpha\}$  es también una partición de la unidad.

### EL METODO DE COLOCACION USANDO LOPI

El procedimiento será ilustrado para PDE elípticas. Asumimos que el operador interior y los operadores de borde  $P, B_N, B_D$ , son lineales, por simplicidad, y forman un problema elíptico bien colocado:

$$\begin{aligned}
 Pu(x) &= f(x), & x \in \Omega \\
 B_N u(x)|_{\Gamma_N} &= s_N(x) \\
 B_D u(x)|_{\Gamma_D} &= s_D(x)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Aquí,  $B_D$  es un operador de Dirichlet y  $B_N$  es un operador de Neumann o mixto. Después de reordenar posiblemente, podemos particionar el conjunto de *nodos* en la forma:

$$G^N = \{(x_\beta) |_{\beta=1, \dots, M_1} \subset \Omega, (x_\beta) |_{\beta=M_1+1, \dots, M_2} \subset \Gamma_N, (x_\beta) |_{\beta=M_2+1, \dots, N} \subset \Gamma_D\}$$

Buscamos una solución aproximada de (7) de la forma

$$u_h(x) = LO(f)(x) = \sum_{\alpha=1}^{M_2} f_\alpha \varphi_\alpha(x) + S_D(x), \quad x \in \bar{\Omega} \tag{8}$$

donde  $S_D(x) = \sum_{\alpha=M_2+1}^N s_D(x_\alpha) \varphi_\alpha(x)$ . Sustituyendo (8) en (7) y usando colocación en los *nodos* de  $G^N$  obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
 Pu_h(x) &= \sum_{\alpha=1}^{M_2} f_\alpha P \varphi_\alpha(x_\beta) = f(x_\beta) - PS_D(x_\beta), & \beta = 1, \dots, M_1 \\
 B_N u_h(x) &= \sum_{\alpha=1}^{M_2} f_\alpha B_N \varphi_\alpha(x_\beta) = s_N(x_\beta) - B_N S_D(x_\beta), & \beta = M_1+1, \dots, M_2
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Naturalmente, es difícil utilizar en la práctica la expresión (8). Es mejor escribir la aproximación  $u_h$  en la forma:

$$u_h(x) = \sum_{\alpha=1}^N I_{S_\alpha}(f | S_\alpha)(x) \cdot W_\alpha(x) \tag{10}$$

y proceder como anteriormente. Un algoritmo eficiente para búsqueda rápida de nodos próximos puede ser de mucha utilidad en este caso (ver [7]).

La implementación directa de (9) en problemas de contorno de Neumann o mixtos crea algunos efectos que pueden reducir la precisión del método de colocación. Esto puede ser porque la discretización en los *nodos* del borde excluye la discretización de la ecuación principal que gobierna el sistema en estos *nodos* (una ecuación por *nodo*), así que sólo los *nodos* internos soportan dicha ecuación y además, en los *nodos* del borde, la estrella  $S_\alpha$  tiende a tener forma no simétrica, con el centro de masa corrido hacia el interior del dominio.

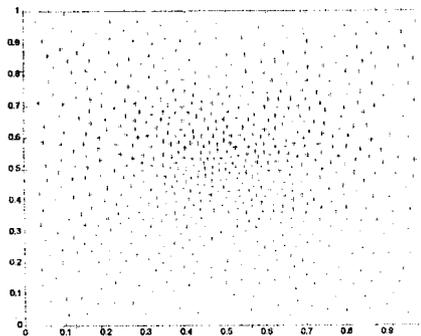
Cuando la geometría del dominio lo permite, la precisión de la solución puede ser mejorada con la estrategia siguiente, que adoptaremos en nuestros experimentos numéricos: en cada *nodo*  $x_\alpha \in \Gamma_N$  agregaremos un *nodo* externo en la dirección de la normal exterior de  $\Gamma_N$  a una distancia compatible con la medida de la grilla utilizada y, por supuesto, con la geometría de  $\partial\Omega$ . De esta forma, incrementamos el número de nodos, un *nodo* más por cada *nodo*  $x_\alpha \in \Gamma_N$ , y seguiremos el esquema, común en la comunidad usuarios de diferencias finitas, de

imponer dos ecuaciones por *nodo*  $x_\alpha \in \Gamma_N$ : una ecuación resultante de las condiciones de contorno y otra del operador principal  $P$ .

### CONDICIONES PARA LOS EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

**El conjunto de nodos  $G^N$ .** Utilizamos un algoritmo para generar grillas random, pero con la condición de no tener *nodos* demasiado próximos. Concretamente, fijado un  $h > 0$ , generamos *nodos* al azar en el dominio y lo aceptamos en la grilla sólo si no están próximos a otro *nodo* en una distancia por ejemplo igual a  $0.6h$ . Este algoritmo tiende a generar grillas con una cierta uniformidad en la distribución de *nodos* y cada *nodo* está relativamente bien rodeado de *nodos* a distancias aproximadas a  $h$ . Es claro que estableciendo una función de aceptación que varía en el dominio se obtienen densidades diferentes en regiones diferentes. Aún así, con esta metodología la distribución de nodos no es tan despareja como en grillas generadas totalmente al azar. La figura 1 muestra una grilla con un selector variable de 0.07 en el borde hasta 0.02 en el centro del dominio. En cada punto del dominio, si el selector en ese punto tiene el valor  $0.6h$ , podemos interpretar a  $h$  como la medida de la grilla en ese punto.

En descargo del uso de estas grilla relativamente buenas, podemos decir que, como en cualquier método que use particiones de la unidad, la elección de la partición, de la forma de los soportes, etc., no puede ser tan ciego como en nuestra simple elección. Hay que proporcionar algoritmos elaborados de selección de estos componentes para evitar las oscilaciones que se producen en aproximaciones en puntos no cercanos a los *nodos*. Pero esta cuestión no será tratada aquí.



**Figura 1.** Grilla generada con selector de aceptación variable

**La partición de la unidad y la función radial.** En cada *nodo*  $x_\alpha$  donde la medida de la grilla es  $h_\alpha$  elegimos el radio de la bola  $\omega_\alpha$  igual a  $2.3h_\alpha$ . Hemos encontrado experimentalmente que el parámetro  $\lambda_{pu}$  en (4) puede producir también variaciones en la oscilación del error en métodos con partición de la unidad. En nuestros experimentos se ha usado con buenos resultados  $\lambda_{pu} = 0.08$ .

Es bien sabido también el efecto fundamental que ejerce en la calidad de la aproximación una correcta elección del parámetro  $c_q$  en la función radial (1) [8, 9, 10]. En este trabajo hemos

usado la siguiente selección: para todas las funciones radiales asociadas al operador local  $I_{s_\alpha}$  hemos fijado  $c_q = 0.08/h_\alpha^n$ .

**Medidas de Error.** Todos nuestros ejemplos son bi-dimensionales y esto explica el cambio de notación en los errores. En todos los casos hemos medido el error no sólo en los *nodos* donde la aproximación tiende a comportarse mejor, sino que también en una grilla uniforme  $E$  de medida 0.025. Los errores medidos fueron:

$$\begin{aligned} em &= \max_{(x,y) \in E} |u(x,y) - u_h(x,y)| \\ emx &= \max_{(x,y) \in E} |u_x(x,y) - u_{h,x}(x,y)| \\ emy &= \max_{(x,y) \in E} |u_y(x,y) - u_{h,y}(x,y)| \\ eml^2 &= \sqrt{\frac{|\Omega|}{|E|} \sum_{(x,y) \in E} |u(x,y) - u_h(x,y)|^2} \\ emxl^2 &= \sqrt{\frac{|\Omega|}{|E|} \sum_{(x,y) \in E} |u_x(x,y) - u_{h,x}(x,y)|^2} \\ emyl^2 &= \sqrt{\frac{|\Omega|}{|E|} \sum_{(x,y) \in E} |u_y(x,y) - u_{h,y}(x,y)|^2} \end{aligned}$$

A efectos comparativos, cuando  $\Omega$  es un cuadrado de lado  $l$ , se puede usar como medida  $h$  de la grilla el número introducido en [11]:  $h = l/(N-1)$  ( $N$  es la cardinalidad de la grilla de *nodos*).

### EXPERIMENTOS NUMERICOS

**Modelo 1.** Este problema representa a los más simples y bien comportados problemas elípticos de tipo Dirichlet. Casi cualquier método se comporta bien en este problema.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \Omega = \{(x,y) \mid 0 < x, y < 1\}$$

$$u \mid \partial\Omega = g$$

$$\text{Solución real: } g(x,y) = -x^3 - y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

Los resultados, para grillas con selector uniforme, están resumidos en la Tabla I

**Tabla I**

Ndf ( $h$ )	$em$	$emx$	$emy$	$eml^2$	$emxl^2$	$emyl^2$
110 (0.105)	8.11e-4	1.24e-2	1.51e-2	2.53e-4	2.15e-3	2.11e-3
484 (0.047)	1.41.e-4	2.43e-3	1.48e-3	3.55e-5	2.51e-4	2.23e-4

Este ejemplo ha sido tratado por Aluru [11] con un esquema modificado del Reproducing Kernel Particle Method (RKPM). Se puede observar que LOPI tiene un notorio mejor comportamiento, a pesar que RKPM usa 6 veces más grados de libertad.

**Modelo 2. Helmholtz en un cuadrado.** Este problema tiene más complejidad, con coeficientes variables y la solución tiene varias oscilaciones.

$$u_{xx} + u_{yy} - [100 + \cos(2\pi x) + \sin(3\pi y)]u = f(x, y), \quad \Omega = \{(x, y) \mid 0 < x, y < 1\}$$

$$u \mid \partial\Omega = 0$$

Solución:

$$u(x, y) = -0.31[5.4 - C(x)]S(x)(y^2 - y)[5.4 - C(y)][(1 + v(x, y)^4)^{-1} - 0.5]$$

$$C(z) = \cos(4\pi z), \quad S(x) = \sin(\pi x), \quad v(x, y) = 4(x - 0.5)^2 + 4(y - 0.5)^2$$

Este ejemplo ha sido tomado del modelo B de ELLPACK, pag. 265 [12]. La tabla II resume nuestros resultados y muestra que el método se compara bien con los métodos tradicionales de ELLPACK.

**Tabla II**

Ndf (h)	em	emx	emy	eml <sup>2</sup>	emxl <sup>2</sup>	emyl <sup>2</sup>
270 (0.065)	4.99e-3	8.80e-2	1.06e-1	1.18e-3	1.78e-2	1.81e-2
485 (0.047)	6.58e-3	1.49e-2	1.39e-2	6.83e-4	7.35e-3	8.96e-3

**Modelo 3. Problema mixto.**

$$u_{xx} + u_{yy} = -8\pi^2 \cos(2\pi x) \sin(2\pi y), \quad \Omega = \{(x, y) \mid 0 < x, y < 1\}$$

$$u = 0, \quad y = 0, 1; \quad u_x = 0, \quad x = 0, 1$$

$$\text{Solución real: } u(x, y) = \cos(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

Resultados:

**Tabla III**

Ndf	em	emx	emy	eml <sup>2</sup>	emxl <sup>2</sup>	emyl <sup>2</sup>
270	4.44e-3	3.53e-2	8.75e-2	1.33e-3	6.20e-3	6.46e-3
581	2.66e-3	1.81e-2	2.91e-2	5.26e-4	3.81e-3	3.27e-3

Remarcamos que en este ejemplo los errores máximos son también medidos en el borde Neumann, ver [13].

## DISCUSION

A pesar de que si bien los métodos basados en colocación son notorios por su sensibilidad de la solución a la elección correcta de los *nodos* de colocación, el método es flexible y produce buenos resultados con una cantidad reducida de nodos. Esto muestra más que nada la eficacia de interpolación de LOPI. Sería interesante estudiar el uso de LOPI en métodos integrales que son menos sensibles a la colocación de los nodos y recurren a derivadas menores de la función interpolada.

## REFERENCIAS

- [1] **Kansa, E. J.**, Multiquadratics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-I. Surface approximations and partial derivative estimates, *Comp. Math. Appl.* 19(8 & 9) : 127-145, 1990.
- [2] **Kansa, E. J.**, Multiquadratics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-II. Solutions to hyperbolic, parabolic, and elliptic partial differential equations, *Comp. Math. Appl.* 19 (8/ 9): 147-161, 1990.
- [3] **Hardy, R. L.**, Theory and applications of the multiquadratic-biharmonic methods: 20 years of discovery, *Comput. Math. Appl.* 19 (8/9): 163-208, 1990.
- [4] **Lancaster P. and Salkauskas, K.** Curve and Surface Fitting. An introduction . Academic Press, San Diego, 1986.
- [5] **Zuppa, C.**, A Local Optimal Point Interpolation Formula, presentado a Revista de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile.
- [6] **Beatson, R. K. and Newsam, G. N.**, Fast evaluation of radial basis functions: I, *Comp. Math. Appl.* 24 (12): 7-20, 1992.
- [7] **Xiaoxu Han, Oliveira S. and Stewart D.**, New Matrix Assembly Techniques for Meshless Methods, Computational Mathematics TR 128, Univ. of Iowa, 1999.
- [8] **Golberg, M. and Chen, C. S.**, Improved multiquadratic approximation for partial differential equations, *Engin. Anal. Bound. Elem.* 18 : 9-17, 1996.
- [9] **Hagen, R. E. and Kansa, E. J.**, Studies on the R parameter in the multiquadratic functions applied to ground water pumping, *J. Appl. Sci. and Comput.* 1(2):266-281, 1994.
- [10] **Sharan, M., Kansa, E. J. and Gupta, S.**, Application of the Multiquadratic Method for Numerical Solution of Elliptic Partial Differential Equations, *Appl. Math. and Comput.* 84:275-302, 1997.
- [11] **Aluru, N. R.**, A point collocation method based on reproducing kernel approximations, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 47:1083-1121, 2000.
- [12] **Rice, J. R. and Boisvert, R. F.**, *Solving Elliptic Problems Using ELLPACK*, Springer Verlag, NY, 1985.
- [13] **Cardona, A. y Simonetti, G.**, Métodos sin malla para resolver la ecuación de conducción del calor, *Rev. Int. de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 16( 1) : 33-47, 2000.