

Integración simpléctica de la ecuación de movimiento de un ión magnetizado bajo la acción de dos ondas electrostáticas

Sergio A. Elaskar^{†*} y Héctor H. Brito^{*}

[†]Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

^{*}Instituto Universitario Aeronáutico, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio numérico sobre el mecanismo de aceleración de un ión dentro de un campo magnético bajo la acción de ondas electrostáticas que se propagan en dirección perpendicular al campo magnético. En primer lugar se introducen las ecuaciones de movimiento del ión para luego integrarlas en forma numérica utilizando un algoritmo de integración simpléctica para Hamiltonianos separables. El caso en el que solamente una onda electrostática actúa sobre el ión ha sido objeto análisis desde hace más de veinte años. Sin embargo cuando existen dos o más ondas electrostáticas los estudios han comenzado en los últimos cuatro años y detectan una importante energización del ión, este fenómeno muestra una fase coherente y otra caótica. La mayoría de dichas investigaciones tienen por objeto explicar el comportamiento de iones en la ionosfera, sin embargo el presente trabajo tiene como finalidad estudiar la posibilidad de aplicar este mecanismo de aceleración en la propulsión por plasma.

ABSTRACT

In this paper is presented a numerical study about the ion acceleration mechanisms, the ion is magnetized and is excited by two or more electrostatic waves. This electrostatic waves are propagating on normal plane with respect of magnetic field. In the first place are introduced the equations that govern the ion movement, next this equations are solved by means of symplectic algorithms for separable Hamiltonian functions. The problem, when only one electrostatic wave is exciting the ion, has been studied for more of twenty years; however the research considering that the ion is exciting by two or more electrostatic waves has begin recently. In this last situation the obtained results show an important energization of the ion. The energy gain by the ion follows two ways: coherent and chaotic. The previous developments find to understand the ion behavior in the ionosphere, however the present research has another objective: to apply this mechanism inside of plasma propulsion.

1. INTRODUCCION

El principal objetivo del presente trabajo es estudiar el mecanismo de aceleración que sufre un ión cuando se halla dentro de un campo magnético constante y es excitado por dos ondas electrostáticas perpendiculares al campo magnético. El fenómeno en el cual el ión interactúa con una única onda electrostática es descrito en las Refs. [1-3], estas publicaciones indican que el ión solamente gana energía si su movimiento es caótico y si la amplitud de las ondas eléctricas supera un determinado valor mínimo. En este trabajo se presenta un análisis numérico de la interacción no lineal entre el ión y los campos electromagnéticos. Las posibles aplicaciones de este mecanismo de aceleración son analizadas por Bénisti *et al.* [4] y no serán descritas aquí. Si es importante destacar que este trabajo es un primer paso para estudiar la posibilidad de obtener un mecanismo acelerador de iones dentro de propulsores de plasma

pulsantes. Es un hecho conocido que el rendimiento de dichos motores es muy bajo, por tal motivo es interesante explorar fenómenos para introducir mejoras para elevar dicho rendimiento.

En la Sección 2 se introduce la ecuación de movimiento de un ión magnetizado y excitado por un espectro discreto de ondas electrostáticas. La mencionada ecuación se obtiene por dos caminos alternativos, en el primero desde la segunda ley de Newton, y en el segundo se deduce la función Hamiltoniano del sistema. Ambos caminos son planteados considerando condiciones iniciales generalizadas, para luego introducir simplificaciones al suponer que la posición y velocidad inicial son nulas. En la Sección 3 se describe la técnica de integración simpléctica para funciones Hamiltoniano separables introducida por Candy y Rozmus [5]. En la Sección 4 se presentan los resultados obtenidos. Finalmente en la Sección 5 se describen las conclusiones destacables de la presente investigación.

2. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Se presenta en esta sección la ecuación de movimiento del ión bajo la acción del campo magnético y de un espectro discreto de ondas electrostáticas perpendicular al campo magnético. En primer lugar se realiza la deducción desde la segunda Ley de Newton y posteriormente desde el Hamiltoniano.

2.1 Ecuación de movimiento desde la segunda Ley de Newton

Se acepta que el campo magnético actúa en la dirección del eje z:

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z) \quad (1)$$

debido a que el campo eléctrico está en un plano normal al campo magnético, es posible expresar que:

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, 0) \quad (2)$$

La fuerza actuando sobre el ión es

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

siendo e y \mathbf{v} la carga eléctrica y velocidad del ión; \mathbf{E} y \mathbf{B} representan los campos eléctrico y magnético respectivamente. Las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = eE_x + e \frac{\partial y}{\partial t} B_z \quad (4)$$

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -e \frac{\partial x}{\partial t} B_z \quad (5)$$

donde m es la masa del ión. Desde la última ecuación se deduce que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\Omega \frac{\partial x}{\partial t} \quad (6)$$

siendo Ω la frecuencia de ciclotrón [6]. Al realizar la integración de la Ec. (6) se llega a

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left[\frac{\partial y}{\partial t} \right]_0 + \Omega (x_0 - x) \quad (7)$$

Si se introduce la Ec. (7) en la Ec. (4) puede obtenerse

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \Omega^2 x = \frac{e}{m} E_x + \Omega^2 x_0 + \Omega \left[\frac{\partial y}{\partial t} \right]_0 \quad (8)$$

Finalmente si es considerada la siguiente condición inicial:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial t} \right]_{t=0} = 0 \quad x(0) = 0 \quad (9)$$

la Ec. (8) que describe el movimiento del ión se reduce

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \Omega^2 x = \frac{e}{m} E_x \quad (10)$$

2.2 Ecuación de movimiento desde la función Hamiltoniano

Para obtener el Hamiltoniano, es necesario plantear las energías cinética y potencial del ión

$$E_c = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (11)$$

$$E_p = e\phi - e(v \cdot A) \quad (12)$$

Donde ϕ y A son los potenciales electrostático y magnético respectivamente

$$\phi = (-xE_x, 0, 0) \quad A = (0, xB_z, 0) \quad (13)$$

Por lo tanto, la función Lagrangiana puede ser escrita de la siguiente forma

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] + e \left[A_y \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) - \phi \right] \quad (14)$$

De esta última ecuación se encuentran los momentos generalizados

$$P_x = \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) = m \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \quad P_y = \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) = m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + eA_y \quad (15)$$

siendo $v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$ y $v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$ las componentes del vector velocidad del ión. Finalmente la función Hamiltoniano puede ser escrita

$$H = P_x v_x + P_y v_y - L = \frac{1}{2} [(v_x)^2 + (v_y)^2] + \frac{e}{m} \phi \quad (16)$$

Si son utilizadas las condiciones iniciales dadas por la Ec. (9), la Ec. (7) se simplifica adquiriendo la siguiente forma

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\Omega x \quad (17)$$

Incorporando la Ec. (17) en la Ec. (16) se tiene que

$$H = \frac{1}{2} [(v_x)^2 + (\Omega x)^2] + \frac{e}{m} \phi \quad (18)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen desde la expresión previa

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \Omega^2 x - \frac{e}{m} E_x \quad (19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v_x} = \frac{\partial x}{\partial t} = v_x \quad (20)$$

Se destaca que las Ecs. (10) y (19) representan la misma expresión. El campo eléctrico es representado por una serie discreta de ondas y el campo magnético es constante.

$$E_x = \sum_{i=1}^N [E_i \sin(k_i x - \omega_i t)] \quad B_z = cte \quad (21)$$

En la literatura especializada [4 y 7] los autores presentan la función Hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento en función de las variables acción - ángulo. La principal ventaja de la formulación acción - ángulo es que la energía que posee el ión es expresada directamente. Las variables utilizadas en esta formulación son:

$$\rho = \sqrt{x^2 + v_x^2} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{x}{v_x} \right) \quad (22)$$

La deducción de la función Hamiltoniano y de la ecuación de movimiento considerando las variables acción - ángulo está descrita en Ref. [7] y no será repetida aquí. Sin embargo, es necesario mencionar que en el presente trabajo se ha preferido usar la formulación posición - velocidad en función de que este es un primer paso en el estudio de factibilidad del mecanismo de aceleración como probable sistema propulsivo.

2.3 Ecuación de movimiento no-dimensional

Para escribir en forma adimensional la Ec. (10) se introducen los siguientes parámetros

$$\mu_i = \frac{\omega_i}{\Omega} \quad \tau = \Omega t \quad x' = x k_1 \quad \gamma_i = \frac{e}{m} \frac{k_1}{\Omega^2} \varepsilon_i \quad \kappa_i = \frac{k_i}{k_1} \quad (23)$$

siendo μ_i , τ , x' , γ_i y κ_i frecuencia, tiempo, posición, amplitud y longitud de onda escritos en forma adimensional. Utilizando las Ecs. (23), la Ec. (10) puede ser escrita:

$$\frac{d^2 x'}{d\tau^2} + x' = \sum_{i=1}^N [\gamma_i \sin(\kappa_i x' - \mu_i \tau)] \quad (24)$$

Por medio de las Ecs. (23), la función Hamiltoniano se expresa como:

$$H'(x', v', \tau) = \frac{1}{2} [(v')^2 + (x')^2] + \sum_{i=1}^N \left[\frac{e}{m} \frac{\varepsilon_i}{\Omega^2} \frac{k_1^2}{k_i} \cos \left(\frac{k_i}{k_1} x' - \mu_i \tau \right) \right] \quad (25)$$

3. INTEGRACIÓN SIMPLECTICA

Para hallar las soluciones de la Ec. (23) se emplea integración simpléctica en la forma presentada por Candy y Rozmus [5] en virtud que posee un comportamiento muy superior que

los métodos de Runge-Kutta convencionales [7]. Sin embargo es necesario destacar que dicha técnica de integración es aplicable sólo a funciones Hamiltoniano separables como la dada en Ec. (24). El esquema de cálculo empleado en este trabajo para la integración de la ecuación de movimiento es el siguiente:

Hamiltoniano separable:

$$H(v, x, t) = T(v) + V(x, t)$$

Condiciones iniciales:

$$(v_0, x_0) \text{ at } t = 0$$

Proceso de cálculo:

$$\text{Do } j = 1, z$$

$$v_j = v_{j-1} + b_j \left[-\frac{\partial V(x_{j-1}, t_{j-1})}{\partial x} \right] \Delta t$$

$$x_j = x_{j-1} + a_j \frac{\partial T(v_j)}{\partial v} \Delta t$$

$$t_j = t_{j-1} + a_j \Delta t$$

End do

(25)

Resultado:

$$(x_z, v_z) \text{ at } t = t_0 + \Delta t$$

4. RESULTADOS

En primer término se reproducen los resultados descritos en Ref. [7] para el caso de que el ión magnetizado es excitado por solamente una onda con las siguientes características $\gamma = 10$, $\mu = 24$ y $\kappa = 1$. La Fig. 1 describe la evolución de ρ en función τ para tres condiciones iniciales distintas: $\rho_0 = 10$, $\rho_0 = 40$ y $\rho_0 = 125$. De la figura se observa que el comportamiento de ión depende de la condición inicial.

Debido al carácter no lineal del fenómeno es conveniente presentar los resultados en diagramas de Poincaré. Las Figuras 2-a, 2-b, 3-a y 3-b describen los diagramas de Poincaré del mecanismo de aceleración para dos ondas eléctricas. Las tres figuras corresponden a los siguientes datos: $\mu_1 = 24$, $\mu_2 = 25$ y $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. Para obtener las Figs. 2-a y 2-b se ha utilizado $\gamma_1 = \gamma_2 = 5$, en la Fig. 2-a se muestra el diagrama de Poincaré para las variables acción - ángulo, la Fig. 2-b es el diagrama de Poincaré para las variables posición - velocidad. En las Figs. 3-a y 3-b se ha usado $\gamma_1 = \gamma_2 = 30$. La Fig. 3-a se muestra el diagrama de Poincaré para las variables acción - ángulo y la Fig. 3-b describe la variación de la posición con respecto al tiempo. El incremento temporal empleado en los dos gráficos es $\Delta t = 2\pi / 60000$.

Se destaca que el movimiento del ión posee dos estados: coherente y caótico, además se verifica que el tiempo para el cuál el proceso caótico comienza es menor a medida que la amplitud de onda crece.

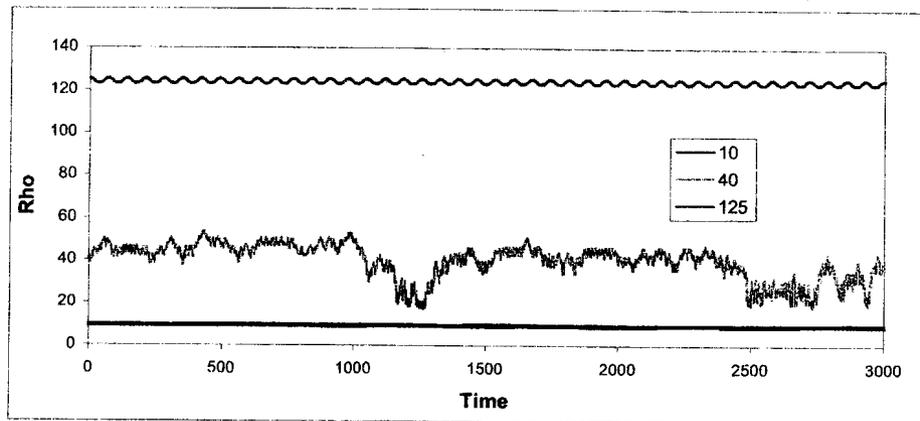


Figura 1. Análisis para el caso de una onda eléctrica, para tres condiciones iniciales.

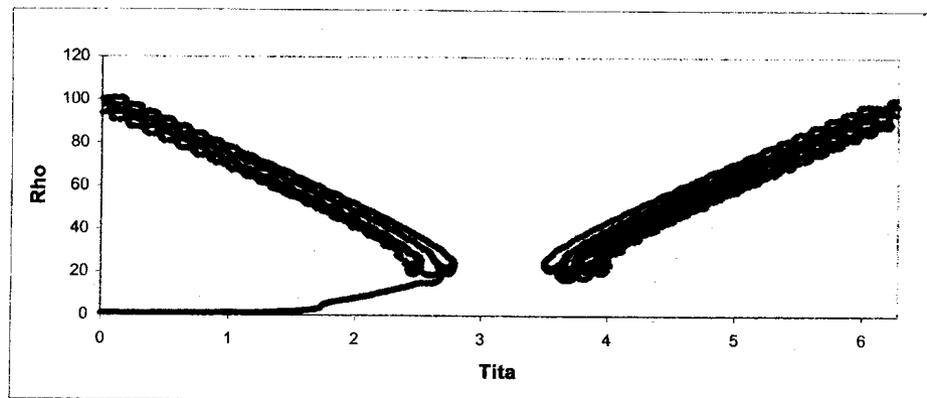


Figura 2-a. Diagrama de Poincaré en variables acción - ángulo: $\gamma_1 = \gamma_2 = 5$.

5. CONCLUSIONES

- Los resultados aquí obtenidos con la formulación posición - velocidad coinciden con los publicados en la Ref. [7] por medio de la formulación acción - ángulo.
- Para los casos estudiados en los cuales el ión es excitado por dos ondas electrostáticas se observa que aparecen tanto movimientos coherentes como caóticos.
- A diferencia de lo que sucede cuando existe solamente una onda electrostática, la energía de ión se incrementa durante la evolución coherente.

- Mientras mayor es la amplitud de las ondas electrostáticas los diagramas de Poincaré muestran que el comportamiento caótico se acentúa, además se verifica que el caos aparece en forma más temprana.

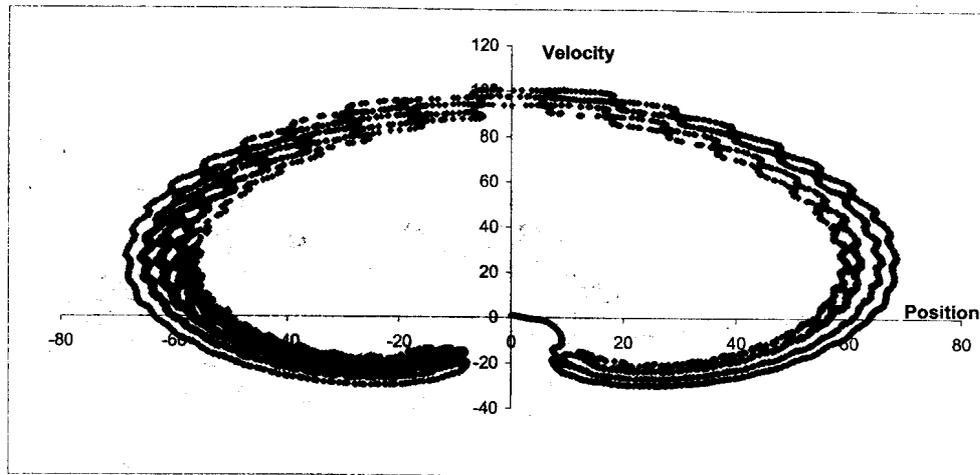


Figura 2-b. Diagrama de Poincaré en variables posición - velocidad: $\gamma_1 = \gamma_2 = 5$.

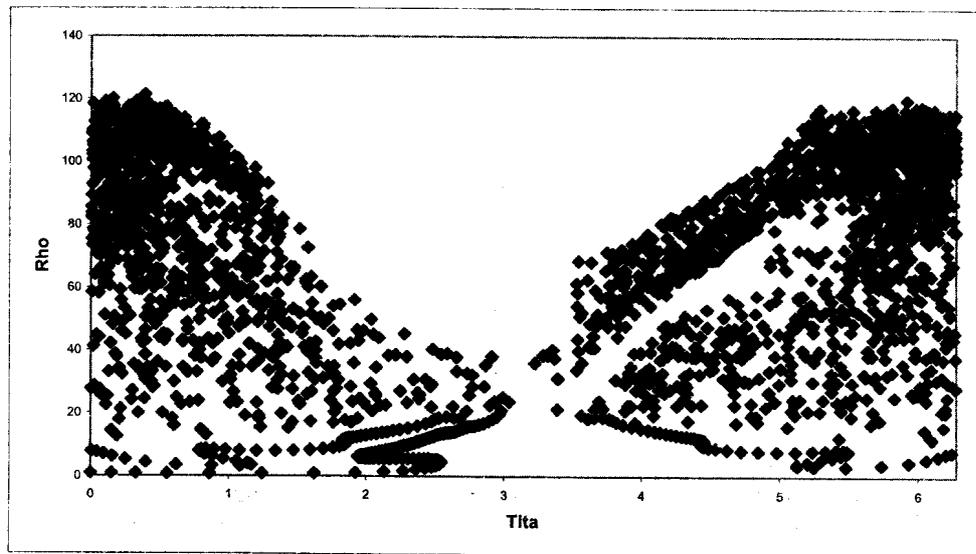


Figura 3-a. Diagrama de Poincaré, en variables acción - ángulo: $\gamma_1 = \gamma_2 = 30$.

- En todos los ejemplos analizados se verifica, tanto en la fase coherente como en la caótica, que el movimiento del ión no es rectilíneo. Por lo tanto, en primera instancia, este mecanismo

no parece ser completamente adecuado para mejorar el rendimiento de los propulsores de plasma pulsante. Sin embargo este es un aspecto a investigar en mayor profundidad.

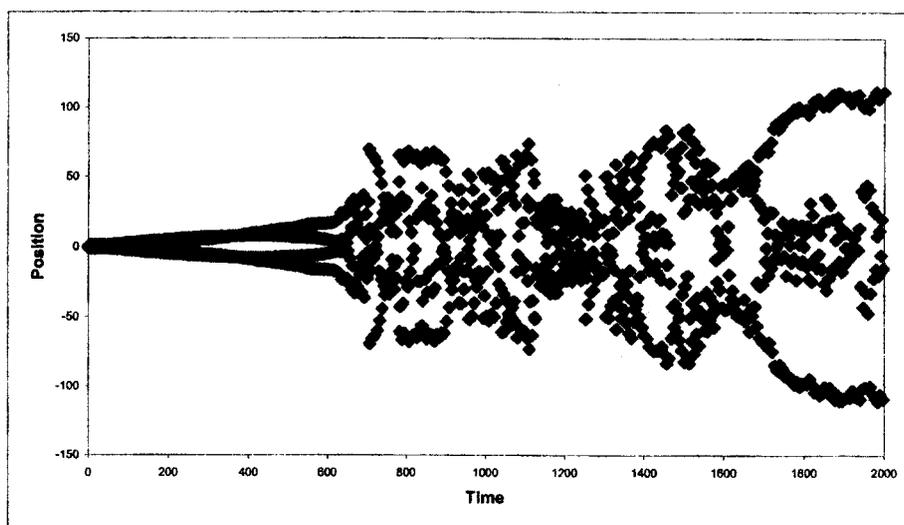


Figura 3-b. Posición del ión en función del tiempo: $\gamma_1 = \gamma_2 = 30$.

REFERENCIAS

- [1] Karney, C. y Bers, A., *Stochastic ion heating by a perpendicular propagating electrostatic wave*, Physical Review Letters, Vol. 39, 1977, págs. 550-553.
- [2] Fukuyama, A.; Ometa, H.; Itatani, R. y Takizuka, T., *Stochastic acceleration by an electrostatic wave near ion cyclotron harmonics*, Physical Review Letters, Vol. 38, 1977, págs. 701-703.
- [3] Karney, C., *Stochastic ion heating by a lower hybrid wave*, Physics of Fluid, Vol. 21, No. 9, 1977, págs. 1584-1599.
- [4] Benisti, D.; Ram, A. y Bers, A., *Ion dynamics in multiple electrostatics waves in magnetized plasma, I. Coherent acceleration*. Physics of Plasma, Vol. 5, No. 9, 1998, págs. 3233-3241.
- [5] Candy, J. y Rozmus, W., *A symplectic integration algorithm for separable Hamiltonian functions*, Journal of Computational Physics, Vol. 92, 1991, págs. 230-256.
- [6] Dendy, R., *Plasma Physics. An Introductory Course*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [7] Choueiri, E. y Spektor, R., *Coherent ion acceleration using two electrostatics waves*, AIAA Paper 2000-3759, 2000.