

Comparación del Método de Elementos Finitos con Métodos Meshless en Nube de Puntos Random

Facundo Del Pin, Sergio Idelsohn,
Nestor Calvo y Mario Storti

Centro Interenacional de Métodos Computacionales en Ingeniería
INTEC, CONICET, UNL
Güemes 3450
3000 Santa Fé
Argentina
e-mail: fdelpin@intec.unl.edu.ar

ABSTRACT

The presented work consists in analyzing the behavior of a new method in development called Meshless Finite Element Method (MFEM). This method is a meshless method that uses polyhedral elements. These polyhedra use special shape functions that behave as linear finite element shape functions when the polyhedra are tetrahedra or a triangle in 2-D. MFEM has found to have remarkable results in 3-D.

RESUMEN

El presente trabajo consiste en analizar el comportamiento de un nuevo método en desarrollo llamado Meshless Finite Element Method (MFEM). Este es un método meshless que utiliza elementos poliedricos. Estos poliedros utilizan funciones de forma especiales que se comportan como las funciones de forma de elemento finito lineal cuando el poliedro es un tetraedro o un triángulo en 2-D. Se han obtenido resultados remarcables en 3-D.

INTRODUCCIÓN

La solución aproximada de la ecuación diferencial de *Laplace* con distintos términos fuente y condiciones de contorno será contrastada con la solución exacta para cada problema en particular. La aproximación es hecha con diferentes métodos tales como:

1. Elementos Finitos lineales (FEM);
2. Meshless Finite Element Method (MFEM);
3. Moving Least Squares (MLSQ);
4. Fixed Least Squares (FPM)[3];
5. Smooth Particle Hydrodynamic (SPH)[4];
6. Natural Element Method (NEM)[6];

La intención del presente trabajo es evaluar los métodos numéricos mencionados en ejemplos de tipo meshless, donde la nube de puntos tiene una distribución aleatoria. En particular es de interés observar el comportamiento de MFEM en estos casos y su posible implementación en problemas meshless. El comportamiento de los diferentes métodos se describe a continuación así como los problemas resueltos.

MESHLESS FINITE ELEMENT METHOD (MFEM)

La búsqueda de la conectividad entre nodos con un algoritmo **acotado** en el tiempo que nos de un soporte de integración consistente tanto en 2-D como en 3-D es el objetivo fundamental de los métodos sin mallas. Un método que utiliza mallas con fuerte trayectoria teórica como Elementos Finitos (FEM) parecía haber superado esta prueba, utilizando la triangulación de Delaunay (tetraedros en 3-D) para definir la conectividad entre los nodos. Sin embargo para una misma distribución de puntos el problema de las conectividades entre nodos utilizando la triangulación de Delaunay puede tener más de una solución (Fig. 1). Esto adiciona al tiempo de iteraciones del algoritmo de Delaunay el tiempo de iteraciones *hombre* para mejorar la *estética* final de la triangulación. El problema análogo al de la Fig. 1 pero en 3-D se puede ver en la Fig. 2.

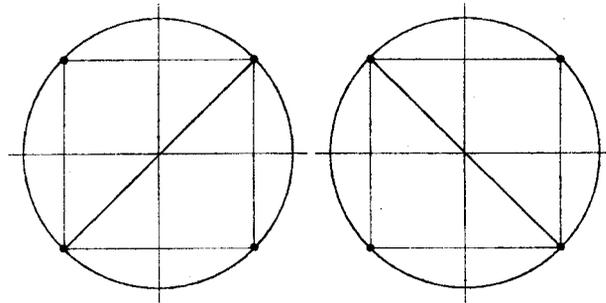


Figura 1: Inestabilidades en la triangulación de Delaunay. Cuatro nodos en el mismo círculo, ¿qué triángulo elegir?

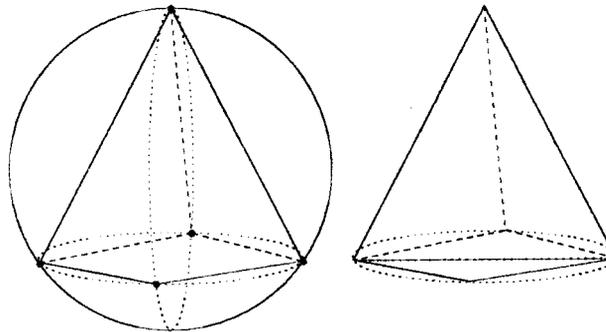


Figura 2: Cinco nodos en la misma esfera y posible tetraedro de volumen "nulo" a la derecha.

El método MFEM es una generalización del Método de Elementos Finitos para obtener funciones de forma únicas por elemento en un tiempo acotado y con un algoritmo automático para cual-

quier distribución de nube de puntos en donde las funciones de forma dependerán únicamente de los nodos del elemento.

En un problema donde los puntos son parte del problema físico (nodos como representación de materia) y estos se mueven según las ecuaciones de gobierno como pueden ser las ecuaciones de Navier-Stokes (Fig. 3), la configuración de la nube de puntos que define la discretización del continuo puede tomar configuraciones locales como en la Fig. 1. En un problema dependiente del tiempo como el mostrado en la Fig. 3 esto implicaría intervenciones manuales para solucionar el problema de la conectividad de puntos en la triangulación de Delaunay, trabajo tedioso y prácticamente imposible.

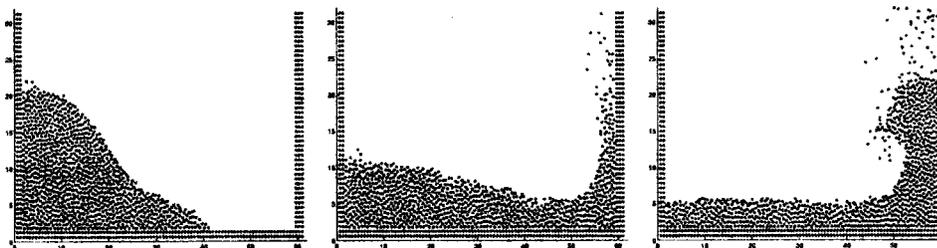


Figura 3: Ejemplo de un problema físico donde los nodos de la discretización son también parte de materia del problema.

En un caso como en las Fig. 1 y Fig. 2 MFEM resuelve las indeterminaciones tomando todo el polígono (poliedro en 3-D) circunscripto en el círculo (esfera en 3-D) como elemento. Esto no sólo resuelve las indeterminaciones sino que también absorbe aquellos posibles poliedros de volumen "nulo". Evidentemente una gran parte del dominio estará definido por la triangulación de Delaunay y solamente donde esta presente problemas de indeterminación se crearán polígonos. Una vez que el dominio esté totalmente particionado en polígonos definimos como función de forma dentro de cada polígono la interpolación No-Sibsoniana[5]. Si $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M)$ es un conjunto de nodos que pertenece a un poliedro, la función de forma $N_i(x)$ correspondiente al nodo m_i en un punto interno x se define primero construyendo el diagrama de Voronoi del conjunto $\{\mathbf{m} \cup x\}$ y luego calculando:

$$N_i(x) = \frac{S_i(x)/h_i(x)}{\sum_{j=1}^M S_j(x)/h_j(x)} \quad (1)$$

donde $S_i(x)$ es la superficie del diagrama de Voronoi correspondiente al nodo i y $h_i(x)$ es la distancia entre el punto x y la superficie de Voronoi (Fig. 4).

La interpolación No-Sibsoniana cumple con las siguientes propiedades:

1. $0 \leq N_i(x) \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^M N_i(x) = 1$
3. $N_i(x_j) = \delta_{ij}$
4. $x = \sum_{i=1}^M N_i(x)x_i$

A la definición particular de la función de forma No-Sibsoniana para un conjunto de nodos en la misma esfera de Voronoi se le adiciona las siguientes propiedades:

1. Sobre la superficie de un poliedro, la función de forma depende únicamente de los nodos de esta superficie;

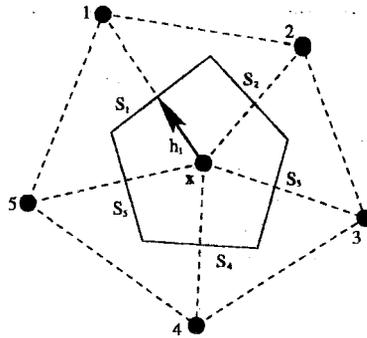


Figura 4: Cálculo de la función de forma.

2. en superficies triangulares (o en todos los contornos poligonales en 2-D), las funciones de forma son lineales;
3. si el poliedro es un tetraedro (o triangulo en 2-D) las funciones de forma son las funciones de forma lineales de elementos finitos;
4. debido a la propiedad 1, las funciones de forma tienen continuidad C_0 entre dos poliedros vecinos;
5. como todos los nodos de los elementos están sobre la misma esfera, la evaluación de la función de forma y sus derivadas es muy simple.

Los pasos del algoritmo para MFEM son:

1. Para un conjunto de nodos calcular las esferas vacías con 4 nodos;
2. generar los elementos poliédricos utilizando los nodos de la esfera y los nodos de todas las esferas coincidentes;
3. calcular las funciones de forma y sus derivadas, utilizando la interpolación No-Sibsoniana en todos los puntos de Gauss necesarios para evaluar las integrales de la formulación débil.

De esta manera queda definido el método Meshless Finite Element Method (MFEM) como un método verdaderamente meshless ya que las funciones de forma dependen exclusivamente de la posición de los nodos y los pasos 1 y 2 del algoritmo están acotados en el tiempo evitando la "cosmética de mallas" normalmente necesarias en generadores de mallas 3-D.

PROCEDIMIENTO PARA LA EVALUACIÓN

La evaluación se hará en 2 etapas. La primera de ellas será un ejemplo 2-D con todos los métodos mencionados y la segunda será un caso 3-D en donde intervendrán sólo algunos de estos métodos. Como las nubes son aleatorias se toman 10 nubes de puntos para tener un muestreo suficientemente amplio en cada método. Es decir cada problema tendrá una aproximación diferente en cada nube de puntos.

Tanto para los ejemplos 2-D como para los 3-D habrán 2 configuraciones de nubes de puntos básicas:

- nube generada con puntos random;

- distribución de puntos estructurada en donde los puntos se perturban un determinado porcentaje de h .

En cualquiera de los casos los puntos del contorno no se modifican y siguen respondiendo a una distribución estructurada.

EVALUACIÓN DEL ERROR

Para la evaluación del error se utilizó un error global[1] definido como:

$$\varepsilon = \frac{1}{|u^{(e)}|_{max}} \sqrt{\frac{1}{NP} \sum_{I=1}^{NP} [u_I^{(e)} - u_I^{(c)}]^2} \quad (2)$$

donde

- NP es el número de puntos en la nube;
- $u^{(c)}$ es la solución calculada;
- $u^{(e)}$ es la solución exacta.

Se define también un parámetro h tal que:

$$h = h_x = h_y = \frac{1}{\sqrt{NP} - 1} \quad (3)$$

Para ambos casos (2-D y 3-D) usaremos el mismo criterio de evaluación del error. Para evaluar la convergencia se evaluará cada método en 4 configuraciones diferentes con diferente cantidad de puntos cada una: 5×5 , 9×9 , 17×17 , 33×33 (y sus análogos en 3-D). Con estas aproximaciones se calcula el error para cada caso y se confecciona una gráfica $\log(\varepsilon)$ vs $\log(h)$. La pendiente de esta curva representa la convergencia aproximada del método numérico.

FUENTE EXPONENCIAL 2-D

Evaluaremos la solución de la ecuación de Laplace para las siguientes condiciones de borde de Dirichlet[2]:

$$u = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \quad (4)$$

y término fuente:

$$f(x, y) = \left(-2ky(1-y) + (ky(1-x)(1-y) - kxy(1-y))^2 - 2kx(1-x) + (kx(1-y)(1-x) - kxy(1-x))^2 \right) \frac{e^{kxy(1-x)(1-y)}}{1 - e^{k/16}} \quad (5)$$

La solución analítica de este problema es

$$u(x, y) = \frac{1 - e^{kxy(1-x)(1-y)}}{1 - e^{k/16}} \quad (6)$$

donde $k = 200$ para nuestro ejemplo.

Para este problema se evaluaron los diferentes métodos numéricos dando valores de convergencia como los que se muestran en la Fig. 5.

Los tipos de convergencia que se observan en la Fig. 5 para la función están sintetizados en la tabla 1.

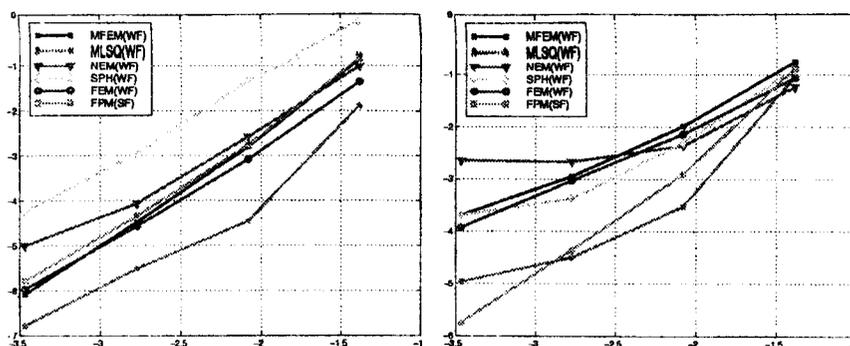


Figura 5: Convergencia en gráfico logarítmico para la función de los distintos métodos (izq.) numéricos y sus derivadas (der.).

Method	Function	x derivative	y derivative
MFEM	2.5	1.4	1.4
FPM	2.1	2.0	2.0
FEM	2.1	1.4	1.4
SPH	1.9	1.3	1.3
NEM	1.9	0.8	0.8
MLSQ	1.6	0.9	1.0

Tabla 1: Valores de convergencia observados en la Fig. 5 para la función.

FUENTE EXPONENCIAL 3-D

En este caso se evaluará la solución de la ecuación de *Laplace* en 3-D con las mismas condiciones de contorno de Dirichlet análogas a las definidas para el ejemplo 2-D:

$$u = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1 \quad (7)$$

y término fuente:

$$f(x, y, z) = \left(-2kxyz(1-y)(1-z) + (kxz(1-x)(1-y)(1-z) - kxyz(1-y)(1-z))^2 \right. \\ \left. - 2kxz(1-x)(1-z) + (kxz(1-x)(1-y)(1-z) - kxyz(1-x)(1-z))^2 \right. \\ \left. - 2kxy(1-x)(1-y) + (kxy(1-x)(1-y)(1-z) - kxyz(1-x)(1-y))^2 \right) \\ \frac{e^{kxy(1-x)(1-y)}}{1 - e^{k/64}} \quad (8)$$

La solución analítica de este problema es

$$u(x, y, z) = \frac{1 - e^{kxyz(1-x)(1-y)(1-z)}}{1 - e^{k/64}} \quad (9)$$

Donde $k=200$ como en el caso 2-D.

En este caso vamos a contrastar MFEM, FEM y FPM en un cubo 3-D con una nube de puntos perturbada $0.025h$ como se explicó anteriormente y otro caso donde la nube será generada completamente random. Este último caso es de particular interés ya que los únicos métodos que

darán una solución satisfactoria son MFEM y FPM. En esta prueba el porcentaje de elementos de volúmen “nulo” (ver Fig. 2) es suficientemente grande (14% de los elementos) para que FEM falle.

Los gráficos de error se presentan a continuación. En la Fig. 6 vemos las curvas de convergencia para el caso de nube perturbada.

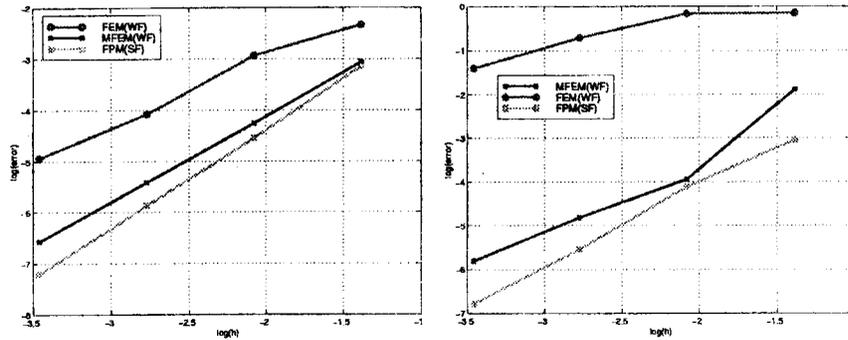


Figura 6: Convergencia en gráfico logarítmico para las funciones (izq.) y sus derivadas (der.) para el caso de la nube perturbada $0.025h$.

La convergencia se observa en la tabla 2.

Method	Function	x derivative	y derivative	z derivative
FPM	1.96	1.8	1.8	1.8
MFEM	1.8	1.41	1.39	1.4
FEM	1.25	0.26	0.52	0.43

Tabla 2: Tabla de convergencia para los 3 métodos en una nube 3-D perturbada $0.025h$.

Por otro lado la Fig. 7 muestra la convergencia para el caso de las nubes random que se puede observar en la tabla 3.

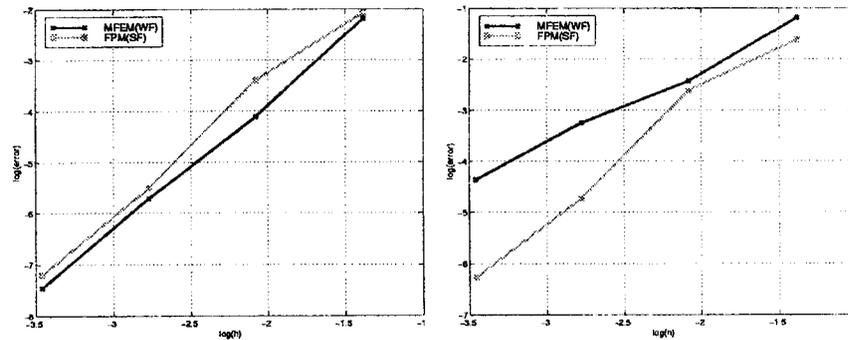


Figura 7: Convergencia en gráfico logarítmico para las funciones (izq.) y sus derivadas (der.) para el caso de la nube random.

Method	Function	x derivative	y derivative	z derivative
FPM(SF)	2.47	2.23	1.99	1.9
MFEM(WF)	2.57	1.53	1.56	1.53

Tabla 3: Tabla de convergencia en una nube 3-D random.

CONCLUSIONES

El método MFEM ha probado una buena performance en la solución de la ecuación de Laplace con fuente exponencial. En 2-D MFEM se desempeña de forma similar a los métodos tradicionales. Sin embargo en 3-D la diferencia es notable y MFEM ha demostrado mayor capacidad en la solución de problemas de nube de puntos frente a otros métodos tradicionales como FEM.

REFERENCIAS

- [1] N. R. Aluru. - A point collocation method based on reproducing kernel approximations. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000;47:1083 - 1121
- [2] Gloria Simonetti, Alberto Cardona. - Métodos sin malla para resolver la ecuación de conducción del calor. - Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 16, 1, 33-47 (2000)
- [3] Carlos Sacco et al.
- [4] S. Koshizuka and Y. Oka. - Moving Particle Semi-Implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid. - NUCLEAR SCIENCE AND ENGINEERING: 123, 421-434 (1996).
- [5] Belikov, V. and Semerov A. "Non-Sibsonian Interpolation on Arbitrary System of Points in Euclidean Space and Adaptative Generating Isolines Algorithm." Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation, Proc. of the 6th Intl. Conf. Greenwich Univ., July 1998.
- [6] Sukumar et al.