

ALGORITMOS DE INTEGRACIÓN TEMPORAL EN DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS

Elisabet Lens y Alberto Cardona

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería
CIMEC-INTEC, Conicet-Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
acardona@intec.unl.edu.ar

RESUMEN

El uso de esquemas implícitos, en particular la clásica familia de algoritmos de Newmark y sus variantes, fallan en general al momento de conservar el momento angular total y la energía total de sistemas no lineales, tanto para dinámica de cuerpos rígidos como para elastodinámica no lineal, rods y shells no lineales. La integración de estas ecuaciones presenta un verdadero desafío ya que la mayoría de las técnicas disponibles son inestables numéricamente o presentan oscilaciones de altas frecuencias de origen puramente numérico. En los esquemas estudiados en este trabajo se propone una discretización de las ecuaciones de movimiento tal que ésta implica la conservación de la energía total del sistema en estudio. La conservación de la energía total garantiza la estabilidad de la solución en problemas no lineales.

ABSTRACT

The use of implicit schemes, particularly the classical Newmark family of algorithms and its variants, generally fail to conserve total angular moment and total energy for non linear systems, including rigid body dynamics, nonlinear elastodynamics, nonlinear rods and nonlinear shells. The integration of these equations is hard to achieve since most of the techniques available either show purely numerical high frequencies oscillations or are numerically unstable. In the schemes analyzed in this paper a discretization of the equations of movement implicating the total energy conservation of the systems is proposed. Total energy conservation garantize solution stability in non linear problems.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una detallada comparación de dos esquemas de integración implícitos [4, 5] para un problema clásico de la dinámica rotacional de cuerpos rígidos: un trompo simétrico moviéndose en un campo gravitacional. El objetivo es confrontar los resultados de ambos esquemas con la solución analítica además de comparar los algoritmos entre sí. En un trabajo anterior [1] ya se había abordado el mismo problema del trompo simétrico confrontando una familia de algoritmos propuesta por Simo et al. [3] con el esquema Gèradin-Bauchau analizado aquí nuevamente. Al observar que los algoritmos en estudio no convergían a una misma solución se continuó el análisis que nos llevó al presente trabajo donde ahora se confronta el esquema Gèradin-Bauchau con una variante del esquema de Simo anterior [4] donde en lugar del mapeo exponencial se utiliza la transformación de Cayley como transformación ortogonal en

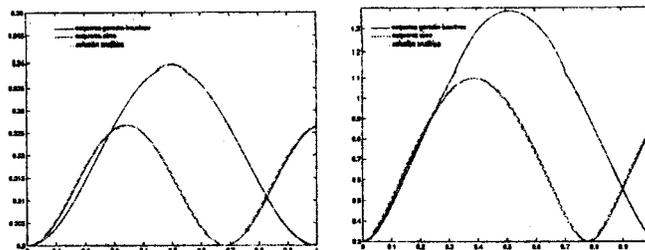


Figura 1: Evolución del ángulo θ para los esquemas del trabajo [1] y la solución analítica para (a) $\Omega_0 = [0 \ 0 \ 50]^T$, $\theta_0 = 0.3[\text{rad}]$ y (b) $\Omega_0 = [0 \ -10 \ 50]^T$, $\theta_0 = 0.3[\text{rad}]$, $\Delta t = 0.001$

la actualización de la matriz de rotación A . Ambos esquemas son diferentes variantes de las siguientes ecuaciones que definen una clase de algoritmos para las ecuaciones de la dinámica de cuerpos rígidos que conservan exactamente la energía [6]

$$\Theta = \Delta t \frac{1}{2} [\Omega_n + \Omega_{n+1}] \quad (1)$$

$$A_{n+1} - A_n = \kappa_1 \frac{1}{2} (A_{n+1} + A_n) \Theta \quad (2)$$

$$A_{n+1} J \Omega_{n+1} - A_n J \Omega_n = \Delta t m_{n+\frac{1}{2}} \quad (3)$$

donde $\kappa_1 = 1$ corresponde a la *transformación Cayley*, y $\kappa_2 = \frac{\tan(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|/2}$ corresponde al *mapeo exponencial*.

Para los esquemas planteados en el primer trabajo, se obtenían resultados que no convergían a la misma solución. La diferencia más evidente era que el esquema G eradin-Bauchau trataba el problema usando restricciones (planteo que puede verse en detalle en [1]). Algunos de estos primeros resultados se muestran en la figura (1). A primera vista las respuestas de esquemas eran buenas, según los análisis cualitativos que encontramos en la bibliografía, por ejemplo [2]. Ambos esquemas conservaban la energía total del sistema. En este trabajo se analizan ambos esquemas para el planteo sin restricciones. Las demostraciones de la conservación de la energía total de los esquemas aquí estudiados, pueden consultarse en los trabajos correspondientes [4, 5].

PROBLEMA DEL TROMPO

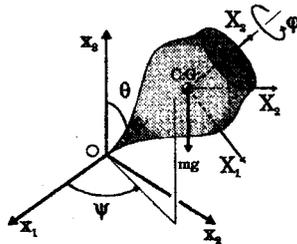


Figura 2: Trompo simétrico fijo en un extremo

Consideremos el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo O en \mathbb{R}^3 con masa total $M > 0$, centro de masas G ubicado a una distancia $l > 0$ de O y tensor constante de inercia J respecto del punto O y relativo a los ejes del cuerpo. La ubicación del cuerpo en \mathbb{R}^3 está definida únicamente por la matriz de rotación A . La velocidad angular del cuerpo $\Omega(t)$ y el momento

angular del cuerpo $\Pi(t)$ están definidos respectivamente por las relaciones

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \Lambda(t)\tilde{\Omega}(t) \quad \text{y} \quad \Pi(t) = J\Omega(t) \quad (4)$$

donde $\tilde{\Omega}$ es la matriz antisimétrica asociada con el vector axial Ω según la relación $\tilde{\Omega}a = \Omega \times a \forall a$.

Sea $r(0) = lE$, con $\|E\| = 1$ vector posición del centro de masas en $t = 0$. El vector posición $r(t)$ del centro de masas G en el tiempo t y el momento angular total espacial $\pi(t)$ relativo al sistema de coordenadas inercial fijo son

$$r(t) = l\Lambda(t)E \quad \text{y} \quad \pi(t) = \Lambda(t)\Pi(t) \quad (5)$$

Con esta notación, la energía cinética del sistema toma la forma

$$K = \frac{1}{2}\Pi \cdot \Omega = \frac{1}{2}\Omega \cdot J\Omega \quad (6)$$

Sea $f(t)$ la fuerza aplicada en el centro de masas y definiendo $g(t) = lf(t)$ tenemos la ecuación de balance de momento angular $\dot{\pi}(t) = r(t) \times f(t)$, que junto con (4) nos permite escribir el siguiente sistema de ecuaciones de la dinámica de un cuerpo rígido con un punto fijo O :

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \Lambda(t)\tilde{\Omega}(t) \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}[\Lambda(t)J\Omega(t)] = \Lambda(t)E \times g(t), \quad (8)$$

donde el sistema es Hamiltoniano si $g(t)$ es conservativo. En nuestro caso, nos restringiremos al caso de un cuerpo rígido en un campo gravitacional con potencial V definido por

$$V(\Lambda) = Mgl\gamma \cdot \Lambda E \iff g = -Mgl\gamma \quad (\text{constante}) \quad (9)$$

γ es un vector unitario fijo en el espacio y $g > 0$ es la constante gravitacional.

ESQUEMAS DE INTEGRACIÓN TEMPORAL

Esquema de Simo [4]

Consideremos un intervalo de tiempo típico $[t_n, t_{n+1}]$, y sean $\Phi_n = (\varphi_n, \Lambda_n)$ y $\Phi_{n+1} = (\varphi_{n+1}, \Lambda_{n+1})$ las configuraciones inicial y final correspondientes a t_n y t_{n+1} respectivamente. Tomando una aproximación en el punto medio de las ecuaciones de evolución $\dot{\varphi} = v$ y $\dot{\Lambda} = \Lambda\tilde{\Omega}$, donde $\Omega = \Lambda^T\omega$ es la velocidad angular, obtenemos

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = u \quad \text{y} \quad \Lambda_{n+1} - \Lambda_n = \frac{1}{2}(\Lambda_n + \Lambda_{n+1})\tilde{\Omega} \quad (10)$$

donde

$$u = \Delta t \frac{1}{2}(v_n + v_{n+1}) \quad \text{y} \quad \theta = \Delta t \frac{1}{2}(\omega_n + \omega_{n+1}) \quad (11)$$

Resolviendo (10) para Λ_{n+1} en términos de Λ_n tenemos la expresión

$$\Lambda_{n+1} = \Lambda_n \text{cay}[\Theta] \quad \text{donde} \quad \text{cay}[\Theta] := \left[I + \frac{1}{2}\tilde{\Theta} \right] \left[I - \frac{1}{2}\tilde{\Theta} \right]^{-1} \quad (12)$$

La matriz $\text{cay}[\Theta]$ es ortogonal y define en consecuencia un mapeo $\text{cay}[\cdot] : \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$ conocido como *transformación Cayley*. La matriz inversa que aparece en (12) puede calcularse en forma explícita para obtener

$$\text{cay}[\Theta] = I + \frac{1}{1 + \frac{\|\Theta\|^2}{4}} \left[\tilde{\Theta} + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^2 \right] \quad (13)$$

forma cerrada más conveniente desde el punto de vista computacional.

El mapeo Cayley tiene las siguientes propiedades

$$\text{cay}[\Theta]\Theta = \Theta \quad \text{y} \quad \text{cay}[\Theta]\text{cay}[-\Theta] = I \quad (14)$$

Además para toda rotación $Q \in SO(3)$ tenemos

$$Q\text{cay}[\Theta]Q^T = \text{cay}[Q\Theta] \quad (15)$$

Con esta última propiedad, la actualización del campo de rotaciones puede escribirse como

$$A_{n+1} = \text{cay}[\vartheta]A_n \quad \text{donde} \quad \vartheta = A_n\Theta \quad (16)$$

La contraparte espacial de la fórmula de actualización de (10) viene dada por

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \mathbf{u} \quad A_{n+1} - A_n = \hat{\vartheta} \frac{1}{2}(A_{n+1} + A_n) \quad (17)$$

con

$$\mathbf{u} = \Delta t \frac{1}{2}(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{n+1}) \quad \text{y} \quad \vartheta = \Delta t \frac{1}{2}(\omega_{n+1} + \text{cay}[\vartheta]\omega_n) \quad (18)$$

donde $\omega_n = A_n\Omega_n$ y $\omega_{n+1} = A_{n+1}\Omega_{n+1}$ son las velocidades angulares espaciales en los tiempos t_n y t_{n+1} respectivamente.

Esquema de Géradin-Bauchau [5]

En este esquema, las velocidades angulares son tratadas como quasi-coordenadas y toman la forma de derivadas temporales de las coordenadas generalizadas

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ L[\mathbf{q}]\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde $\mathbf{q} = q[\phi]\mathbf{n}$ con \mathbf{n} vector unitario y ϕ la magnitud de la rotación alrededor de \mathbf{n} . $L[\mathbf{q}]$ es una matriz ($M \times N$), donde la desigualdad $M \leq N$ cubre el caso en que la descripción de velocidades angulares se logra por medio de parámetros de rotación redundantes como los parámetros de Euler. En este caso la redundancia será eliminada agregando un set apropiado de restricciones globales. Para definir la configuración intermedia entre A_n y A_{n+1} descomponemos el incremento de rotación de A_n a A_{n+1} en la forma de dos rotaciones sucesivas e iguales

$$A_n^T A_{n+1} = G^2 \quad \text{tal que} \quad A_{n+\frac{1}{2}} = A_n G = A_{n+1} G^T \quad (20)$$

El operador G verifica las propiedades de ortonormalidad: $GG^T = G^T G = I$. La matriz de velocidades angulares en el punto medio puede escribirse como

$$\tilde{\Omega}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}G^T A_n^T (A_n G^2 - A_n) = \frac{1}{\Delta t}(G - G^T) \quad (21)$$

entonces la velocidad angular discreta en el punto medio se aproxima por

$$\Omega_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}(G - G^T) = \frac{2}{\Delta t} \text{vect}(G) \quad (22)$$

donde la parte vectorial de G se expresa, en notación indicial, como

$$[\text{vect}(G)]_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}g_{kj} \quad (23)$$

Como G es un operador de rotación, $\text{vect}(G)$ tiene la siguiente propiedad

$$G\text{vect}(G) = G^T \text{vect}(G) = \text{vect}(G) \quad (24)$$

A la matriz G que describe la rotación media, la podemos construir usando parámetros de Euler. Escribiendo la rotación relativa de A_n a A_{n+1} en función de sus invariantes \mathbf{n} (dirección del eje de rotación en A_n) y ϕ (amplitud de esa rotación)

$$A_n^T A_{n+1} = A(\mathbf{n}, \phi) \quad (25)$$

con la expresión general del vector rotación

$$A = A(\mathbf{n}, \phi) = [\cos \phi I + (1 - \cos \phi) \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \sin \phi \tilde{\mathbf{n}}] \quad (26)$$

Suponiendo que la dirección de rotación se mantiene constante, (25) puede separarse en dos rotaciones iguales de la forma

$$G = A(\mathbf{n}, \frac{1}{2}\phi) \quad (27)$$

de la ecuación (26) expresada en $(\mathbf{n}, \frac{1}{2}\phi)$ notamos que

$$\text{vect}(G) = \mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2} = \mathbf{e} \quad (28)$$

donde \mathbf{e} es la parte vectorial de los parámetros de Euler. Sustituyendo con esta última ecuación en la expresión explícita de $A(\mathbf{n}, \frac{1}{2}\phi)$ tenemos

$$G = A(\mathbf{n}, \frac{1}{2}\phi) = e_0 I + \frac{1}{1 + e_0} \mathbf{e} \mathbf{e}^T + \tilde{\mathbf{e}} \quad (29)$$

con

$$e_0 = \cos \frac{\phi}{2} \quad \text{tal que} \quad e_0^2 = 1 - \|\mathbf{e}\|^2 \quad (30)$$

De la expresión de G se puede reconstruir fácilmente A en términos de los parámetros de Euler

$$A\mathbf{e} = G^2 = (e_0^2 - \mathbf{e}^T \mathbf{e}) I + 2(\mathbf{e} \mathbf{e}^T + e_0 \tilde{\mathbf{e}}) \quad (31)$$

y se verifica la siguiente propiedad

$$G\mathbf{e} = G^T \mathbf{e} = \mathbf{e} \quad (32)$$

que expresa que la dirección de rotación no es afectada por la rotación media G . Las velocidades angulares en consecuencia se calculan como

$$\Omega_{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\Delta t} \text{vect}(G) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{e} = \frac{2}{\Delta t} G\mathbf{e} = \frac{2}{\Delta t} G^T \mathbf{e} \quad (33)$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA

Desarrollando la expresión de la energía cinética en función de ángulos de Euler, la ecuación (6) toma la forma

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{N} \mathbf{J} \mathbf{N} = \frac{1}{2} A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \phi) + \frac{1}{2} C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \phi)^2 \quad (34)$$

y con la expresión de la energía potencial

$$V = Mgl \cos \theta, \quad (35)$$

el lagrangiano resulta

$$L = \frac{1}{2} A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \phi) + \frac{1}{2} C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \phi)^2 - Mgl \cos \theta \quad (36)$$

Luego, las tres integrales del movimiento son

$$H = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta \quad (\text{constante}) \quad (37)$$

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (\text{constante}) \quad (38)$$

$$E = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}Cr^2 + Mgl \cos \theta \quad (\text{constante}) \quad (39)$$

Despejando

$$\dot{\psi} = \frac{H - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \quad (40)$$

y eliminando $\dot{\psi}$ en (39) obtenemos una expresión sólo función de θ

$$E' = E - \frac{1}{2}Cr^2 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{(H - Cr \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta \quad (41)$$

donde finalmente realizando el cambio de variable $u = \cos \theta$ reescribimos (41) como

$$E' = \frac{1}{2}A \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + \frac{(H - Cru)^2}{2A(1 - u^2)} + Mglu \quad (42)$$

despejando \dot{u}^2

$$\dot{u}^2 = f(u) = (1 - u^2) \left(\frac{2E'}{A} - \frac{2Mgdu}{A} \right) - \frac{H - Cru^2}{A^2} \quad (43)$$

ecuación que se obtiene directamente mediante la integral

$$t(u) = \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(2E'/A - 2Mgdu/A) - (H - Cru)^2/A^2}} \quad (44)$$

que no es inmediata [2]. Puede abordarse mediante integrales elípticas o por métodos numéricos, que es lo que se adoptó en este trabajo.

RESULTADOS

En la fig 3 se grafican las energías cinética y total, así como también la velocidad angular material, el momento angular espacial y la posición del centro de masas para ambos esquemas. También se muestran la evolución temporal del ángulo de Euler θ para las siguientes constantes numéricas y valores iniciales: (a) $\Omega_0 = [0 \ 0 \ 50]^T$, $\theta_0 = 0.3[\text{rad}]$ y (b) $\Omega_0 = [0 \ -10 \ 50]^T$, $\theta_0 = 0.3[\text{rad}]$, $l = 1[\text{m}]$, $g = 9.81[\text{m/s}^2]$ y $mgl = 20$. En la fig 5 se muestra la convergencia de la norma del residuo de ambos esquemas para $t = 1[\text{sec}]$ y un error de tolerancia de $1e^{-10}$. El movimiento se integró durante $60[\text{sec}]$ pudiendo verse en la fig. 6 las trayectorias del centro de masas del trompo para ambos esquemas.

CONCLUSIONES

En este trabajo se analizan dos esquemas de integración implícitos que conservan la energía total del sistema, estudiando la respuesta de la dinámica de un trompo simétrico en un campo gravitacional y confrontando estos resultados con la solución analítica del problema. Ambos esquemas conservan perfectamente la energía total del sistema, así como también la componente 3 de la velocidad material y el momento angular espacial (3). Los dos esquemas son robustos, pudiendo observarse en la figura (6) la estabilidad de éstos en la gráfica de las trayectorias del centro de masas para un intervalo de tiempo $T = 60[\text{s}]$. Las predicciones de ambos coinciden perfectamente entre sí y de manera notable con la solución analítica, pudiendo concluir en principio que las diferencias encontradas en el primer trabajo vienen dadas por el tratamiento de las restricciones. Actualmente nos encontramos estudiando el tratamiento de restricciones de ambos esquemas y tratando de encontrar las causas de la diferencia de respuestas del trabajo anterior [1].

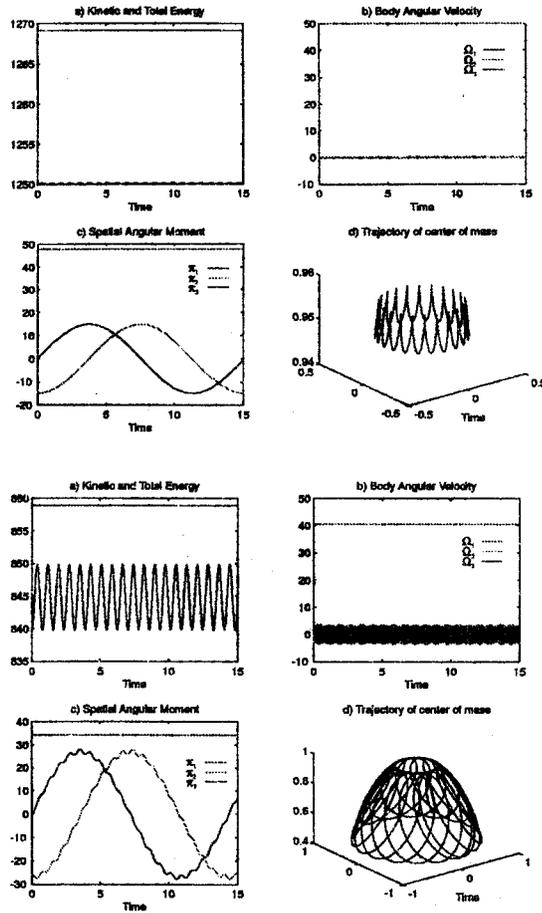


Figura 3: Respuestas de los esquemas para $T = 15[s]$, $\theta_0 = 0.3[rad]$ y (a) $\Omega_0 = [0 \ 0 \ 50]^T$, y (b) $\Omega_0 = [0 \ -10 \ 50]^T$, $\Delta t = 0.001$

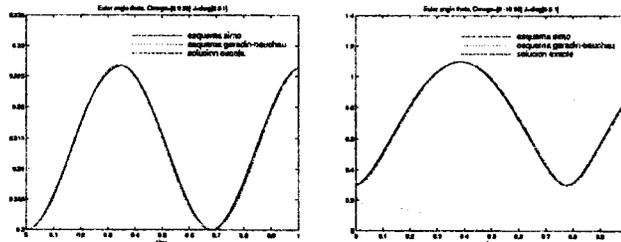


Figura 4: Evolución del ángulo θ de ambos esquemas y solución analítica para (a) $\Omega_0 = [0 \ 0 \ 50]^T$, $\theta_0 = 0.3[rad]$ y (b) $\Omega_0 = [0 \ -10 \ 50]^T$, $\theta_0 = 0.3[rad]$, $\Delta t = 0.001$

REFERENCIAS

[1] E. Lens y A. Cardona. Algoritmos de integración numérica en dinámica rotacional no lineal. *Mecánica Computacional*, vol XIX:385–390, San Carlos de Bariloche, Argentina,

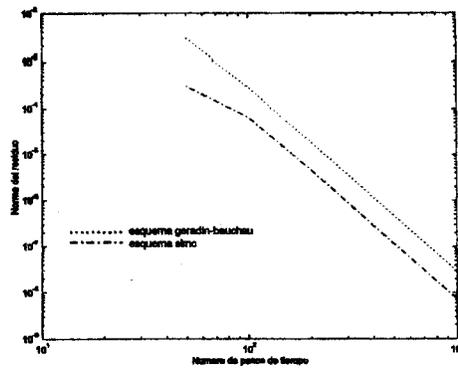


Figura 5: Estudio de la convergencia de ambos esquemas

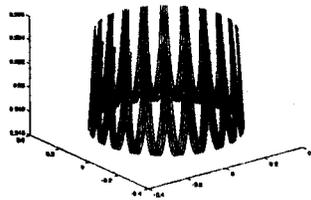


Figura 6: Trayectorias del centro de masas para ambos esquemas $T=60[s]$

2000.

- [2] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980.
- [3] J.C. Simo, N. Tarnow and K.K. Wong. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 100:63–116, 1992.
- [4] J.C. Simo, N. Tarnow and M. Doblare. Non linear dynamics of three dimensional rods: Exact energy and momentum conserving algorithms. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 38:1431–1473, 1995.
- [5] M. Géradin, A. Cardona. *Flexible multibody dynamics: a finite element approach. First Edition*. John Wiley & Sons Ltd, 2000.
- [6] N. Tarnow, J.C. Simo. How to render second order accurate time-stepping algorithms fourth order accurate while retaining the stability and conservation properties. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 115:233–252, 1994.