

## ASPECTOS DA MODELAGEM DA TURBULÊNCIA JUNTO A UMA PAREDE

Hugo D. Pasinato  
Departamento de Ciencia y Tecnología, Universidad  
Nacional de Quilmes, (1876) Bernal, Argentina

Angela O. Nieckele  
Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/Rio  
Rua Marquês de São Vicente 225  
(22453-900) Rio de Janeiro RJ, Brasil

### RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma proposta de modelagem da turbulência para a região viscosa junto a um contorno sólido, dentro do contexto de modelos de duas equações. O enfoque adotado é baseado na física da turbulência nessa região. Nesse sentido, usam-se escalas de tempo apropriadas para estimar as fontes de dissipação de energia cinética turbulenta e viscosidade efetiva da turbulência. Baseado no fato que o modelo K- $\epsilon$  padrão simula adequadamente o escoamento na sub-camada logarítmica, a modelagem proposta usa esse modelo na região de altos Reynolds. O modelo é ajustado a partir de camadas limites estabelecidas, no entanto, acredita-se que o mesmo possa apresentar resultados razoáveis em camadas limites não estabelecidas. Alguns resultados nesse sentido são apresentados.

### ABSTRACT

In this work a modeling of turbulence in the viscous region near a wall is presented, based on two equations turbulence models. This proposal is intended to keep some of the near-wall turbulence physics. Accordingly, an appropriate time scale in the viscous region is used for the kinetic energy dissipation equation and for the turbulence effective viscosity. Because turbulence K- $\epsilon$  model gives the correct solution in the logarithmic sub-layer, the proposed modeling uses the solution of this model for the high Reynolds turbulent flow region. In spite of the fact that modeling is *ad hoc* for attached boundary layer turbulent flow, it is expected to give goods results for non-established boundary layer. In this sense some results are shown.

### INTRODUÇÃO

Escoamentos encontrados em aplicações práticas são geralmente turbulentos, sendo eles governados pelas equações de Navier-Stokes. A solução completa destas equações para um escoamento turbulento, não é trivial devido não só a não linearidade das equações, mas também à dificuldade de se especificar condições iniciais e de contorno com total precisão. Portanto, para casos aplicados, acredita-se que por muito tempo ainda, seja necessário utilizar modelos para fechar o problema da turbulência. Além disso, em casos de interesse prático,

estimativas dos valores médios dos momentos das flutuações de um escoamento turbulento são suficientes. Estas estimativas podem ser obtidas numericamente a partir das equações de Navier-Stokes, usando *large eddy simulation*, LES, ou usando as equações de Reynolds.

Devido a simplificações na obtenção dos valores médios nas equações de Reynolds, somente é válido simular em forma direta as macro escalas do escoamento. As escalas simuladas têm ordem de grandeza equivalentes às condições de contorno. Consequentemente, a solução é truncada em escalas dependentes das condições de contorno, resultando os modelos de turbulência usados com as equações de Reynolds ferramentas *ad hoc* ou ajustadas. No entanto, apesar desta desvantagem, estes modelos apresentam resultados razoáveis a um baixo custo para escoamentos não muito afastados das condições de ajuste.

De um modo geral, os modelos de turbulência apresentam bons resultados nas regiões de altos Reynolds, porém a simulação do escoamento próximo aos contornos sólidos, ainda precisa ser melhorada. Este problema tem sido atacado de duas formas distintas: (a) usando o perfil logarítmico de Prandtl-von Karman para obter as condições de contorno das variáveis do modelo na região de altos Reynolds e (b) usando modelos para baixos números de Reynolds entre a zona de altos Reynolds e o contorno. A metodologia (a) tem a seu favor o fato de incorporar informação experimental através da "lei da parede" ou equação de Prandtl-von Karman, de requer menor esforço computacional e da simplicidade da implementação. Em contrapartida, em camadas limites não estabelecidas seu uso não é fisicamente válido. As metodologias de tipo (b) pretendem ser mais gerais, menos *ad hoc* que as de tipo (a), permitido simular fluxos em camadas limites não estabelecidas. A essência da metodologia (b) é modelar a transição desde uma zona dominada pelas tensões turbulentas a outra dominada pelas tensões viscosas. E a ênfase é dada ao fechamento adequado da equação de dissipação de energia cinética turbulenta e da equação da viscosidade efetiva da turbulência.

Na maior parte dos modelos de turbulência que usam o método (b), estas duas expressões são ajustadas à zona de altos Reynolds. Por tanto, devem ser corrigidas as constantes para simular a região viscosa. A forma mais comum de fazer essa correção é usando funções de amortecimento em função da distância adimensional à parede [1], [2]. Apesar de alguns modelos baseados nessa idéia apresentarem resultados melhores que outros, não existe uma versão que seja realmente superior em todas as situações [1], [2]. Um caminho alternativo é tentar modelar a região viscosa numa maior base física [2], [3], [4], evitando o uso de funções de amortecimento.

Neste trabalho apresentam-se alguns resultados de uma proposta de modelagem da turbulência, da região viscosa junto a um contorno sólido. O enfoque da proposta é levar em conta em alguma medida a física da turbulência nessa região, usando escalas de tempo apropriadas para corrigir a geração de dissipação.

### CARACTERIZAÇÃO DA TURBULÊNCIA NA REGIÃO VISCOSA

No contexto da simulação com modelos de duas equações, caracterizar a turbulência na região viscosa significa determinar as funções velocidade média, energia cinética turbulenta e taxa de dissipação. Estas grandezas, podem ser escritas adimensionalmente, em função da velocidade do atrito  $u_*$  e da viscosidade cinemática  $\nu$ , como:  $U^+ = U/u_*$ ,  $K^+ = K/u_*^2$  e  $\varepsilon^+ = \varepsilon\nu/u_*^4$ , onde a velocidade de atrito é obtida em função da tensão de atrito na parede e da massa específica  $\rho$ , como  $u_* = (\tau_w / \rho)^{1/2}$ . A distribuição dessas funções na vizinhança de uma parede, podem ser

determinadas na base de dados experimentais ou de simulação direta [5]. Neste trabalho foram usadas funções pseudo experimentais correspondentes a Haritonidis [6] e funções ajustadas a partir de dados experimentais. Logo essas funções são usadas com o intuito de avaliar constantes do modelo, assim como para analisar o comportamento das escalas de tempo na região viscosa.

Assim, a velocidade média desde o contorno até o início da sub-camada logarítmica é [6]:

$$U^+ = \frac{1}{\lambda} \tan^{-1}(\lambda y^+) \quad , y^+ = u_* y / \nu \quad (1)$$

onde  $y^+$  é a distância adimensional normal à parede e  $\lambda$  é um parâmetro que depende do tempo médio das ejeções de fluido no contorno. Para altos Reynolds,  $\lambda = 0.09364$ .

A energia cinética turbulenta:

$$K^+ = \frac{1}{2} (\langle uu \rangle^+ + \langle vv \rangle^+ + \langle ww \rangle^+) \quad (2)$$

é obtida a partir do ajuste dos momentos  $\langle uu \rangle^+$ ,  $\langle vv \rangle^+$  e  $\langle ww \rangle^+$  a dados experimentais correspondentes a Durst, Ye e Sender [7].

Logo a dissipação de energia cinética turbulenta pode ser obtida aplicando-se a equação de energia cinética turbulenta na região viscosa [8], usando (1) e (2):

$$0 = \frac{d^2 K^+}{d y^{+2}} + \frac{d}{d y^+} \lambda^2 y^{+2} \frac{d K^+}{d y^+} - \frac{\lambda^2 y^{+2}}{(1 + \lambda^2 y^{+2})^2} - \varepsilon^+ \quad (3)$$

### MODELAÇÃO DA TURBULÊNCIA NA REGIÃO VISCOSA

No contexto de modelos de turbulência de duas equações, a simulação da região viscosa implica avaliar corretamente a viscosidade da turbulência e a dissipação de energia cinética turbulenta ( a equação da energia cinética turbulenta pode ser obtida em forma analítica a partir das equações de Navier-Stokes ).

#### Viscosidade efetiva da turbulência na região viscosa:

Usando a viscosidade efetiva da turbulência, o Reynolds turbulento pode ser considerado como a relação das difusividades da viscosidade molecular e turbulenta. Se o Reynolds é definido desse modo, ele resulta ser a relação das escalas de tempo associadas à turbulência e à viscosidade molecular:

$$R_t = \left( \frac{K}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\varepsilon}{\nu} = \left( \frac{t_t}{t_v} \right)^2 \quad (4)$$

Na base de dados experimentais, é possível mostrar que no início da sub-camada logarítmica existiria uma aparente similaridade entre a escala de tempo da turbulência  $K/\varepsilon$  e do escoamento médio  $1/S$ . Na figura 1 apresenta-se a relação da escala de tempo do escoamento médio sobre a escala de tempo da turbulência, na base de usar as funções do item anterior. Por outra parte,

é conhecido o fato que a escala do escoamento médio  $1/S$  converge para a escala viscosa  $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$  na parede. Portanto é de esperar que a troca de  $K/\varepsilon$  por  $1/S$  em (4), seja uma forma apropriada para definir o Reynolds na região viscosa. Nesse caso resulta:

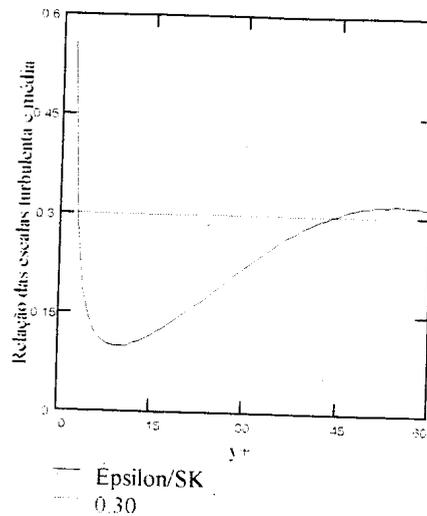


Fig. 1 Relação das escalas de tempo do escoamento médio e da turbulência, em função da distância adimensional à parede.

$$R_t = \left( \frac{1}{0.3 S} \right)^2 \frac{\varepsilon}{\nu} = \left( \frac{t_m}{t_v} \right)^2 \quad (5)$$

Na base da expressão (5) é possível definir a viscosidade da turbulência na região viscosa. Nesse sentido, usando a relação  $\varepsilon \propto u^3/l$ , estimada em função do escoamento médio como:

$$\varepsilon \propto |U|^2 S \quad (6)$$

onde  $|U|$  é o módulo da velocidade média na camada limite e  $S$  é a magnitude da taxa de deformação do escoamento médio. Logo a viscosidade da turbulência na região viscosa resulta:

$$\mu_t = C_{\mu p} \rho \frac{|U|^2}{S} \quad (7)$$

onde a constante  $C_{\mu p}$  toma o valor 0.005, se (7) é ajustada de modo que a produção de turbulência seja equivalente à observada experimentalmente [6].

Numa região de escoamento determinada, a viscosidade é escolhida como a mínima entre a correspondente à expressão (7) e aquela para altos Reynolds dos modelos de duas equações.

Nas expressões (5) e (7) existiria um aparente problema nos pontos de estancamento, onde  $S \rightarrow 0$ . No entanto, a interpretação dada neste trabalho é que num ponto de estancamento o Reynolds turbulento não é necessariamente zero. Pelo contrario, nele as flutuações da velocidade estão muito distante do fluxo médio, que não está perturbado ou que apresenta só perturbações muito suaves. Por esse motivo, acredita-se que num ponto de estancamento poderia ser usada a expressão de viscosidade da turbulência correspondente à região de altos Reynolds.

#### Dissipação de energia cinética turbulenta na região viscosa:

Considerando a verdadeira taxa de dissipação:

$$\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \right\rangle + \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right\rangle \quad (8)$$

descartando o segundo termo à direita em (8), [10], é possível obter uma expressão exata para a dissipação, na base de manipular as equações de Navier-Stokes [11]. Essa equação para  $\varepsilon$  é:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \text{fonte-ligada-fluxo-m\u00e9dio} + \text{fonte-ligada-turbul\u00eancia} + \text{transporte-turbulento} + \text{difus\u00e3o} \quad (9)$$

O termo à esquerda representa a convecção e os termos à direita são fontes, sumidouros e transporte turbulento e molecular de dissipação. As duas formas de conhecer o comportamento dos termos à direita em (9) é através de dados de simulação direta [5] e na base da análise dimensional da ordem de grandeza relativa deles [12]. Se na análise apresentada em [12] por Tennekes e Lumley é considerado que o tensor de deformação do fluxo médio é  $S_p = o(u/l)$ , e ele é retido como um parâmetro  $S$ , igual à magnitude da taxa de deformação do fluxo médio, obtém-se:

$$(\text{fonte ligada ao fluxo m\u00e9dio}) / (\text{fonte ligada \u00e0 turbul\u00eancia}) = o(SK / \varepsilon / R_t^{1/2}) \quad (10)$$

resultando proporcional à inversa do Reynolds turbulento multiplicado pelo parâmetro  $SK/\varepsilon$ . A expressão (10) correspondente a Rodi e Mansour [2] sugere uma diferença em relação ao resultado de Tennekes e Lumley, na base da consideração comentada. No entanto, é interessante observar que reter  $u/l$  do escoamento médio como um parâmetro é relevante só no caso que as escalas de tempo do fluxo médio e da turbulência sejam diferentes. Mas, como foi mostrado na figura 1, na base de dados experimentais, na sub-camada logaritmica existiria uma aparente similaridade entre essas escalas. Portanto, o novo parâmetro  $SK/\varepsilon$  resulta ser aproximadamente uma constante nela. Desse modo na sub-camada logaritmica não teria maior importância a aparição dele. Em contraste, na região viscosa sim existe um afastamento dessas escalas.

É importante salientar no entanto que a análise de Tennekes e Lumley é válida na região de altos Reynolds. Portanto ao fazer-se referência à região viscosa está-se referendo à zona dela próxima à sub-camada logaritmica. Nessa zona ( que é por outra parte onde teria sentido

tomar  $u/l$  como  $S$  segundo o comentado acima ), a ordem de grandeza relativa dos termos de geração de  $\varepsilon$  resulta:

$$(\text{fonte ligada ao fluxo médio}) / (\text{fonte ligada à turbulência}) = o\left(S / \sqrt{\varepsilon / \nu}\right) \quad (11)$$

Logo segundo (5), a ordem relativa dos termos seria em geral:

$$(\text{fonte ligada ao fluxo médio} / \text{fonte ligada à turbulência}) = o\left(1 / R_t^{1/2}\right) \quad (12)$$

sendo que a expressão do Reynolds turbulento na sub-camada logarítmica seria diferente da correspondente à região viscosa. O resultado (12) pode ser usado para analisar os termos fontes na equação de dissipação, no extremo afastado da parede da região viscosa. Sim isto é feito considerando a solução do K- $\varepsilon$  padrão na sub-camada logarítmica, as fontes de dissipação ligadas ao escoamento médio deveria ser modeladas como:

$$(\text{fontes ligadas ao fluxo médio}) = C_{\varepsilon 3} \varepsilon S \quad (13)$$

e assim, junto à parede poderia ser usada para a dissipação a seguinte equação, na qual o termo em (13) é multiplicado pela inversa da raiz quadrada do Reynolds, porque só é necessária uma correção a essa modelação:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \nu \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d}{dy} \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{d}{dy} \varepsilon + C_{\varepsilon 3} \varepsilon S \frac{S}{(\varepsilon / \nu)^{1/2}} + (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{(\varepsilon / \nu)^{1/2}}{C_t} \quad (14)$$

Sendo que em (13) e (14) foi usada a escala de tempo viscosa nos termos de geração de dissipação ligados à turbulência. A constante  $C_t$  surge da troca dessa escala de tempo, sendo 12.0 seu valor. Ela foi determinada segundo as funções pseudo experimentais comentadas acima. A constante  $C_{\varepsilon 3}$  foi obtida usando o fato que a soma dos termos fontes na região viscosa devem cancelar mutuamente. Em outras palavras, na região da parede os termos convectivos em (14) são nulos, portanto um fechamento dessa equação implica que esses termos cancelem mutuamente. Desse modo obteve-se para essa constante  $C_{\varepsilon 3}$  o valor de 0.023. As constantes restantes são as mesmas do modelo K- $\varepsilon$  padrão  $C_1=1.44$ ,  $C_2 = 1.92$  e  $\sigma_\varepsilon = 1.30$ , de modo que na sub-camada logarítmica se recupere esse modelo.

### RESULTADOS NUMÉRICOS

A modelação da região viscosa apresentada nos itens anteriores, tem sido testada em três tipos de fluxos turbulentos contornados por sólidos. Escoamentos hidrodinamicamente desenvolvidos em condutos circulares e placas planas, escoamento através de um *backfacing step* e para um jato incidente sobre uma placa plana. Neste trabalho são apresentados alguns resultados correspondentes ao primeiro e terceiro caso de estudo. O escoamento turbulento hidrodinamicamente desenvolvido em condutos circulares ou entre placas paralelas, não representa um teste propriamente dito, dado que as constantes do modelo são definidas para esse tipo de escoamento turbulento. No entanto, a apresentação dos resultados tem por objetivo apresentar a solução completa, assim como também analisar a sensibilidade ou dependência dela em função do Reynolds, para Reynolds baixos. Do problema correspondente ao jato incidente numa placa plana, são mostrados só distribuição da velocidade média e

tensões de Reynolds, na zona próxima ao ponto de estancamento. A solução completa para esse caso será apresentada em outro trabalho.

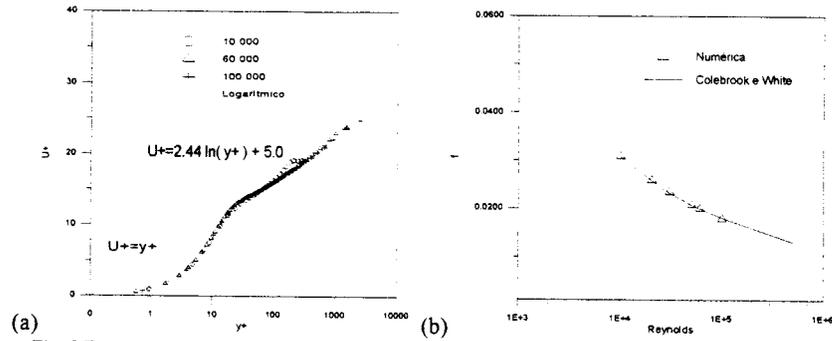


Fig. 2 Escoamento turbulento desenvolvido em condutos circulares e placas planas: (a) Velocidade média. (b) Coeficiente de atrito para parede lisa.

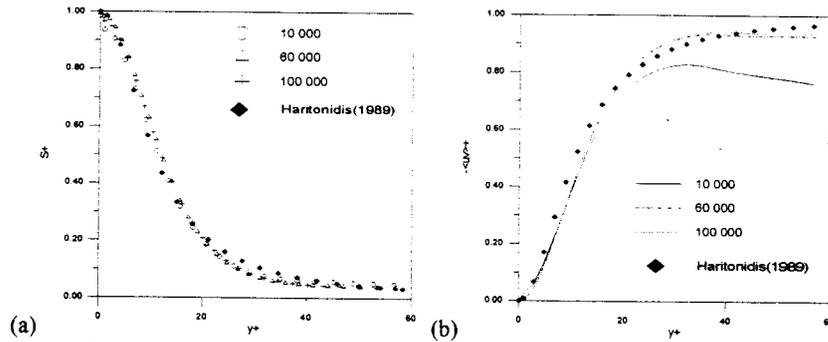


Fig. 3 Comparação da solução numérica com dados de Haritonidis [6]. (a) Taxa de deformação do escoamento médio; (b) Tensões de Reynolds na região viscosa.

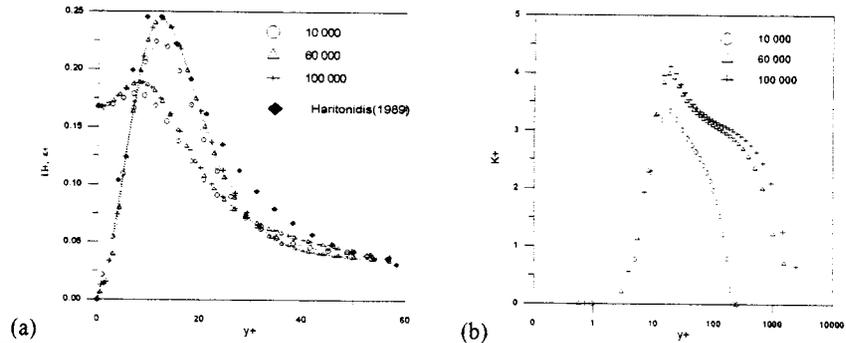


Fig. 4 Fluxo turbulento interno hidrodinamicamente desenvolvidos. (a) Dissipação e produção de energia cinética turbulenta; (b) Energia cinética turbulenta.

A solução numérica foi obtida usando uma formulação baseada no método de volumes de controle ou celas [13], [14], [15]. Foi realizado um teste de malha, adotando-se como malha definitiva aquela para a qual a solução para  $\epsilon$  e  $K$ , assim como para a velocidade média  $U$ , não apresentava variação para uma precisão de  $10^{-4}$  num ponto fixo na região viscosa. Desse teste concluiu-se que são necessárias no mínimo quatro volumes para a zona compreendida em  $y^+ \leq 11.6$ . E um total de 16 volumes como mínimo para discretizar toda a região viscosa,  $y^+ < 60$ , para assim obter soluções independentes da malha. A convergência foi considerado para um precisão de  $10^{-8}$  para a equação de conservação da massa e de  $10^{-4}$  para as leis de conservação de *momentum*.

Nas figuras 2, 3 e 4 apresenta-se um resumo dos resultados do escoamento turbulento hidrodinamicamente desenvolvidos para condutos circulares ou entre placas paralelas. Como o objetivo do teste foi verificar a dependência da solução para Reynolds baixos, os Reynolds escolhidos são  $10^4$ ,  $6 \times 10^4$  e  $10^5$ . Foram também testados Reynolds superiores na ordem de  $10^6$ , os quais não apresentaram problemas. Na figura 2-a apresenta-se as distribuições da velocidade média e na figura 2-b, a variação do coeficiente de atrito para Reynolds nessa ordem, para parede lisa. Este último apresenta boa concordância com a expressão de Colebrook e White [16], sendo que a velocidade média escala segundo o perfil logarítmico. Neste trabalho optou-se pela sugestão feita na literatura [6] do valor 5.0 para a constante nessa lei e de 0.41 para a constante de von Karman. Em relação ao coeficiente de atrito, é importante comentar que a pesar de não ser evidente na figura 2-b, dado a escala, esses fatores apresentaram uma pequena diferença entre os correspondentes a condutos circulares e placas paralelas. Sendo menores estes últimos. Na figura 3-a apresenta-se uma comparação da magnitude da taxa de deformação do escoamento médio para os três Reynolds, com a obtida numa camada limite na base da expressão (1), correspondente ao perfil arcotangente. Nela observa-se uma pequena diferença para o intervalo  $30 < y^+ < 40$ . Esta fato se repete para todos os casos e para a solução numérica em geral. Ela é atribuída à mudança de viscosidade realizada aproximadamente para  $y^+$  igual a 35. Na figuras 4-a apresentam-se as distribuições de dissipação e de produção de energia cinética turbulenta, e na figura 4-b as distribuições de energia cinética turbulenta na camada limite. Nesta última é possível observar que para o Reynolds menor, o nível de energia é sensivelmente menor. No entanto esta diferença, segundo já foi apresentado na figura 2, a distribuição da velocidade média e o coeficiente de atrito são calculados corretamente.

A breve comparação da solução numérica com dados experimentais apresentada a seguir nas figuras 5 e 6, é feita para o problema de um jato incidente numa placa plana. Os dados experimentais correspondem a Cooper, Jackson, Launder e Liao, [17]. O Reynolds dos mesmos é 23 000, em função da velocidade média  $U_j$ , na seção de saída do jato, e do diâmetro  $D$  do mesmo. A razão de separação entre o jato e a placa é de  $H/D=2$ , sendo  $H$  a distância desde a seção de saída do jato até a placa. A distribuição de velocidade média apresentada na figura 5-a corresponde a uma seção localizada a uma distância radial desde o ponto de estancamento,  $r$ , igual a  $0.50D$ . Para a figura 5-b, a seção corresponde a  $r/D = 1.00$ . Para essas duas seções são apresentadas as tensões de Reynolds na figura 6-a e 6-b. Dado que este é um escoamento turbulento de difícil simulação para um modelo de duas equações, os resultados mostram que perto do ponto de estancamento, o modelo se comporta em forma adequada.

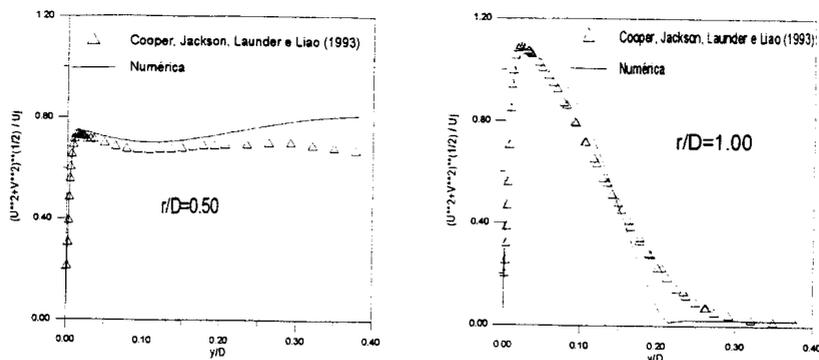


Fig. 5 Comparação da solução numérica com dados experimentais para um jato incidente numa placa plana, para o caso de Reynolds igual a 23 000 e  $H/D=2$ . Distribuição da velocidade média para as seções localizadas em  $r/D=0.50$  e  $1.00$ , desde o ponto de estancamento.

### CONCLUSÕES

Neste trabalho apresenta-se uma proposta de modelação da turbulência para a região viscosa junto a um contorno sólido, dentro do contexto de modelos de duas equações.

Se bem que tirar conclusões sobre uma ferramenta ajustada como são os modelos de turbulência, é uma tarefa com riscos dada a própria natureza dos modelos, acredita-se que com a modelagem apresentada se reproduz adequadamente os níveis de turbulência e dissipação na região viscosa numa camada limite estabelecida. Sendo que para o caso do jato incidente, pode-se concluir que a solução numérica é adequada para os resultados apresentados perto do ponto de estancamento. Pode-se destacar ainda que os valores da velocidade média são bem calculados em seu valor máximo e no gradiente junto à parede. Isto acredita-se que seja a causa da expressão usada para a viscosidade efetiva na região viscosa. Aparentemente essa expressão permite que sejam obtidas em forma apropriadas as tensões de Reynolds, resultando assim numa geração adequada de turbulência na região viscosa.

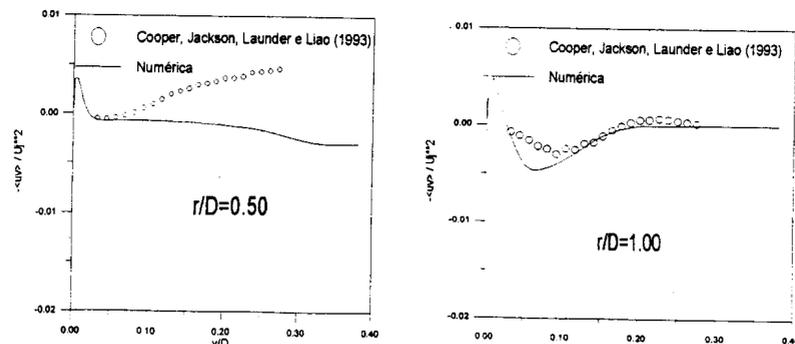


Fig. 6 Comparação da solução numérica com dados experimentais para um jato incidente numa placa plana,  $Re=23\ 000$  e  $H/D=2$ . Tensões de Reynolds para  $r/D=0.50$  e  $1.00$ , desde o ponto de estancamento.

Assim, dentro das limitações dos modelos de turbulência, pode-se concluir que é possível melhorar, em certos casos, a solução dentro da região viscosa junto a uma parede.

No entanto, é também importante dar o verdadeiro significado à melhora que através dessa modelagem possa ser conseguida para a solução em todo o domínio. É importante salientar que num escoamento turbulento para o qual a geração de turbulência não ocorra na região viscosa junto à parede ( como seria o caso do problema do *backfacing step*, no qual a geração de turbulência ocorre principalmente num camada de atrito no interior dele ), a importância da modelação adequada da região viscosa será relativa.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Patel, V., W. Rodi e G. Scheuerer, 1984, *Turbulence model for near-wall and low-Reynolds number flows: A review*, AIAA J., 23(9).
- [2] Rodi W. e Mansour N.N., 1993, *Low Reynolds number  $K-\epsilon$  modelling with the aid of direct simulation data*, J.F.M., 509-529.
- [3] Jovanovic J., Q.-Y. Ye e F. Durst, 1995, *Statistical interpretation of the turbulent dissipation rate in wall-bounded flows*, J.F.M., 321-347.
- [4] Durbin P. A., 1993, *A Reynolds stress model for near-wall turbulence*, J.F.M., 465-498.
- [5] Mansour, N.N., J. Kim e P. Moin, 1988, *Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow*, J.F.M., 194, 15-44.
- [6] Haritonidis J. H., 1988, *A model for near-wall turbulence*, Phys. Fluids A 1(2), 302-306.
- [7] Durst T., J. Jovanovic e J. Sender, 1995, *LDA measurement in the near-wall region of a turbulent pipe flow*, J.F.M., 295, 305-335.
- [8] Pasinato, H. E. A.O. Niecele; 1996; *Near-Wall Turbulence and the Eddy Viscosity Hypothesis*, Congresso Arg. Mec. Comp., Vol xvi, pag. 173-182.
- [9] Townsend, A.A., 1976, *The structure of turbulent shear flow*, (2da. Ed.), Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] Bradshaw P. e B. Perot, 1993, *A note on turbulent energy dissipation in the viscous wall region*, Physics of fluids A 5 (12).
- [11] Hinze, J.O., 1975, *Turbulence*, McGraw Hill, New York
- [12] Tennekes H. e J.L. Lumley, 1972, *A first course in turbulence*, The MIT Press, Ma.
- [13] Niecele O. A., 1992, *Notas Curso Computação Avançada em Fenômenos de Transporte*, DEM, PUC/Rio, Rio de Janeiro.
- [14] Patankar, S.V., 1980, *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill.
- [15] Raithby, G.D. and van Doormaal, J.P., 1984, *Enhancements of the SIMPLE methods for predicting incompressible fluid flow*, J. Num. Heat Transfer, 7, pag. 147-163.
- [16] Schlichting, H., 1968; *Boundary-Layer Theory*, McGraw Hill, NY.
- [17] Cooper D., D.C. Jackson, B.E. Launder e G.X. Liao, 1993, *Impinging jet studies for turbulence model assessment-I. Flow-field experiments*, Int. J. H.M. Transfer, 36, nro. 10, 2675-2684.
- [18] Craft, T.J., L.J.W. Graham e B.E. Launder, 1993, *Impinging jet studies for turbulence model assessment-II. An examination of the performance of four turbulence models*, Int. J. H.M. Transfer, vol. 36, 10, pp, 2685-2697.
- [19] Kim J., P. Moin e R. Moser, 1987, *Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number*, J.F.M., 177, 133-166.
- [20] Mansour, N.N., J. Kim e P. Moin, 1987, *Near-wall  $K-\epsilon$  turbulence modelling*, AIAA J., 27(8), 1068-1073.