

## FORMULACION DEL METODO DE LAS SOLUCIONES FUNDAMENTALES A PARTIR DE LA INTEGRAL FUNCIONAL

A.P. Cisilino y E. Pardo

División Soldadura y Fractomecánica - INTEMA  
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata - CONICET  
Av. Juan B. Justo 4302 - (7600) Mar del Plata, Argentina  
email: cisilino@fi.mdp.edu.ar / FAX: +54 (223) 4810066

### RESUMEN

En el espíritu del BEM, el Método de las Soluciones Fundamentales (MFS) surge como una técnica relativamente nueva para la solución de ciertos problemas de valores de contorno elípticos. El MSF puede ser visto como una formulación indirecta del BEM o una modificación al método de Trefftz, en la que la solución del problema es aproximada mediante la combinación lineal de soluciones fundamentales a partir de fuentes colocadas fuera del dominio del problema. La posición de estas fuentes puede estar fija o ser optimizada al mismo tiempo que se determinan los coeficientes de la combinación lineal de forma tal que la solución satisfaga las condiciones de contorno de la forma más exacta posible. El método resulta relativamente sencillo de implementar, y se adapta con facilidad a problemas con condiciones de contorno complicadas. El MFS ha encontrado una amplia aplicación para la solución de problemas de potencial, acústica, elastostática y problemas biarmónicos.

En este trabajo se presenta una formulación alternativa del MFS que ofrece ciertas ventajas sobre las ya existentes. La misma consiste en incorporar la aproximación en función de las soluciones fundamentales en la formulación de la integral funcional. De esta forma, las ecuaciones finales contienen un parámetro físico de regularización  $\epsilon$ . La formulación propuesta permite colocar las fuentes sobre el contorno del problema evitando el proceso de optimización. Se demuestra que la nueva formulación permite recuperar la formulación clásica del MSF en el límite de  $\epsilon \rightarrow 0$ . Finalmente se presenta una serie de resultados para ejemplos clásicos de validación y se discuten los méritos relativos de la formulación.

### ABSTRACT

In the spirit of the BEM the Method of Fundamental Solutions (MFS) is a relatively new method for the solution of certain elliptic boundary value problems. It can be viewed either as an indirect boundary element method or a modified Trefftz method in which the solution of the problem is approximated by a linear combination of fundamental solutions with sources located outside the problem domain. The locations of the sources are either preassigned or determined along with the coefficients of the linear combination so that the approximate solution satisfies the problem boundary conditions as accurately as possible. The method is relatively easy to implement, and has found extensive application in computing solutions to a broad range of applications such as in potential problems, acoustics, elastostatics and biharmonic problems.

In this work an alternative formulation of the MFS is presented which offers some advantages over the existing ones. It consists of feeding the approximation in terms of fundamental solutions into a functional integral formulation of the problem. In doing so, the final equations contain a physical regularization parameter  $\epsilon$ . It is shown that the standard collocation method approach of the MSF is recovered from the present one in the limit  $\epsilon \rightarrow 0$ . Numerical examples are presented for a number of test problems and their relative merits discussed.

### INTRODUCCIÓN

Un conjunto completo de soluciones de la ecuación de Laplace en el círculo es

$$u = (Ar^n + Br^{-n})(C \cos(n\theta) + D \sin(n\theta)) \quad \text{para } n=1,2,3,\dots \quad (1-a)$$

$$u = A + B \log(r) \quad \text{para } n=0 \quad (1-b)$$

En el método de Trefftz, la aproximación se construye usando la parte no-singular del conjunto (1), que son polinomios armónicos:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N R^i [ A_i \cos(i\theta) + B_i \sin(i\theta) ] \quad (2)$$

Los coeficientes  $A_i$  y  $B_i$  de (2) pueden hallarse de diversas maneras. Por ejemplo en el método de colocaciones, que es el más simple de implementar, se impone que la función de prueba (2) satisfaga las condiciones de contorno en un número de puntos,  $M$ , sobre el contorno. Típicamente  $M > N$  y el sistema final de ecuaciones lineales se resuelve en el sentido de mínimos cuadrados. La desventaja principal de esta técnica es que frecuentemente se requiere un número elevado de términos polinómicos para obtener resultados satisfactorios [1]. En última instancia, esto es consecuencia de la expansión de Taylor; mientras que una función suave puede representarse satisfactoriamente por polinomios en forma local, una aproximación global requiere en general muchos términos.

Otro método que ha recibido atención recientemente, el método de las soluciones fundamentales (MSF), usa exclusivamente el primer término no-singular de (1),  $\log(R)$ . Dado que este término corresponde exactamente a una fuente puntual, el MSF se basa en la suposición de que el campo que satisface la ecuación de Laplace y las condiciones de contorno prescritas puede modelarse con precisión razonable con un número finito de fuentes fuera del. Las funciones de prueba en MSF son:

$$\tilde{u}_{(x)} = B + \sum_{i=1}^N A_i \log|R - R_i| \quad (3)$$

donde  $R_i$  es la posición de la fuente "i".

La base de este método es un conjunto de teoremas desarrollados por Bogomolny[2], que avalan la representación de una función en un círculo mediante un conjunto de funciones  $\log(R)$ . Sin embargo, las razones de su éxito se fundan en motivos más físicos. En verdad, si tomamos el flujo de calor como modelo físico para la ecuación de Laplace, vemos que todo problema de este tipo corresponde a alguna distribución de fuentes de calor, generalmente continua. Por ello, es razonable esperar que con un conjunto finito de fuentes y sumideros pueda modelarse el problema real con precisión razonable, *siempre que estas fuentes sean ubicadas juiciosamente*. Precisamente, este punto constituye la principal limitación del método: la búsqueda de ubicación óptima de las fuentes conduce a un duro problema no-lineal.

Para tratar de superar las limitaciones de ambas técnicas mencionadas, exploramos el desempeño de una técnica diferente que de algún modo combina los métodos citados.

### LA FORMULACIÓN DE LA INTEGRAL FUNCIONAL

Considérese el problema de valores iniciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u \quad (4-a)$$

$$u_{(x,0)} = u_0 \quad (4-b)$$

Es sabido que la solución de (4) en todo el espacio es:

$$u_{(x,t)} = \int S_{(x,\bar{x},t)} u_{(\bar{x},0)} d\bar{V}, \quad S_{(x,\bar{x},t)} = \frac{e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4t}}}{(4t)^{n/2}} \quad (5)$$

donde  $n=1, 2$  ó  $3$  es el número de dimensiones espaciales. La función  $S_{(x,y)}$  es la *función fuente, núcleo de difusión o propagador*. Para un dominio acotado  $\Omega$  con condiciones de contorno prescriptas  $u=u_0$  en  $\partial\Omega_u$  y  $q=\frac{\partial u}{\partial n}=q_0$  en  $\partial\Omega_q$ ,  $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_q = \partial\Omega$ , la fórmula (5) no es más una solución. Sin embargo, ella puede aproximar la solución en todo punto interior con precisión arbitraria dado un paso de tiempo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. En particular, en el estado estacionario el campo  $u_{(x,t)}$  es tal que  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  y por ende satisface la ecuación de Laplace. Para un tal campo la ecuación (5) da:

$$u_{(x)} = \int S_{(x,\bar{x},\varepsilon)} u_{(\bar{x})} d\bar{V} \quad (6)$$

Recíprocamente, un campo que satisfaga la ecuación (6) en todo punto  $x$  para un paso de tiempo  $\varepsilon$  arbitrario satisface la ecuación de Laplace. Esta es la base del Método de la Integra Funcional de solución[3,4], que ha sido utilizado satisfactoriamente para diseñar métodos computacionales sin-malla para elastostática y otros problemas elípticos. Brevemente, el procedimiento es como sigue. El dominio se discretiza utilizando solamente un conjunto de puntos llamados nodos, no siendo necesario conectarlos de modo especial como en elementos finitos. Tampoco se requiere particionar el dominio en elementos o celdas. Todo lo que se necesita es especificar para cada nodo, una "nube" de al menos seis nodos circundantes. Estos se utilizan para ajustar localmente una función prefijada que aproxima el campo localmente. Lo más sencillo es usar un polinomio de al menos segundo grado:

$$\tilde{u}_{(x,y)} = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot y^2 + \dots \quad (7)$$

Los coeficientes  $a_i$  del polinomio aproximante (7) dependen de los valores del campo  $u$  en los nodos de la nube – los que constituyen precisamente incógnitas del problemas. En este punto es que se utiliza la ecuación (6) para construir la  $i$ -ésima ecuación del sistema lineal final. Para ello, sea  $u_i$  el  $i$ -ésimo valor nodal de  $u$ . De la (6) se obtiene entonces la correspondiente ecuación:

$$u_i = \int S_{(x,\bar{x},\varepsilon)} \tilde{u}_{(\bar{x})} d\bar{V} \quad (8)$$

donde  $\tilde{u}_{(x,y)}$  viene dada por (7). El sistema final de ecuaciones contiene un parámetro  $\varepsilon$ , que debe ser ajustado para minimizar el error de discretización.

### FUNCIONES BASE GLOBALES

Ahora mostraremos como el procedimiento antes descrito puede ser adaptado para resolver problemas armónicos usando funciones de aproximación globales. Considérese primero los polinomios armónicos (1-a). Si estos se utilizan para construir una aproximación global como en la fórmula (2), estos pueden insertarse en el esquema de integral funcional, fórmula (8), lo que arroja:

$$u_i = \int S_{(x,\bar{x},\varepsilon)} \tilde{u}_{(\bar{x})} d\bar{V} = \sum_{n=1}^N \int S_{(x,\bar{x},\varepsilon)} r^n [C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)] d\bar{V} \quad (9)$$

Pero la acción del propagador sobre polinomios es dejarlos inalterados – salvo por alguna constante irrelevante – como puede comprobarse por cálculo directo. Entonces, el procedimiento standard de Trefftz se recupera sin modificación.

En cambio, el uso de esta formulación con una distribución de fuentes conduce a un cambio dramático. Si la combinación lineal de fuentes, fórmula (3) se introduce en el esquema de integral funcional, fórmula (8), se obtiene:

$$u_{(x)} = \int S_{(x,\bar{x},\varepsilon)} \tilde{u}_{(\bar{x})} d\bar{V} = \int S_{(x,\bar{x},\varepsilon)} \left[ \sum_{i=1}^N A_i u_{(\bar{x}-x_i)} \right] d\bar{V} \quad (10)$$

Donde  $u_{(x-x_i)}^* = \frac{1}{2\pi} \cdot \log(|x - x_i|)$  es la solución fundamental, es decir el campo de una fuente puntual unitaria. Es más conveniente re-expresar la ecuación (10) en la forma

$$u_{(x_j)} = \sum_{i=1}^N A_i U_{ij} \quad ; \quad U_{ij} = \int S_{(x_j, \bar{x}, \varepsilon)} \cdot u_{(\bar{x}-x_i)}^* \cdot d\bar{V} \quad (11-a)$$

En aquellos puntos donde la condición de contorno es un flujo prescripto  $q = \frac{\partial u}{\partial n}$  la ecuación a imponer no es (11-a) sino:

$$q_{(x_j)} = \sum_{i=1}^N A_i Q_{ij} \quad ; \quad Q_{ij} = \int \frac{\partial S_{(x_j, \bar{x}, \varepsilon)}}{\partial n} \cdot u_{(\bar{x}-x_i)}^* \cdot d\bar{V} \quad (11-b)$$

Las funciones  $U_{ij}$  y  $Q_{ij}$  de las ecuaciones (11) pueden evaluarse analíticamente. Para esto utilizamos el programa Mathematica. El resultado final es:

$$U_{ij} = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \left[ \frac{1}{2} I_{(0, R_{ij}^2)} + \ln(R_{ij}) \right] \quad (12-a)$$

donde  $R_{ij} = \|x_i - x_j\|$  y  $\hat{R}_{ij} = R_{ij} / \varepsilon$

$$Q_{ij} = \left( \frac{-\cos(\beta)}{2\pi \cdot R_{ij}} \right) \left[ 1 - e^{-R_{ij}^2} \right] \quad (12-b)$$

donde  $\beta$  es el ángulo entre la normal exterior,  $n$ , y el vector  $(x_i - x_j)$ .

Una propiedad interesante de las funciones  $U_{ij}$  y  $Q_{ij}$  es que ellas son no-singulares para  $\varepsilon$  finito. Más aún, en el límite  $\varepsilon = 0$  se recupera el MSF original dado que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (U_{ij}) = u_{(x_i-x_j)}^* ; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Q_{ij}) = \frac{\partial u_{(x_i-x_j)}^*}{\partial n}$$

### RESULTADOS NUMÉRICOS

Dado que las funciones  $U_{ij}$  y  $Q_{ij}$  son no-singulares en todas partes, exploramos la posibilidad de ubicar las fuentes en el contorno del dominio. La ventaja de esta técnica es que elimina la búsqueda no-lineal para la ubicación óptima del MSF standard. Para eso se resolvió el problema de Dirichlet en el círculo unitario, con una fuente puntual externa situada a una distancia de un radio desde el contorno como se muestra en la figura 1. Los coeficientes  $A_i$  de la expansión (11-a) computados, permiten recuperar los datos de Dirichlet originales con gran precisión.

Sin embargo, los flujos computados con esos coeficientes usando la fórmula (11-b) están afectados de error considerable, que depende del valor del parámetro  $\varepsilon$ . Calculamos el promedio del error relativo como cociente entre el promedio del valor absoluto exacto en los nodos y el promedio de los valores de flujo computados en los nodos. Los resultados se muestran en la Figura 2 para el caso de 20 nodos. Puede verse que el error relativo decrece a medida que el parámetro  $\varepsilon$  crece. Sin embargo, el error relativo medio es más bien elevado.

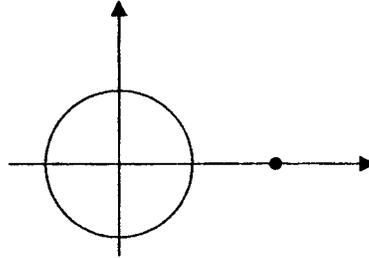


Figura 1: Problema de Dirichlet en el círculo unitario con fuente externa puntual.

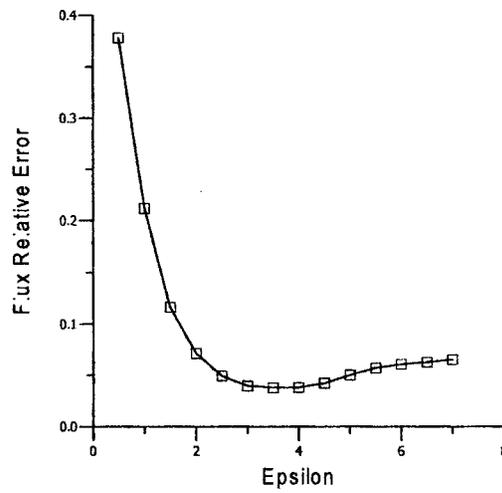


Figure 2: Computed flux relative error vs. parameter epsilon.

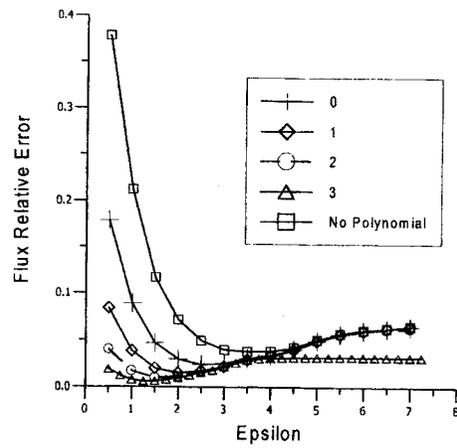


Figure 3: Computed flux relative error vs. parameter epsilon, for different degrees of enriching polynomials.

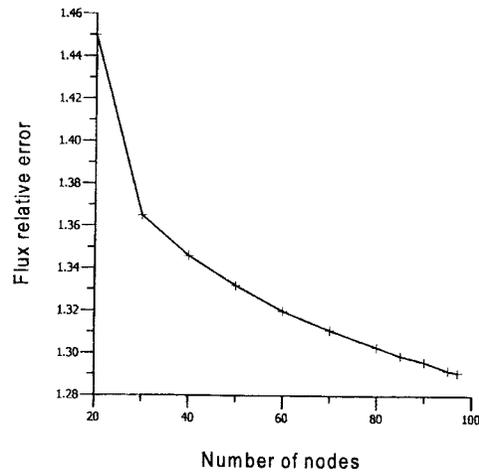


Figure 4: Relative error vs. number of nodes.

Para disminuir el error enriquecimos el procedimiento indicado anteriormente mediante el agregado de unos pocos polinomios armónicos. Los resultados se muestran en la Figura 3. Puede verse que aumentando del polinomio agregado se reduce sustancialmente el error relativo. Asimismo, para cada grado existe un parámetro óptimo  $\varepsilon$  que minimiza el error. Con un polinomio de quinto grado  $\varepsilon$  es igual al diámetro del dominio.

Finalmente, estudiamos las propiedades de convergencia del presente esquema. Los resultados se muestran en las Figuras 4 y 5. El primero muestra la evolución del error relativo en el flujo, usando polinomio de enriquecimiento de grado 3, a medida que el número de nodos. Puede verse que el error relativo decrece monótonamente. Pero una mejor indicación de convergencia se obtiene graficando el error versus la distancia nodal, que es inversamente proporcional al número de nodos empleado. Esto se muestra en la Figura 5, que indica que en este ejemplo la convergencia es aproximadamente lineal.

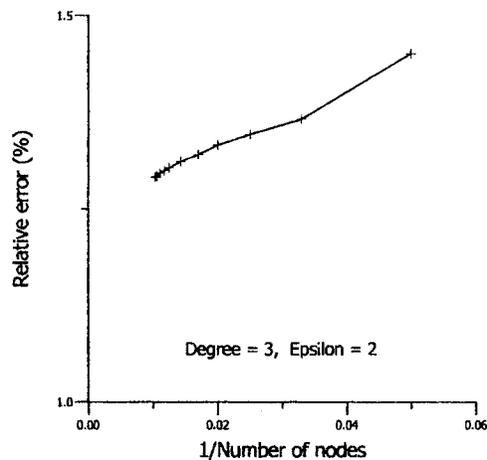


Figure 5: Error relativo vs. inversa del número de nodos.

### CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una nueva formulación del MFS, que consiste en introducir la aproximación en términos de soluciones fundamentales dentro de la formulación de integral funcional del problema. Al hacerlo, las ecuaciones finales contienen un parámetro físico de regularización  $\varepsilon$ . La formulación propuesta permite ubicar las Fuentes en el contorno del dominio a ser modelado, eliminando la búsqueda no-lineal para el posicionamiento óptimo de fuentes del MFS ordinario.

La aproximación fue enriquecida agregando unos pocos polinomios armónicos. Los resultados indican que aumentando el grado del polinomio de enriquecimiento se reduce sustancialmente el error relativo. Asimismo, para cada grado polinómico existe parámetro óptimo  $\varepsilon$  que minimiza el error. También se encontró que el error relativo decrece en forma monótona a medida que el número de nodos crece. En el ejemplo del problema de Dirichlet en el círculo unitario con singularidad externa la tasa de convergencia es aproximadamente lineal.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el proyecto PIC 12-04586 de la Agencia Nacional de Promoción Científica de la República Argentina.

### REFERENCIAS

- [1] **Portela A. and Charafi A.**, *Trefftz boundary element method for domains with slits*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 20, 299-304, (1997)
- [2] **Bogomolny A.**, *Fundamental solutions methods for elliptic boundary value problems*, SIAM J. Numer. Anal., 22/4, 644-669, (1985)
- [3] **Pardo E.**, *Meshless Method for Linear Elastostatics Based on a Path Integral Formulation*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 47, 1463-1480, (2000).
- [4] **Pardo E.**, *Convergence and Accuracy of the Path Integral Approach for Elastostatics*, Comp. Methods Appl. Mech. Engng, submitted.