

CONDICION DE FRONTERA ABSORBENTE DISCRETA NO-LOCAL (DNL) EN EL CALCULO DEL ARRASTRE DE ONDA SOBRE BARCOS

Jorge D'Elía, Mario Storti y Sergio Idelsohn

Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC

Güemes 3450, 3000 - Santa Fe, Argentina

Phone: 54-42-55.91.75, Fax: 54-42-55.09.44

e-mail: jdelia@venus.unl.edu.ar

home-page: <http://venus.unl.edu.ar/gtm-eng.html>

Resumen

Una implementación de la condición de borde absorbente discreta no local (DNL) [1], para el problema de la resistencia de onda en barcos es presentada. En contraste a las formulaciones tipo-Dawson [2], evita el uso de viscosidades numéricas en la discretización, por lo que un esquema centrado puede emplearse para el operador de superficie libre. La condición de borde absorbente es "completamente absorbente" en el sentido de que la solución es independiente de la posición de la frontera aguas abajo, y es obtenida por un análisis directo de las ecuaciones en diferencias finitas resultantes, asumiendo que la malla es estructurada 1D (en la dirección longitudinal), y exige la descomposición en autovalores de una matriz de una dimensión menor que la de la matriz del sistema.

Abstract

An implementation of the absorbing boundary conditions (DNL) [1], for the ship wave resistance problem is presented. In contrast to the Dawson-like methods [2], it avoids the use of numerical viscosities in the discretization, so that a centered scheme can be used for the free surface operator. The absorbing boundary condition is "completely absorbing", in the sense that the solution is independent of the position of the downstream boundary and is derived from straightforward analysis of the resulting constant-coefficients difference equations, assuming that the mesh is 1D-structured (in the longitudinal direction), and requires the eigen-decomposition of a matrix one dimension lower than the system matrix.

1 INTRODUCCION

El fundamento general de la condición de frontera absorbente discreta no local (DNL) es presentado en [1]. Su adaptación para modelos elípticos de propagación de ondas en el mar, es dada en [3], mientras que en este trabajo lo especializaremos para el problema de la resistencia de onda en barcos, tratado mediante flujo potencial con una superficie libre. Pero antes veamos su implementación para la ecuación de Laplace $-\Delta\phi = 0$ en $-H \leq y \leq 0$, con condiciones de borde mixtas, $\partial\phi/\partial n = w$ en $y = 0$, y $\phi = 0$ en $y = -H$. Supongamos una malla homogénea con nodos (x_j, y_l) de la forma $x_j = jh$, para $-\infty \leq j \leq \infty$, $y_l = -lh$ para $0 \leq l \leq lmax$. La ecuación en el nodo interior (j, l) con $1 \leq l \leq (M - 1)$ es,

$$\frac{\phi_{j,l+1} - 2\phi_{j,l} + \phi_{j,l-1}}{h^2} + \frac{\phi_{j-1,l} - 2\phi_{j,l} + \phi_{j+1,l}}{h^2} = 0 \quad (1)$$

Para la condición de contorno en la superficie, usamos una discretización de primer orden para $\partial\phi/\partial n$ y nos queda, $\phi_{j0} - \phi_{j1} = w_j h$. Puede verse que agregando un término de corrección puede encontrarse una aproximación de segundo orden para la condición de contorno. La ecuación corregida es,

$$-\frac{\phi_{j0} - \phi_{j1}}{h} + \frac{1}{2}h \frac{\phi_{j+1,0} - 2\phi_{j0} + \phi_{j-1,0}}{h^2} = w_j \quad (2)$$

Ahora llamemos ϕ^j a un vector que contiene todos los potenciales de los nodos en la columna j , esto es, $\phi^j = [\phi_{j0} \ \phi_{j1} \ \dots \ \phi_{j,M-1}]^T$. Entonces el sistema (1), (2), lo podemos reescribir como,

$$\mathbf{A}\phi^{j+1} - 2\mathbf{B}\phi^j + \mathbf{A}\phi^{j-1} = \mathbf{F}^j \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2}, 1, \dots, 1 \right\}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & & \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots \\ & & \vdots & & & \\ & & & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde $\mathbf{F}^j = [hw^j \ 0 \ \dots \ 0]^T$. Multiplicando por \mathbf{A}^{-1} ,

$$\phi^{j+1} - 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\phi^j + \phi^{j-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}^j \quad (5)$$

Esto nos sugiere buscar una descomposición de la forma,

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \text{diag} \{b_i\} \quad (6)$$

Esto es siempre posible ya que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ es equivalente a una matriz simétrica y definida positiva. Efectivamente sea, $\mathbf{A}^{1/2} = \text{diag} \{1/\sqrt{2}, 1, \dots, 1\}$,

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1/2}(\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{1/2})\mathbf{A}^{1/2} \quad (7)$$

Pero $\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{1/2}$ es simétrica y definida positiva y $\mathbf{A}^{1/2}$ es la matriz de equivalencia. Puede demostrarse también que los $\{b_i\}$ son todos $b_i > 1$ y asumimos que están ordenados, $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Si hacemos el cambio de variable, $\mathbf{U}^j = \mathbf{S}^{-1}\phi^j$, entonces la ecuación para \mathbf{U}^j se obtiene multiplicando (5) por \mathbf{S}^{-1} ,

$$\mathbf{S}^{-1}\phi^{j+1} - 2(\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{S})(\mathbf{S}^{-1}\phi^j) + \mathbf{S}^{-1}\phi^{j-1} = \mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}^j = \tilde{\mathbf{F}}^j \quad (8)$$

$$\mathbf{U}^{j+1} - 2\mathbf{D}\mathbf{U}^j + \mathbf{U}^{j-1} = \tilde{\mathbf{F}}^j \quad (9)$$

pero como \mathbf{D} es diagonal obtenemos para cada modo l un esquema en diferencias,

$$u_l^{j+1} - 2b_l u_l^j + u_l^{j-1} = \tilde{f}_l^j \quad (10)$$

Sea M tal que $w = 0$ para $|j| \geq M$, entonces $\tilde{f}_l^j = 0$ para todo l y para $|j| \geq M$. Para encontrar la solución de la ecuación homogénea proponemos u_l^j de la forma, $u_l^j = (\lambda_l)^j$. Puede verse que los b_l son todos positivos y $b_l > 1$ de manera que vale el razonamiento de antes y para cada l hay $\lambda_{l\pm}$ reales y positivos tales que,

$$\lambda_{l+}\lambda_{l-} = 1, \quad \lambda_{l+} > 1, \ \lambda_{l-} < 1 \quad (11)$$

la condición absorbente en $j = M$ es,

$$u_l^{M+1} = (\lambda_{l+})^{-1}, u_l^M, \quad \mathbf{U}^{M+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}^M \quad (12)$$

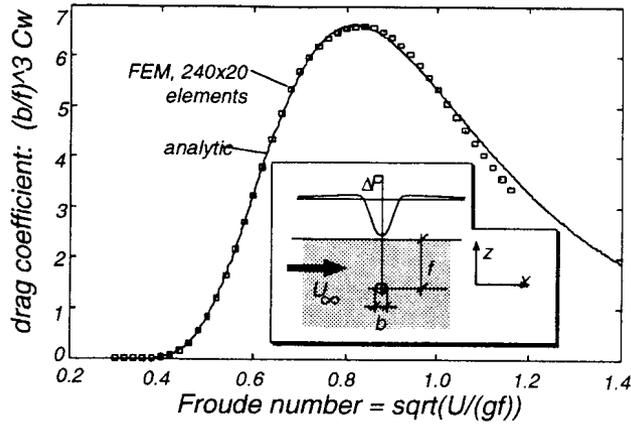


Figura 1: Coeficiente de arrastre de onda para el dipolo sumergido.

y volviendo a la base original (variable ϕ),

$$\phi^{M+1} = (\mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}^{-1}) \quad , \quad \phi^M = \mathbf{C}\phi^M \quad (13)$$

donde \mathbf{C} es la matriz de la condición absorbente, que en general será \mathbf{C} llena. La misma condición resulta ser absorbente para $j \rightarrow -\infty$, es decir, $\phi^{-(M-1)} = \mathbf{C}\phi^{-M}$. El análisis anterior es válido en el caso en que la malla sea *no estructurada* según y (En el caso 1D sería cuando $\Delta y \neq \text{cte}$) ya que las ecuaciones pueden seguir poniéndose como en (3) pero ahora con \mathbf{A} y \mathbf{B} no exactamente como en (4). Pero de todas formas sigue valiendo que los autovalores $\{b_i\}$ de \mathbf{B} satisfacen (11) y todo el análisis permanece válido. Notemos que a diferencia con el caso estructurado, o también si usamos FEM en vez de FDM, entonces \mathbf{A} puede no ser diagonal. De todas formas el uso de $\mathbf{A}^{1/2}$ es sólo a fines de demostrar el carácter simétrico y definido positivo de \mathbf{B} . En la implementación numérica lo único necesario es encontrar los autovalores y autovectores del problema $\mathbf{B}\mathbf{v} = b\mathbf{A}\mathbf{v}$.

2 SEMI-DISCRETIZACION EN X

Notemos que en el caso 3D, la malla puede ser completamente no estructurada en el plano yz . Veremos ahora como surge la expresión de tipo (3) en un contexto más general. Para esto hagamos, $\Delta\phi = \phi_{,xx} + \Delta_{yz}\phi$, y consideremos que primero discretizamos en las coordenadas yz , con lo cual se obtiene un sistema de ODE's en x posteriormente discretizado. Consideraremos por separado el caso de diferencias finitas y de elementos finitos.

2.1 Diferencias Finitas

Consideremos que semi-discretizamos según yz el laplaciano por diferencias finitas y sea ϕ el vector de valores nodales, $\mathbf{K}\phi = -\mathbf{G}(x)$, donde $\mathbf{G}(x)$ es el término fuente relacionado con la condición de contorno en la superficie libre y $-\mathbf{K}$ la matriz del laplaciano 2d, de manera que \mathbf{K} es definida positiva. Entonces $\phi_{,xx} - \mathbf{K}\phi = -\mathbf{G}(x)$, y luego discretizando por diferencias finitas la derivada segunda según x ,

$$\frac{\phi^{j+1} - 2\phi^j + \phi^{j-1}}{\Delta x^2} - \mathbf{K}\phi = -\mathbf{G}^j \quad (14)$$

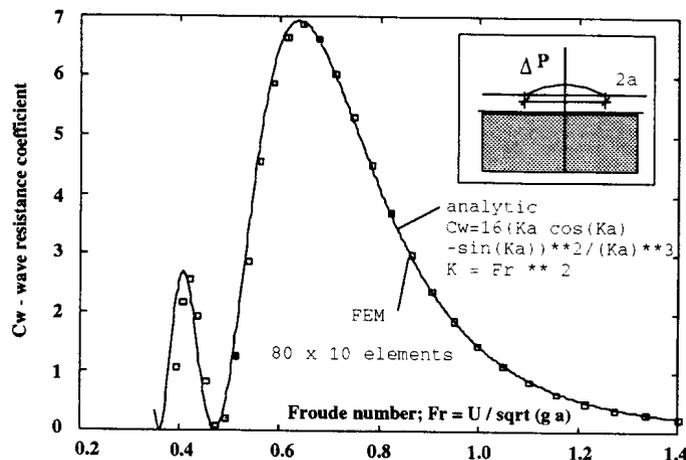


Figura 2: Coeficiente de arrastre de onda para un bump de presión.

lo cual puede ser puesto en la forma (3) con, $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \frac{1}{2}\Delta x^2 \mathbf{K})$. Por lo tanto los autovalores de \mathbf{B} son reales positivos y mayores que la unidad.

2.2 Elementos finitos

La discretización en yz da $\mathbf{M}\phi_{,xx} - \mathbf{K}\phi = \mathbf{G}(x)$, donde ahora aparece la matriz de masa \mathbf{M} . Discretizando en x ,

$$-\mathbf{K} \frac{\phi^{j+1} + 4\phi^j + \phi^{j-1}}{6} = \mathbf{G}^j \quad (15)$$

de manera que $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \Delta x^2 \mathbf{K}/6$, $\mathbf{B} = \mathbf{M} + \Delta x^2 \mathbf{K}/3$, y los autovalores b_i surgen del siguiente problema,

$$(\mathbf{M} + \frac{1}{3}\Delta x^2 \mathbf{K}) \mathbf{w} = b (\mathbf{M} - \frac{1}{6}\Delta x^2 \mathbf{K}) \mathbf{w} \quad (16)$$

Ahora sean \mathbf{w} y $\mu > 0$ solución del clásico problema de autovalores generalizado $\mathbf{K}\mathbf{w} = \mu\mathbf{M}\mathbf{w}$, entonces \mathbf{w} es también autovector del problema (16) y el autovalor correspondiente es, $b = (1 + \frac{1}{3}\Delta x^2 \mu) / (1 - \frac{1}{6}\Delta x^2 \mu) > 1$.

3 EL CASO MIXTO

Hasta ahora hemos encontrado una forma sistemática de desarrollar condiciones de contorno absorbentes basada en encontrar una expresión general para la solución de la ecuación homogénea para $x > L$ ($x < L$) e imponiendo a cero aquellos modos que divergen hacia $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$). Ahora veremos que, incluso en una aproximación muy cruda, el problema de flujo potencial con superficie libre se caracteriza por tener soluciones propias en la forma de cosenos y senos, además de las exponenciales habituales. Como estas soluciones no se anulan ni divergen en ninguna de las direcciones, ya no podemos aplicar el criterio habitual para obtener la condición de contorno. Por lo tanto debemos primero estudiar como se deben tratar estos modos *hiperbólicos*. Las ecuaciones de gobierno son, $\Delta\phi = 0$ para $y < 0$, $\partial\phi/\partial n + K^{-1}\phi_{,xx} = (U/g)(\Delta p)_x$ en

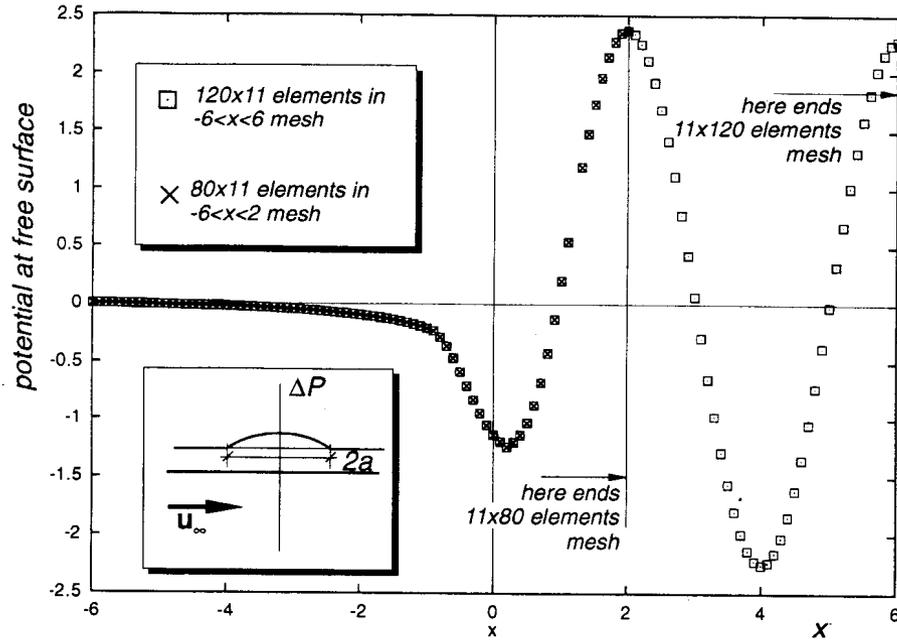


Figura 3: Verificación de la condición de contorno absorbente. El resultado es independiente de donde se impone la condición.

$y = 0$. Consideremos ahora una *semidiscretización* según y con $\Delta y = \text{cte}$. Sea $y_j = -j\Delta y$, $j = 0, 1, \dots, Q$ y, $\phi_j(x) \approx \phi(x, y_j)$. La aproximación en $y < 0$ es,

$$\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta y^2} + \phi_{j,xx} = 0 \quad (17)$$

Para $y = 0$ podemos aproximar $\partial\phi/\partial n$ mediante una aproximación de primer orden en Δy decentrada, $\partial\phi/\partial n \approx (\phi_0 - \phi_1)/\Delta y$. Pero en realidad es simple desarrollar una aproximación de 2do orden en Δy , si consideramos una aproximación centrada para $\partial\phi/\partial n$ con un nodo ficticio $y_{-1} = \Delta y$ e imponiendo la ecuación *interior* también para $j = 0$. Definamos un *nodo ficticio* ubicado por encima de la superficie libre en $y_{-1} = \Delta y$. Entonces podemos aproximar la condición de superficie libre usando una aproximación de 2do orden para la derivada centrada,

$$\frac{\phi_{-1} - \phi_1}{2\Delta y} + \bar{K}^{-1}\phi_{0,xx} = w \quad (18)$$

Pero hemos agregado una incógnita de manera que debemos agregar una ecuación para lo cual agregamos la ecuación para los nodos anteriores para $j = 0$,

$$\frac{\phi_{-1} - 2\phi_0 + \phi_1}{\Delta y^2} + \phi_{0,xx} = 0 \quad (19)$$

Después de eliminar la incógnita correspondiente al nodo ficticio queda una ecuación similar,

$$\frac{\phi_0 - \phi_1}{\Delta y} + \bar{K}^{-1}\phi_{0,xx} = w \quad (20)$$

donde $\tilde{K} = 1/(1/K - \Delta y/2)$ es un valor *corregido* para K . Esta simple modificación es suficiente para recuperar el orden $O(\Delta y^2)$ de la aproximación. De todas formas queremos recalcar que esto no es importante en cuanto a la discusión sobre las condiciones absorbentes. En una aproximación muy cruda, supongamos que consideramos sólo dos puntos en la discretización vertical, un nodo en la superficie libre, con potencial ϕ_0 y otro sumergido en $y_1 = -\Delta y$ con potencial ϕ_1 . El sistema (17), (20) puede ponerse como, $\phi_{,xx} + \mathbf{A}\phi = \mathbf{F}$, con,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{K}/\Delta y & -\tilde{K}/\Delta y \\ -2/\Delta y^2 & 1/\Delta y^2 \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \tilde{K}w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Proponiendo soluciones de la forma $\phi = \phi_0 e^{\lambda x}$ llegamos a una ecuación característica de la forma,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = \lambda^2 - (\tilde{K}/\Delta y + 1/\Delta y^2) \lambda - \tilde{K}/\Delta y^3 = 0 \quad (22)$$

Pero el discriminante de su solución,

$$\Delta = \tilde{K}/\Delta y + 1/\Delta y^2)^2 + 4\tilde{K}/\Delta y^3 > 0 \quad (23)$$

es positivo de manera que las dos soluciones son reales. Pero como el término independiente es negativo, entonces debe haber una raíz positiva $\lambda_1 > 0$ y otra negativa $\lambda_2 < 0$. Esto ocurre siempre en 2D incluso cuando se consideren más grados de libertad en profundidad, *todos los modos son elípticos menos uno que es hipérbolico. En 3D hay un modo hipérbolico por cada nodo de superficie.* Ahora sea, $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$ donde $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, con la descomposición en autovectores de \mathbf{A} , mediante el el cambio de variables $\mathbf{U} = \mathbf{S}^{-1}\phi$, el sistema queda, $\mathbf{U}_{,xx} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{F}}$, donde $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}$. Como $\mathbf{\Lambda}$ es diagonal, el sistema se desacopla en dos ecuaciones escalares,

$$u_{1,xx} + \lambda_1 u_1 = \tilde{f}_1, \quad u_{2,xx} + \lambda_2 u_2 = \tilde{f}_2 \quad (24)$$

Ahora bien, como $\lambda_2 < 0$ las soluciones de (24) para $|x| > L$, donde $w \equiv 0$, son de la forma,

$$u_2 = ae^{k_2 x} + be^{-k_2 x} \quad (25)$$

donde $k_2 = \sqrt{-\lambda_2}$. Usando los mismos argumentos anteriores, encontramos que la condición absorbente es, $u_{2,x} \pm k_2 u_2 = 0$ en $x = \pm L$, pero para u_1 la solución general en $|x| > L$ es,

$$u_1 = c_{\pm} \cos k_1 x + d_{\pm} \sin k_1 x, \quad \text{para } \pm x > L \quad (26)$$

con $k_1 = \sqrt{\lambda_1}$, y debemos aplicar lo discutido para modos hipérbolicos, y las condiciones de contorno apropiadas son $u_1 = u_{1,x} = 0$ en $x = -L$. Finalmente, al poner las condiciones de contorno absorbentes en términos de las variables originales ϕ_0, ϕ_1 , resultan, $(\mathbf{w}_1^T \phi) = (\mathbf{w}_1^T \phi_{,x}) = 0$ en $x = -L$, $(\mathbf{w}_2^T \phi_{,x}) \pm k_2 (\mathbf{w}_2^T \phi) = 0$ en $x = \pm L$. Notemos la asimetría porque *ahora hay 3 condiciones de contorno corriente arriba y una sola corriente abajo.*

4 EJEMPLOS NUMERICOS

4.1 Dipolo sumergido

En la figura 1 vemos el resultado de aplicar el método propuesto para obtener el arrastre de onda sobre un dipolo sumergido a una profundidad f unitaria. El dipolo lo podemos interpretar como el campo producido por un cilindro de radio infinitesimal $b \ll f$ y la carga de presión que genera es $\Delta p(x) = \rho U u = -2\rho U^2 b^2 \Re(x + if)^{-2}$. La simulación la hicimos con una malla de $2 \times 240 \times 20$ elementos triangulares, 240 en la dirección x y 20 en la dirección y , con longitud variable en profundidad. A fin de obtener una mejor aproximación, los elementos en profundidad tienen un Δy 10 veces mayor que en la superficie $\Delta y_{\text{bottom}}/\Delta y_{\text{surface}} = 10$. Se usó la condición absorbente

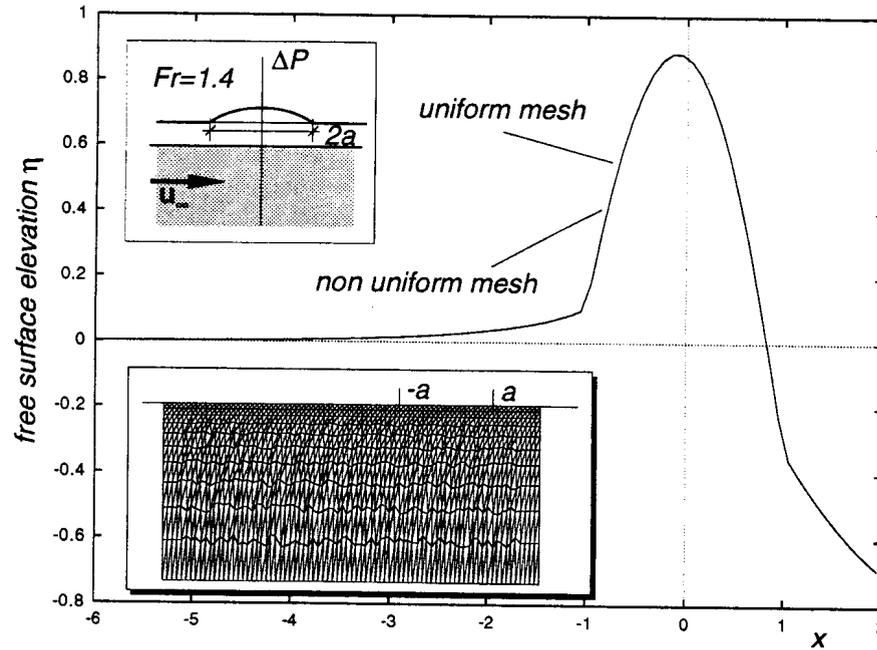


Figura 4: Uso de la condición absorbente con mallas que no son estructuradas en la dirección x .

en aguas abajo, mientras que aguas arriba se usó una absorbente aproximada además de las correspondientes a los modos hiperbólicos. La ventaja es que ahora tendremos $\phi^{-(M+1)} = 0$. La malla cubre el rectángulo $|x| < 6$, $-3 < y < 0$, y se calculó el arrastre de onda para $0.3 \leq Fr \leq 1.15$, mostrada en la figura 1, comparada con la expresión exacta para el arrastre de onda sobre un dipolo que es, $C_w = 4\pi^2 Fr^{-6} e^{-2/Fr^2}$, donde $Fr = U/\sqrt{g\bar{f}}$. El caso del dipolo es interesante porque *la carga de presión equivalente no se anula para $|x| \rightarrow \infty$ y esto es lo que ocurre con los casos reales*. Vemos que de todas formas la condición absorbente es aplicable.

4.2 Bump de presión con malla uniforme

Otra ejemplo es el de un “bump” de presión, es decir, una distribución parabólica de presión de forma,

$$\Delta p = \begin{cases} 1 - (x/a)^2 & \text{para } |x| < a \\ 0 & \text{para } |x| > a \end{cases}$$

El coeficiente de arrastre de onda es, $C_w = 16(Ka \cos Ka - \sin Ka)^2 / (Ka)^3$, donde el número de Froude basado en el semiancho del bump de presión es $Fr = U/\sqrt{g\bar{a}}$. En la figura 2 puede observarse el resultado por FEM para $a = 1$ con la técnica propuesta de condición de contorno, sobre una malla de $2 \times 80 \times 10$ elementos triangulares, $\Delta x = \text{cte}$. $\Delta y_{\text{bottom}}/\Delta y_{\text{surface}} = 10$, que cubre la región $-6 < x < 2$, $-3 < y < 0$. Notemos que la distribución de presión utilizada es de *soporte compacto*, por lo que podemos acercar la frontera aguas abajo tan cerca como queramos, en tanto no entremos en la región $|x| < 1$ donde el término fuente ($\sim (\Delta p)_x$) es no nulo.

4.2.1 Abscisa indiferente para la condición absorbente

El caso del bump de presión es interesante porque al ser $\Delta p = 0$ para $|x| > a$, podemos comprobar que el resultado es independiente de donde apliquemos la condición, siempre que lo hagamos para $x > a$. Como en los casos anteriores, en aguas arriba usamos la condición de contorno absorbente aproximada, de manera que allí no podemos acercarnos a la frontera arbitrariamente. Para verificar esto, calculamos el bump de presión para $Fr = 0.8$ con dos mallas. La primera tiene $2 \times 80 \times 10$ elementos triangulares, 80 capas equiespaciadas $\Delta x = 0.1 = \text{cte}$ según x y 10 capas refinadas hacia la superficie $\Delta y_{\text{bottom}}/\Delta y_{\text{surface}} = 10$, cubriendo $-6 < x < 2$, $-3 < y < 0$. La segunda consiste en agregar 40 capas más de nodos según x a la primera malla hasta $x = 6$. En ambos casos se impuso las mismas condiciones de contorno anteriores, es decir la absorbente en aguas abajo, mientras que aguas arriba se usó la absorbente aproximada en vez de la absorbente exacta, además de las correspondientes a los modos hiperbólicos. En la figura 3 vemos que los potenciales en la superficie libre versus x , coinciden a precisión de la máquina, así como también coinciden los coeficientes de arrastre de onda calculados con ambas mallas.

4.2.2 Mallas no uniformes

El objetivo de este ejemplo es mostrar que, si bien el algoritmo fue diseñado para mallas uniformes, lo único necesario es tener varias capas de elementos iguales tanto en la frontera aguas abajo como aguas arriba, *pero que en la zona intermedia la malla puede ser completamente irregular*. En la figura 4 vemos la elevación de la superficie libre para el caso del bump de presión con $Fr = 1.4$ con dos mallas de $2 \times 80 \times 10$ elementos triangulares entre $-6 \leq x \leq 2$. La primera malla es uniforme, con $\Delta x = \text{cte}$ y Δy variable según y pero no según x . La segunda malla fue generada a partir de la primera agregando una perturbación aleatoria a los nodos interiores de la malla anterior para generar una malla irregular. Se dejaron 5 capas de elementos uniformes tanto a la entrada como a la salida. En dicha figura se muestra la malla irregular y la elevación de potencial obtenida por ambas mallas, las cuales no se llegan a distinguir entre sí. La diferencia en elevación es menor en valor absoluto a 10^{-3} . En cuanto al arrastre de onda, el resultado con la malla irregular es $C_w = 0.2104$ contra 0.2099 para la malla irregular, mientras que el valor teórico es de 0.2240. Puede decirse que la variación es despreciable con respecto al error de discretización.

4.2.3 Las ondas por gravedad no se amortiguan

Para los autovalores hiperbólicos $b_i < 1$ y puede comprobarse que las raíces λ de la ecuación característica correspondiente son de módulo unitario, con lo cual su amplitud no decae. Esto indica que con la condición de contorno absorbente propuesta, al no ser necesario agregar términos de upwind, *las ondas aguas abajo no sufren de amortiguación numérica*, y es lo que se observa en los resultados numéricos.

4.3 Casco Wigley, modelo de serie 1805 A

En la figura 5 vemos la curva de resistencia de onda obtenida con el método propuesto, la cual está en muy buena coincidencia con los resultados reportados en la literatura. La malla consistió de $50 \times 13 \times 13 = 8450$ elementos. Vemos que el método propuesto reproduce muy bien el pico primario y los secundarios. En ningún caso el arrastre se vuelve negativo, por lo que hemos discutido previamente.

4.4 Rectángulo de presión (hovercraft)

Se trata de un caso especial donde la perturbación no es una embarcación sino una variación de presión sobre la superficie libre. Esta perturbación puede ser producida por, por ejemplo, un

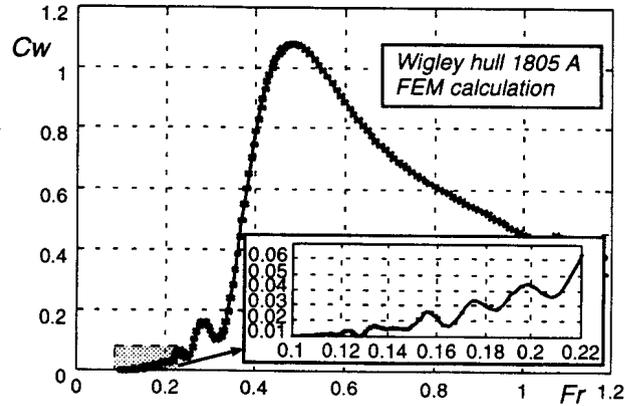


Figura 5: curva de resistencia de onda para un casco de ensayo de la serie Wigley.

hovercraft. Las ecuaciones de gobierno linealizadas son, $\Delta\phi = 0$ en Ω , $\partial\phi/\partial n = 0$ en $\Gamma_{\text{bot/lat}}$, con condiciones de contorno absorbentes en $\Gamma_{\text{in/out}}$, y,

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} + K^{-1} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\frac{U_\infty}{\rho g} \frac{\partial\Delta P}{\partial x} \quad \text{en} \quad \Gamma_{\text{free}}$$

donde ΔP es constante dentro de un rectángulo de ancho B , de longitud L y nula fuera del mismo. Aquí hemos levantado la curva de resistencia para el caso $L/B = 3/2$, para el cual contamos con resultados experimentales de Kim, reproducidos en Wehausen [4]. Este es un caso interesante porque es puramente 3D y no entra dentro de las teorías, ni del barco tenue ni del barco delgado. Además notemos que, como en la condición de superficie libre (última ecuación de gobierno) entra la derivada longitudinal de ΔP , esto corresponde a δ -s de Dirac en la parte anterior y posterior del rectángulo. Como hemos visto en el cálculo analítico de las curvas de drag para distribuciones de presión 2D, el arrastre es, básicamente, proporcional a la transformada de Fourier de ΔP . Ahora bien, cuanto más singular es la distribución de presión, más oscilatoria es su transformada. Como límite, la transformada de una δ de Dirac es una exponencial compleja de amplitud constante. Es de esperar, por lo tanto, que la curva de arrastre sea altamente oscilatoria para $Fr \rightarrow 0$. Efectivamente, esto es lo que observamos tanto en los resultados numéricos (figura 6) como en los resultados experimentales. La coincidencia entre ambos es, además, muy buena. Nótese como se resuelven los picos secundarios en la curva de resistencia, hasta valores de Fr de hasta 0.2. Los resultados numéricos presentados fueron obtenidos con una malla de $30 \times 10 \times 15 = 4500$ elementos en longitud-profundidad-transversal.

5 CONCLUSIONES

Hemos empleado la estrategia de la condición de frontera absorbente discreta no local (DNL), para la resolución del problema de la "resistencia de onda" en barcos mediante flujo potencial. La estrategia se basa en la descomposición en autovalores del sistema de ecuaciones ordinarias (ODE) que resultan de la discretización parcial en la sección transversal de las ecuaciones gobernantes. Por construcción la solución numérica es independiente de la posición del borde absorbente. Esto constituye un resultado muy fuerte. Como no se introduce una viscosidad numérica, la resistencia de onda lo podemos obtener mediante balances de flujo de momento,

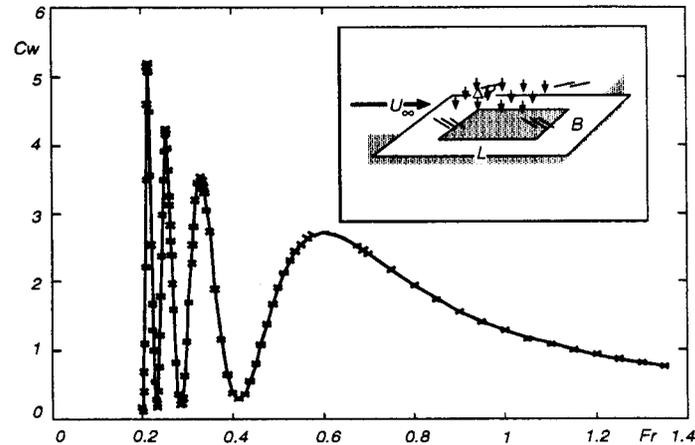


Figura 6: resultados numéricos por FEM + condiciones absorbentes, para el hovercraft.

obteniendo siempre valores positivos. Las curvas de arrastre obtenidas con este método exhiben máximos secundarios bien definidos y los cálculos pueden hacerse para un amplio intervalo en el número de Froude.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento del *Consejo Nac. de Investigac. Científicas y Técnicas* (CONICET, Argentina), mediante el proyecto BID 802/OC-AR PID Nr. 26, y de la *Universidad Nacional del Litoral* (Argentina). Además se ha empleado extensivamente los programas distribuidos por la *Free Software Foundation /GNU-Project*: Linux ELF-OS, Octave por J.W. Eaton, Fortran f2c y g77 compiladores, Tgif y otros.

7 REFERENCIAS

1. M. Storti, J. D'Elía, R. Bonet y S. Idelsohn, "The Discrete Non Local (DNL) Radiation Boundary Condition", ENIEF'97.
2. Dawson C.W., "A Practical Computer Method for Solving Ship-Wave Problems", in Proc. 2nd Int. Conf. on Numer. Ships Hydrodynamics, Berkeley, C.A., p. 30 (1977).
3. R. Bonet, N. Nigro, M. Storti y S. Idelsohn, "Condición de frontera absorbente discreta no-local (DNL) para modelos elípticos de propagación de ondas en el mar", ENIEF'97.
4. Wehausen J.V., "The Wave Resistance of Ships", *Advances in Applied Mechanics*, vol 13, pp. 93-245 (1973).